

1  
24  
Bd. 60  
n/c

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK UND IHRE GRENZGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON

K. BECHERT-MAINZ · W. BLASCHKE-HAMBURG · E. BOMPIANI-ROMA  
CH. EHRESMANN-PARIS · R. GRAMMEL-STUTTGART · H. HASSE-HAMBURG  
F. HUND-GÖTTINGEN · H. KIENTLE-HEIDELBERG · K. KNOPP-TÜBINGEN  
R. NEVANLINNA-HELSINKI · W. SAXER-ZÜRICH · E. SCHMIDT-BERLIN  
F. SEVERI-ROMA · B. v. SZ.-NAGY-SZEGED · T. TAKAGI-TOKYO  
E. ULLRICH-GIESSEN · E. M. WRIGHT-ABERDEEN

IN ZUSAMMENARBEIT MIT DER  
DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN  
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR MATHEMATIK

SCHRIFTFÜHRUNG: E. PANNWITZ

60. BAND

LITERATUR AUS DEN JAHREN 1940—1946



SPRINGER-VERLAG  
BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG


1957





# Inhaltsverzeichnis

	Seite
Geschichte .....	1
Grundlagenfragen. Philosophie. Logik .....	18
Algebra und Zahlentheorie .....	24
Kombinatorik .....	24
Lineare Algebra. Polynome .....	30
Verbände. Ringe. Körper .....	58
Zahlentheorie .....	83
Analysis .....	123
Allgemeines .....	123
Mengenlehre .....	123
Differentiation und Integration reeller Funktionen .....	130
Allgemeine Reihenlehre .....	152
Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen .....	167
Spezielle Orthogonalfunktionen .....	191
Funktionentheorie .....	199
Integralgleichungen. Integraltransformationen .....	247
Funktionalanalysis. Abstrakte Räume .....	261
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen .....	282
Wahrscheinlichkeitsrechnung .....	282
Statistik .....	295
Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik .....	317
Geometrie .....	321
Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie .....	321
Elementargeometrie .....	331
Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen .....	349
Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen .....	366
Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen .....	381
Topologie .....	394
Theoretische Physik .....	416
Elastizität. Plastizität .....	416
Elektrodynamik. Optik .....	432
Relativitätstheorie .....	439
Quantentheorie .....	449
Bau der Materie .....	458
Astronomie. Astrophysik. Geophysik .....	460



Digitized by the Internet Archive  
in 2024

## Geschichte.

Andrissi, G. L.: Valore e funzioni dell'astronomia medievale italiana nello sviluppo storico dell'astronomia e confutazione delle denigrazioni degli storici d'oltralpe. Atti Secondo Congresso Un. mat. Ital. Bologna 1940, 921—931 (1942).

● Loria, Gino: Guida allo studio della storia delle matematiche. Generalità. Didattica. Bibliografia. Appendice: Questioni storiche concernenti le scienze esatte. — 2. ed. Milano: Ulrico Hoepli 1946. XIX, 385 p.; 550 lire.

Bateman, H.: The influence of tidal theory upon the development of mathematics. Nat. Math. Mag. 18, 14—26 (1943).

● Ore, Oystein: Mathematics. Development of the Sciences, Second Series, p. 1—51. New Haven, Conn.: Yale University Press 1941.

Miller, G. A.: A fourth lesson in the history of mathematics. Nat. Math. Mag. 17, 13—20 (1942).

Miller, G. A.: A fifth lesson in the history of mathematics. Nat. Math. Mag. 17, 212—220 (1943).

Miller, G. A.: A sixth lesson in the history of mathematics. Nat. Math. Mag. 17, 341—350 (1943).

Miller, G. A.: A seventh lesson in the history of mathematics. Nat. Math. Mag. 18, 67—76 (1943).

Miller, G. A.: An eighth lesson in the history of mathematics. Nat. Math. Mag. 18, 261—270 (1944).

Miller, G. A.: A ninth lesson in the history of mathematics. Nat. Math. Mag. 19, 64—72 (1944).

Miller, G. A.: A tenth lesson in the history of mathematics. Nat. Math. Mag. 19, 286—293 (1945).

Chatley, Herbert: Ancient Chinese astronomy. Occasional Notes, roy. astron. Soc. 1939, 65—74 (1939). 1 plate.

Katô, Heizaemon: Untersuchungen von Seki-Kôwa's Kaibô-Hompen. Tôhoku math. J. 48, 1—12 (1941) [Japanisch].

Minoda, Takashi: On „Katuyô Sampô, book III“ of Seki. III. Tôhoku math. J. 49, 220—222 (1943) [Japanisch].

Teil II s. dies. Zbl. 25, 293.

Fujiwara, Matsusaburô: Vermischte Noten zur Geschichte von Wazan. X. Die Werke von Yosizane Tanaka. Tôhoku math. J. 49, 90—105 (1942) [Japanisch].

Krishnaswami Ayyangar, A. A.: Peeps into India's mathematical past. J. Mysore Univ., Sect. A 5, 101—115 (1945).

Gurjar, L. V.: The value of  $\sqrt{2}$  given in the Śulvasutras. J. Univ. Bombay, n. Ser. 10, part 5, 6—10 (1942).

Gurjar, L. V.: The problem of squaring the circle as solved in the Śulvasutras. J. Univ. Bombay, n. Ser. 10, part 5, 11—16 (1942).

Marar, K. Mukunda and C. T. Rajagopal: On the Hindu quadrature of the circle. J. Bombay Branch, roy. asiatic Soc., n. Ser. 20, 65—82 (1944).

Marar, K. Mukunda and C. T. Rajagopal: Gregory's series in the mathematical literature of Kerala. Math. Student 13, 92—98 (1945).

● Devarāja: Kuttākāraśiromani. Ānandāśrama Sanskrit Series, Nr. 125, Balavant Dattātreyā Aṭṭe, Poona, 1944. 53 p. [Sanskrit].



Neben zusammenfassenden Darstellungen über die Mathematik bei den Indern (Gurjar, Krishnaswami) werden in den aufgeführten Abhandlungen Einzelprobleme (Quadratur des Kreises,  $\sqrt{2}$ ) diskutiert. — Der Arbeit von Marar und Rajagopal ist ein Anhang von K. Balagangadharan beigegeben, der zu den verwendeten Hauptsätzen neben dem Sanskrittext auch englische Übersetzungen gibt. Eine Neuedition ist Devarāja's Kuṭṭākāraśiromaṇi. Kuṭṭākāra heißt in der indischen Mathematik das Problem der unbestimmten Gleichungen 1. Grades, das zuerst von Āryabhata in seiner Āryabhaṭīya (ca. 499 n. Chr.) behandelt wurde. Devarāja verfaßte dazu einen bisher nur handschriftlich bekannten Kommentar, der die Lösungsmethoden beschreibt. *K. Vogel.*

(1) Sen Gupta, Prabodh Chandra: Hindu astronomy. Science and Culture 9, 522—526 (1944).

(2) Schmidt, Olaf H.: The computation of the length of daylight in Hindu astronomy. Isis 35, 205—211 (1944).

(3) Muñjāla: Laghumānaṣaṃ. Ānandāśrama Sanskrit Series, Nr. 123, Balavant Dattātreyā Āpte, Poona, 1944, 32 p. [Sanskrit].

(1): Überblick über indische Astronomie. (2): Untersuchung einer späten astronomischen Sanskritabelle, in der die Tageslängen im Verlauf des Jahres für einen Ort mit der geographischen Breite von  $23^{\circ}38'$  (wahrscheinlich Kulturzentrum Ujjain) registriert sind. Die verwendeten sphärisch-trigonometrischen Berechnungsmethoden sind nicht griechischen Ursprungs, da Ptolemaios auf anderen Methoden aufbaut. (3): Textedition des astronomischen Werkes Laghumānaṣaṃ, das etwa 932 n. Chr. verfaßt wurde. Es wird hier zusammen mit dem Kommentar von Paramśevara leider nur im Sanskrittext herausgegeben. *K. Vogel.*

Thompson, J. Eric S.: Maya arithmetic. Carnegie Institution of Washington Publ. Nr. 528 (Contributions to American Anthropology and History Nr. 36), 37—62 (4 plates) (1941).

Ludendorff, H.: Astronomische Inschriften in Piedras Negras und Naranjo. Untersuchungen zur Astronomie der Maya, Nr. 13. Abh. Preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1940, Nr. 6, 60 S. (1940).

Thompson vermutet, daß die Maya ihre Berechnungen mit Rechensteinen (Körnern, Bohnen), vielleicht auch auf einem einfachen Abakus durchführten. Ihrer Kalenderrechnung scheint ein Rechnungsjahr von 364 Tagen zugrunde zu liegen. — Ludendorff untersucht etwa 100 Daten aus dem 3.—6. Jh. auf Altären, Türen, Stelen usw. in Piedras Negras sowie an einer Treppe in Naranjo. Daraus ergibt sich, daß die Maya sich besonders für die Planetenkonstellationen am Schnittpunkt der Ekliptik mit der Milchstraße interessierten, daß sie ferner die Länge des tropischen und siderischen Jahres mit großer Genauigkeit kannten und daß das Nulldatum der Mayazeit auf den 11. Nov. 3373 v. Chr. (Jul. Kal.) zu setzen ist. *K. Vogel.*

Ludendorff, H.: Die astronomischen Inschriften der Maya. Festschrift für Elis Strömberg 143—162 (1940).

● Makemson, Maud Worcester: The Maya correlation problem. (Publ. Vassar College Observatory, Nr. 5.) Poughkeepsie, N. Y.: 1946. VIII, 79, V p.

Makemson, Maud Worcester: The astronomical tables of the Maya. Carnegie Institution of Washington Publ. Nr. 546 (Contributions to American Anthropology and History Nr. 42), 185—221 (1943).

Boyer, Carl B.: Fundamental steps in the development of numeration. Isis 35, 153—168 (1944).

Der Artikel betrachtet die Entwicklung der Zahlenschrift und vergleicht die früheren Systeme mit unserem, das er besser als ein „babylonisch-ägyptisch-



griechisch-indisch-arabisches“ bezeichnen möchte. Nach Ansicht des Verf. wird die Bedeutung der Positionsschreibung (durch die aber doch ein bequemes Rechnen mit Brüchen erst möglich wird) überschätzt, während man das griechische System der Buchstabenziffern unterschätze, das unserem gleichwertig sei und in ihm fortlebe. Gewiß, die Zusammenfassung der Zahlen von 1 bis 9 unter einem Symbol ist — wie auch die Zusammenfassung höherer Zahlengruppen zu einer Übereinheit — ein gewaltiger Fortschritt. Weil aber die Griechen den Abakusgedanken nicht ausnützten und für die Zehner und Hunderter neue Buchstabensymbole einführten, werden die Rechnungen unübersichtlich, zumal sie nicht so, wie es der Verf. beschreibt, angeordnet wurden (vgl. des Ref. „Beiträge zur griechischen Logistik“, dies. Zbl. 16, 196). Im andern Fall freilich lassen sich alle Rechnungen wie bei uns auch mit den griechischen Buchstaben von  $\alpha$  bis  $\vartheta$  — zusätzlich eines Symbols für Null — durchführen, wie es z. B. ein unveröffentlichtes Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert zeigt (in Wien, von Busbecke in Konstantinopel gekauft), in dem alle Rechnungen nach dem neuen indisch-arabischen Verfahren aber mit griechischen Buchstabenziffern und einer Null (= „·“) durchgeführt werden.

K. Vogel.

Boyer, C. B.: An early reference to division by zero. Amer. math. Monthly 50, 487—491 (1943).

Boyer, Carl B.: Zero: the symbol, the concept, the number. Nat. Math. Mag. 18, 323—330 (1944).

Boyer, Carl B.: Early graphical solutions of polynomial equations. Scripta math. 11, 5—19 (1945).

Boyer, Carl B.: Historical stages in the definition of curves. Nat. Math. Mag. 19, 294—310 (1945).

Sarton, George: Remarks on the study of Babylonian mathematics. Isis 31, 398—404 (1940).

Vygodskij, M.: Mathematik der alten Babylonier. Uspechi mat. Nauk 7, 102—153 (1940); 8, 293—335 (1941) [Russisch].

● Sanchez Perez, Jose Augusto: Die Arithmetik in Babylonien und Ägypten. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Cientificas 1943. 72 p. [Spanisch].

Chatley, Herbert: Ancient Egyptian star tables and the dekans. Observatory 65, 121—125 (1943).

(1) Neugebauer, O.: The history of ancient astronomy: problems and methods. J. Near Eastern Studies 4, 1—38 (1945).

(2) Neugebauer, O.: Studies in ancient astronomy. VII. Magnitudes of lunar eclipses in Babylonian mathematical astronomy. Isis 36, 10—15 (1945).

(3) Van der Waerden, B. L.: Die Astronomie des Heraklides von Pontos. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 96, 47—56 (1944).

(4) Rome, A.: Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste. III. Théon d'Alexandrie. Commentaire sur les livres 3 et 4 de l'Almageste. Studi e Testi 106. Roma: Biblioteca Apostolica Vaticana 1943. XXVI, 279 p. (S. CXV—CXL, 807—1085).

(1): Überblick über Methoden und Probleme der antiken Astronomie.  
(2): Teil VI s. dies. Zbl. 19, 99. Anschließend an „Untersuchungen zur antiken Astronomie III“ (dies. Zbl. 18, 49) des Verf. werden die Untersuchungen über Einzelprobleme der babylonischen Astronomie fortgesetzt. Es ergibt sich dabei erneut, daß in der späteren babylonischen Astronomie hochentwickelte mathematische Methoden zur Anwendung kamen und daß insbesondere die Mondtheorie im 2. vorchristlichen Jahrhundert auf einer Höhe stand, wie wir sie in der Antike nur in den Werken der griechischen mathematischen Astronomie kennen. Wichtig ist die vom Verf. erreichte Klärung der bei den Mondephemeriden verwendeten



Maße. — Zu (3) siehe des Verf. umfassendere Arbeit: „Die Astronomie der Pythagoreer“ (dies. Zbl. 43, 242). — A. Rome setzt seine Gesamtausgabe der Almagestkommentare mit der Herausgabe der Theonischen Kommentare zum 3. und 4. Buch fort. Bisher sind die Kommentare von Pappos zum 5. und 6. Buch (Teil I, s. dies. Zbl. 3, 98) sowie die von Theon zum 1. und 2. Buch (Teil II, s. dies. Zbl. 16, 385) erschienen. K. Vogel.

● Neugebauer, O. and A. J. Sachs: *Mathematical cuneiform texts. With a chapter by A. Goetze.* (American Oriental Series, Vol. 29.) New Haven, Conn.: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research 1945. X, 177 p., and 49 plates. \$ 5,00.

Alle bisher unveröffentlichten babylonischen mathematischen Texte, die seit der Herausgabe der „Mathematischen Keilschrifttexte“ Neugebauers (dies. Zbl. 12, 97; 15, 147) aufgefunden wurden (vor allem von A. Goetze und F. J. Stephens) werden hier in Photos oder Kopien nebst Umschrift, Übersetzung und Kommentar zugänglich gemacht. Die Texte sind größtenteils altbabylonisch, nur wenige stammen aus der Seleukidenzeit, bis zu der keine Weiterentwicklung festzustellen ist mit Ausnahme von erweiterten Tabellen, was auf die wachsende Bedeutung der Astronomie zurückgeführt werden kann. Neben den bisher bekannten Problemgruppen erscheinen auch neue Typen. Bei den Tabellentexten solche für die Reziproken von „irregulären“ Zahlen (die nicht die Form  $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$  haben) sowie eine „Logarithmentafel“, die z. B. bei  $2^x = 64$  den Wert  $x = 6$  angibt. Bemerkenswert ist auch eine Liste von „Koeffizienten“. Durch einen solchen wird z. B. die Beziehung zwischen Volumen und Gewicht einer Ziegelmenge ausgedrückt. Neu ist auch eine Tabelle pythagoreischer Zahlentripel, deren Aufbau nach dem Euklidischen Bildungsgesetz ( $p^2 + q^2$ ,  $2pq$ ,  $p^2 - q^2$ ) angenommen wird. Demgegenüber hat seither E. Bruins einen anderen Erklärungsvorschlag gemacht (On Plimpton 322, dies. Zbl. 33, 49). Auf jeden Fall liegt ein weiteres Stück babylonischer „Zahlentheorie“ vor, das den älteren Pythagoreern zur Verfügung gestanden hat. Ein Kapitel widmet A. Goetze den akkadischen Dialekten in altbabylonischen mathematischen Texten. Hingewiesen sei noch auf die metrologische Tabelle im einleitenden Kapitel sowie auf die zahlreichen Verzeichnisse, insbesondere auf das ausführliche Vokabular. K. Vogel.

(1) Sachs, A. J.: Some metrological problems in Old-Babylonian mathematical texts. Bull. Amer. Schools of Oriental Research Nr. 96, 29—39 (1944).

(2) Sachs, A.: Notes on fractional expressions in old Babylonian mathematical texts. J. Near Eastern Studies 5, 203—214 (1946).

(3) Gandz, Solomon: Studies in Babylonian mathematics. II. Conflicting interpretations of Babylonian mathematics. Isis 31, 405—425 (1940).

(4) Gandz, Solomon: Studies in Babylonian mathematics. III. Isoperimetric problems and the origin of the quadratic equations. Isis 32, 101—115 (1947).

(1): Behandlung der babylonischen Raummaße und Verbesserungsvorschläge für die Größe einiger dabei auftretenden Einheiten (Inhalt eines Frachtkahns und eines Ziegelhaufens). — (2): Feststellung der Verwendung von Einheitsbrüchen an Stelle der sonst bei den Babyloniern üblichen Sexagesimalbrüche. — Bei den „gegensätzlichen Auslegungen“ von S. Gandz (3) handelt es sich um eine Gegenüberstellung der verschiedenartigen Wiedergabe babylonischer Texte durch O. Neugebauer und F. Thureau-Dangin sowie um Verbesserungen, die Thureau-Dangin bei einigen von Neugebauer edierten Aufgaben vorschlug. — In (4) behandelt Gandz zuerst die isoperimetrischen Spekulationen der Antike, untersucht dann den Ursprung der quadratischen Gleichungen bei den Babyloniern und skizziert die verschiedenen Entwicklungsstufen der Behandlung



dieser Gleichungen von den Ägyptern an bis zu Abū Kāmil, bei dem sich die Synthese zwischen griechischer Geometrie und alter orientalischer Algebra vollzieht.  
K. Vogel.

Bruins, E. M.: Über die Approximation von  $\pi/4$  in der ägyptischen Geometrie. Nederl. Akad. Wet., Proc. 48, 206—210 = Indagationes Math. 7, 11—15 (1945) [Holländisch].

Dehn, Max: Mathematics, 600 B. C.—400 B. C., 400 B. C.—300 B. C., 300 B. C.—200 B. C., 200 B. C.—600 A. C. Amer. math. Monthly 50, 357—360, 411—414 (1943); 51, 25—31, 149—157 (1944).

Bell, Eric Temple: Sixes and sevens. Scripta math. 9, 209—231 (1943); 10, 81—147 (1944); 11, 21—50, 139—171 (1945); 12, 53—60 (1946).

● Sanchez Perez, Jose Augusto: Die Arithmetik in Griechenland. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Cientificas 1946. 260 p. [Spanisch].

Richards, John F. C.: A new manuscript of arithmomachia. Scripta Math. 9, 87—99, 169—183, 256—264 (1943).

Levi, B., Pedro Capelli und Mischa Cotlar: Die Ursprünge der Theorie des Wronskischen Algorithmus in der pythagoreischen Lehre. Math. Notae 3, 74—100 (1943) [Spanisch].

Levi, B.: Das Archimedische Postulat. Von Euklid zu Galilei: moderne Begriffe. Math. Notae 2, 109—141 (1942) [Spanisch].

Beumer, M. G.: Archimedes und die Dreiteilung des Winkels. Nieuw Tijdschr. Wiskunde 33, 281—287 (1946) [Holländisch].

● Luře, S. Ja.: Archimedes. (Populär-wissenschaftliche Reihe von Biographien.) Moskau-Leningrad: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1945. 272 S. [Russisch].

Neugebauer, O.: Archimedes and Aristarchus. Isis 34, 4—6 (1942).

Frajese, Attilio: Su un passo geometrico controverso del „Menone“. Boll. Un. mat. Ital., II. Ser. 5, 182—189 (1943).

Wavre, Rolin: Les apories de Zénon d'Elée. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, 123—127. Zürich: Füssli 1945.

Smyly, J. G.: Square roots in Heron of Alexandria. Hermathena 63, 18—26 (1944).

Langer, R. E.: Alexandria-shrine of mathematics. Amer. math. Monthly 48, 109—125 (1941).

Burton, Harry Edwin: The optics of Euclid. J. opt. Soc. Amer. 35, 357—372 (1945).

Erhardt, Rudolf von and Erika von Erhardt-Siebold: The helix in Plato's astronomy. Isis 34, 108—110 (1942).

Rufus, W. Carl: Greek astronomy — its birth, death, and immortality. J. roy. astron. Soc. 38, 143—153 (1944).

(1) Fritz, Kurt von: The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. Ann. of Math., II. Ser. 46, 242—264 (1945).

(2) Tannery, Paul et H. G. Zeuthen: Trois lettres inédites de la correspondance Paul Tannery — H. G. Zeuthen. Revue sci. 80, 99—103 (1942).

(3) ● Cherniss, Harold: The riddle of the early academy. Berkeley and Los Angeles: University of California Press 1945. VI, 103 p.; \$ 1,50.

(4) Waerden, B. L. van der: Die Harmonielehre der Pythagoreer. Hermes 78, 163—199 (1943).

● (5) Rey, Abel: L'apogée de la science technique grecque. Les sciences de la nature et de l'homme. Les mathématiques d'Hippocrate à Platon. Paris: Éditions Albin Michel 1946. XVIII, 313 p.; Fr. 190.



Von Fritz behandelt die für die Entwicklung der griechischen Mathematik entscheidende Periode der Entdeckung des Irrationalen, über deren zeitliche Einstufung keine Übereinstimmung herrscht. Unter Heranziehung aller — meist späten — Quellen kommt Verf. zu dem Ergebnis, daß nicht erst am Anfang des 4. Jhs., wie es z. B. E. Frank („Platon und die sogenannten Pythagoreer“, Halle 1923) vorschlug, sondern bereits um 450 die entscheidenden Schritte durch Hippasos von Metapontum getan wurden. Es wird wahrscheinlich gemacht, daß die Erkenntnis der Inkommensurabilität zwischen Seite und Diagonale des regulären Fünfecks an den Anfang der Entwicklung der Theorie zu setzen ist, und daß die damalige elementare (nicht „triviale“) Mathematik über die dabei notwendigen Kenntnisse verfügte. Es wird weiterhin gezeigt, daß man den Beweis für die Inkommensurabilität mit Hilfe der Methode der „Wechselwegnahme“ führen konnte; freilich ist deren erstes Auftreten zeitlich nicht festgelegt. — (2): Probleme der griechischen Kegelschnittlehre sowie Konstruktionen vermittelt von Einschiebungen. — (3): Platon scheint in seiner Vorlesung „Über das Gute“, von der nur Fragmente erhalten sind, sich über seine wissenschaftliche Erkenntnislehre geäußert zu haben. Über deren Inhalt sind vielfache Vermutungen angestellt worden. Cherniss kommt in seiner Untersuchung zu dem Ergebnis, daß in den erhaltenen Dialogen alles Wesentliche über Platons Ideenlehre niedergelegt ist. — (4): Entwicklung der Harmonielehre von den älteren Pythagoreern über Archytas bis zu Ptolemaios. Dabei werden die mit dem akustischen Problem in enger Beziehung stehenden arithmetischen und zahlentheoretischen Erkenntnisse in eine historische Ordnung gebracht. — (5): Der nach dem Tode von A. Rey als Manuskript gedruckte vorliegende 1. Teil des 4. Bandes seines Werkes: „La science dans l'Antiquité“ (3. Band: La Maturité de la Pensée Scientifiques en Grèce, Paris 1939) behandelt in dem der Mathematik gewidmeten Abschnitt (S. 187—303) die Entwicklung von Theodoros bis Platon. Die Darlegungen stimmen vielfach nicht mehr mit dem derzeitigen Stand der Forschung überein. *K. Vogel.*

**Tibiletti, C.: Sul problema di Appollonio: La soluzione di Pappo.** Periodico Mat., IV. Ser. 24, 100—111 (1946).

**Carmody, Francis J.: Thabit b. Qurra. Four astronomical tracts in latin,** Berkeley, Calif.: 1941. 28 p.

**Cchakaja, D. G.: Die Trigonometrie der Völker des nahen Ostens in einem der georgischen Denkmäler der astronomischen Literatur.** Trudy Tbilissk. mat. Inst. 13, 207—219 (1944) [Georgisch mit russischer Zusammenfassg.].

**Hijāb, Muhammad 'Alī and Subhī Sidrāk: Studien über al-Khāzini und sein Buch „Waage der Weisheit“.** Proc. mat. phys. Soc. Egypt 2, Nr. 1, S. 1—15 (1941) [Arabisch].

● **Nallino, Carlo Alfonso: Raccolta di scritti editi e inediti. Vol. V. Astrologia, Astronomia, Geografia.** Roma: Istituto per l'Oriente 1944. III, 558 p.; 600 Lire.

Die von Carmody herausgegebenen vier lateinischen Texte, die Thābit ibn Qurra zugeschrieben werden, behandeln die Praecession sowie Größe und Abstand der Himmelskörper, geben ferner eine Einführung in die sphärische Astronomie und bringen Bemerkungen zur Lektüre von Ptolemaios. — Cchakaja untersucht die georgische Übersetzung eines trigonometrischen Werkes von Ulug Beg. — Hijāb und Sidrāk bringen Auszüge aus al-Khāzini's Buch „Waage der Weisheit“, einem der bedeutendsten mittelalterlichen Werke über Physik und Mechanik. — Der von Maria Nallino herausgegebene 5. Band der Sammlung von Arbeiten ihres Vaters enthält u. a. Biographien arabischer Astronomen, terminologische Untersuchungen, vor allem aber eine italienische Übersetzung der in Arabisch erschienenen „Geschichte der Astronomie bei den Arabern im Mittelalter“ (Rom 1911—12).

*K. Vogel.*



Schröbler, Ingeborg: Die St. Galler Wissenschaft um die Jahrtausendwende und Gerbert von Reims. Z. f. deutsches Altertum und deutsche Literatur 81, 32—43 (1944).

Verf. untersucht die Zeugnisse über mathematische Studien in St. Gallen durch Ekkehart IV und Notker III. Dabei treten Beziehungen zu Gerbert und seine Schüler klar zu Tage.

K. Vogel.

(1) ● Erhardt-Siebold, Erika von and Rudolf von Erhardt: The astronomy of Johannes Scotus Erigena. Baltimore, Md.: Williams and Wilkins 1940. VI; 69 p.

(2) ● Erhardt-Siebold, Erika von and Rudolf von Erhardt: Cosmology in the „Annotationes in Marcianum“. More light on Erigena's astronomy. Baltimore, Md.: Williams and Wilkins 1940. VI; 45 p.

(3) Neubauer, F. J.: An old astronomical manuscript. Publ. astr. Soc. Pacific. 55, 145—146 (1943).

(4) ● Zeller, Mary Claudia: The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus. — Diss. University of Michigan 1944. VI, 119 p. 40 plates, 134 fig.

In (1) wenden sich Verf. gegen die Auslegung einer Stelle (in: De divisione naturae), die man vielfach als Vorwegnahme des Planetensystems von Tycho Brahe gedeutet hat. (2) behandelt den anonymen Kommentar zu Marcianus Capella „De nuptiis philologiae et Mercurii“, der in einer Hs. des 9. Jhs. erhalten ist. Es wird wahrscheinlich gemacht, daß Erigena der Verf. ist. — (3) handelt von einer Anfang des 15. Jhs. gefertigten Abschrift einer astronomischen Abhandlung Sacroboscus (13. Jh.) über Kalenderberechnung u. a. — Die von L. C. Karpinski geförderte Dissertation von Sister Zeller schildert die Beziehungen von Regiomontanus zu seinen Vorgängern, seine Einwirkung auf Copernicus sowie die weitere Entwicklung der Trigonometrie über Rheticus bis zum Anfang des 17. Jahrhunderts. Bei Pitiscus (1600) liegt bereits eine systematische moderne Darstellung vor.

K. Vogel.

Karpinski, Louis C.: The place of trigonometry in the development of mathematical ideas. Scripta math. 11, 268—272 (1945).

Karpinski, Louis Charles: Bibliographical check list of all works on trigonometry published up to 1700 A. D. Scripta math. 12, 267—283 (1946).

Karpinski, Louis C.: Algebraic works to 1700. Scripta Math. 10, 149—169 (1944).

Charadze, A. K.: Über eine Modifikation der Huddeschen Methode und der Cardanischen Formel. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 4, 195—199 (1943) [Russisch mit Georgischer Zusammenfassg.].

Conte, Luigi: Esiste un „metodo di Cartesio“ per la risoluzione dell'equazione biquadratica? Periodico Mat., IV. Ser. 23, 1—11 (1943).

Verf. betont gegenüber G. Candido (dies. Zbl. 24, 243) Wert und Eigenart der Cartesischen Methode zur Auflösung der Gleichung 4. Grades, die nicht etwa als Plagiat an Ferrari, sondern als geschickte Weiterführung dieser Vorlage anzusehen ist.

J. E. Hofmann.

Smith, David Eugene: Francisco Vieta, 1540—1603. Bol. mat. 13, 221—223 (1940) [Spanisch].

Sleight, E. R.: Early English arithmetics. Nat. Math. Mag. 16, 243—251 (1942).

Sleight, E. R.: John Napier and his logarithms. Nat. Math. Mag. 18, 145—152 (1944).

Bell, E. T.: The golden and platinum proportions. Nat. Math. Mag. 19, 21—26 (1944).

Procissi, A.: Sui primi sistemi lineari, sulla „regula modi“ di Cardano, e sul metodo di addizione di Buteone. Periodico Mat., IV. Ser. 24, 141—151 (1946).

Loria, Gino: Perfectionnements, évolution, métamorphoses du concept de „coordonnées“. Contribution à l'histoire de la géométrie analytique. *Mathematica, Timișoara* 21, 66—83 (1945).

Rosenblatt, Alfred: Kopernikus' Stellung in der Geschichte der Wissenschaft. *Revista Ci., Lima* 45, 409—442 (1943) = *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima* 6, 165—198 (1943) [Spanisch].

Lundmark, Knut: Nicolaus Kopernikus (Kopernik) and his astronomical reformation. *Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl.* 14, Nr. 3, 22—39 (1945).

Karpinski, Louis C.: The progress of the Copernican theory. *Scripta math.* 9, 139—154 (1943).

Losada y Puga, Cristóbal de: Kopernikus. *Rev. Univ. Católica Perú* 11, 149—178 (1943) [Spanisch].

● Copernicus, Nicolaus: Über die Kreisbewegungen der Weltkörper. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., 1940. XVI. 363 S. Text u. 66 S. Anmerkungen.

McColley, Grant: George Valla: an unnoted advocate of the geo-heliocentric theory. *Isis* 33, 312—314 (1941).

● Warrain, Francis: Essai sur l'Harmonices Mundi ou Musique du Monde de Johann Kepler. I. Fondements mathématiques de l'harmonie. II. L'harmonie planétaire d'après Kepler adaptée à nos connaissances actuelles. (Actual sci. industr., Nr. 912, 913.) Paris: Hermann & Cie. 1942. 141 et 144 pp.

Viola, Tullio: Il contributo di Keplero alla teoria delle coniche. *Periodico Mat.*, IV. Ser. 24, 68—83 (1946).

Bortolotti, Ettore: La pubblicazione delle opere e del carteggio matematico di Paolo Ruffini. *Boll. Un. mat. Ital.*, II. Ser. 5, 114—120 (1943).

Losada y Puga, Christóbal de: Galileo. *Rev. Univ. Católica Perú* 10, 253—282 (1942) [Spanisch].

Armellini, G.: Galileo e l'astronomia. *Pubbl. Univ. cattolica S. Cuore, Milano*, V (Nel terzo centenario della morte di Galileo Galilei. Saggi e conferenze.) 20 77—95 (1943).

Marcolongo, R.: La meccanica di Galilei. *Pubbl. Univ. cattolica S. Cuore, Milano*, V (Nel terzo centenario della morte di Galileo Galilei. Saggi e conferenze.) 20, 29—57 (1943).

Persico, E.: Galileo e la fisica. *Pubbl. Univ. cattolica S. Cuore, Milano*, V (Nel terzo centenario della morte di Galileo Galilei. Saggi e conferenze.) 20, 59—76 (1943).

Romañá, Antonio: Das astronomische Werk Galileo Galileis. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 2, 125—178 (1942) [Spanisch].

Varetti, Carlo Vittorio: Contributo alla storia dell'ottica nella prima metà del secolo XVII dal cannocchiale di Galileo alle lenti del Torricelli. *Atti Secondo Congresso Un. mat. Ital.*, Bologna 1940, 572—581 (1942).

García de Zuñiga, E.: Galilei und die reine Mathematik. *Univ. nac. Litoral, Inst. Mat.*, Publ. 5, 171—174 (1945) [Spanisch].

Vonwiller, O. U.: Galileo and Newton: their times and ours. *J. Proc. roy. Soc. New South Wales* 76, 316—328 (1943).

Chant, C. A.: Isaac Newton: Born three hundred years ago. *J. roy. astron. Soc. Canada* 37, 1—16 (1943).

● Turnbull, H. W.: The mathematical discoveries of Newton. Glasgow: Blackie & Son 1945. VII, 68 p. 5 s.

Chant gibt einen allgemeinen Überblick, Turnbull eine vorzügliche Übersicht über die mathematischen Hauptleistungen Newtons einschließlich ihrer Vorgeschichte mit zahlreichen Textproben.

J. E. Hofmann.

Bell, E. T.: Newton after three centuries. Amer. math. Monthly 49, 553—575 (1942).

Losada y Puga, Cristóbal de: Die Dreihundertjahrfeier Newtons. Rev. Univ. Católica Perú 10, 479—480 (1942) [Spanisch].

Andrade, E. N. da C.: Newton and the science of his age. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 181, 227—243 (1943).

Jeans, James: Newton and the science of to-day. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 181, 251—262 (1943).

Brodetsky, S.: Newton: Scientist and man. Nature 150, 698—699 (1943).

Ferguson, Allan: Newton and the „Principia“. Philos. Mag., VII. Ser. 33, 871—888 (1942).

Kármán, Th. von: Isaac Newton and aerodynamics. J. aeronaut. Sci. 9, 521—522, 548 (1942).

Santaló, Luis A.: Isaac Newton und der binomische Lehrsatz. Math. Notae 2, 61—72 (1942) [Spanisch].

Rufus, W. Carl: David Rittenhouse as a mathematical disciple of Newton. Scripta Math. 8, 228—231 (1941).

Brasch, Frederick E.: James Logan, a colonial mathematical scholar, and the first copy of Newton's Principia to arrive in the colony. Proc. Amer. philos. Soc. 86, 3—12 (1942).

Planck, Max: In memoriam: Gottfried Wilhelm Leibniz zur 300. Wiederkehr seines Geburtstags (1. Juli 1646). Z. Naturforsch. 1, 298—300 (1946).

Mangeron, Dumitru Ion: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716). I. Mathematische Werke. Revista Sti. „V. Adamachi“ 32, 83—90 (1946) [Rumänisch].

Lindemann, Hans A.: Leibniz und die moderne Logik. An. Soc. ci. Argentina 142, 164—176 (1946) [Spanisch].

Gallego-Díaz, J.: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716). Gaz. Mat., Lisboa 7, Nr. 30, 3—4 (1946) [Spanisch].

Dehn, Max and E. D. Hellinger: Certain mathematical achievements of James Gregory. Amer. math. Monthly 50, 149—163 (1943).

Eingehende Darstellung der von Gregory benutzten Ansätze zur Reihenentwicklung (Interpolationsreihen, Potenzreihen) und der hierbei erhaltenen Ergebnisse, sowie der iterierten Wurzelapproximationen zur Berechnung der Segmente von Kreis, Ellipse und Hyperbel in der Vera circuli et hyperbolae quadratura von 1668.

J. E. Hofmann.

Turnbull, H. W.: James Gregory (1638—1675). St. Andrews: University of St. Andrews James Gregory Tercentenary 1939, 5—11.

Dugas, René: Le principe de la moindre action dans l'oeuvre de Maupertuis. Revue sci. 80, 51—59 (1942).

Scholz, Heinrich: Pascals Forderungen an die mathematische Methode. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, 19—33. Zürich: Füssli 1945.

Aus eingehender Untersuchung des Esprit géométrique (1655?) folgt: a) es handelt sich nicht um 2 getrennte Stücke, sondern um Fragmente zum nämlichen Gegenstand, die sich mit den Descartesschen Forderungen an die mathematische Methode weiterführend auseinandersetzen. b) Pascal fügt zur Aristotelischen Unbeweisbarkeit der Axiome die undefinierbarkeit der axiomatischen Terme und ahnt die grundsätzliche Entbehrlichkeit der Definitionen. Er sagt jedoch noch nichts über Begriff und Wesen der Deduktionen. c) Er leugnet die Existenzmöglichkeit einer „idealen“ mathematischen Methode neben der effektiven.

J. E. Hofmann.

Boyer, Carl B.: Pascal's formula for the sums of powers of the integers. Scripta math. 9, 237—244 (1943).



Chapman, S.: Blaise Pascal (1623—1662). Tercentenary of the calculating machine. *Nature* 150, 508—509 (1942).

Whitman, E. A.: Some historical notes on the cycloid. *Amer. math. Monthly* 50, 309—315 (1943).

Hofmann, Jos. E.: Neues über Fermats zahlentheoretische Herausforderungen von 1657 (mit zwei bisher unbekannten Originalstücken Fermats). *Abh. Preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl.* 1943, Nr. 9, 52 S. (1944).

Hofmann, Jos. E.: Studien zur Zahlentheorie Fermats. (Über die Gleichung  $x^2 = py^2 + 1$ .) *Abh. Preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl.* 1944, Nr. 7, 19 S. (1944).

Die erste der zahlentheoretischen Herausforderungen Fermats von 1657 an die mathematische Welt (insbes. Wallis, Frenicle, Schooten) forderte eine Kubikzahl zu finden, deren Teilersumme eine Quadratzahl, sowie eine Quadratzahl, deren Teilersumme eine Kubikzahl ist. Die zweite Herausforderung verlangt eine generelle Regel für die ganzzahlige Lösung der Fermatschen Gleichung  $ax^2 + 1 = y^2$  ( $a$  ganz, positiv und Nichtquadratzahl). Frenicle gibt im gleichen Jahr in seiner „*Solutio duorum problematum*“ die richtigen Lösungen, die er freilich nur seiner beispiellosen Rechentechnik und nicht einer Existenzbetrachtung verdankt. Verf. skizziert den Inhalt der „*Solutio*“ und rekonstruiert die vermutlichen Gedankengänge Frenicles, der selbst weitere Fragen (z. B. über Primzahlpotenzen) aufwirft. Die „*Solutio*“ gab Anlaß zu einer in Vergessenheit geratenen Schrift Fermats (*Supplement à l'Ecrit Latin de Monsieur Frenicle*), die Verf. im Anhang 1 wiedergibt. Fermat zeigt hier, daß nur für die Primzahl  $p = 7$  die Teilersumme von  $p^3$  eine Quadratzahl werden kann. Der Nachweis gründet sich auf den Satz, daß jede Primzahl von der Form  $8n \pm 1$  als  $2x^2 - y^2$  (z. B.  $7 = 2 \cdot 4^2 - 5^2$ ) dargestellt werden kann. Im Anhang 2 wird Fermats bisher völlig unbekannt gebliebene „*Animadversio in Geometriam Cartesii*“ ediert. Hier wendet sich Fermat gegen die unklare Art der Klassifizierung von Gleichungen und wirft die Frage nach Kegelschnitten höherer Ordnung auf. — Die zweite Arbeit untersucht die Fermatsche Gleichung. Auf Grund versteckter Hinweise Fermats, der seine Methoden nicht preisgibt, entwickelt Verf. ein Reduktionsverfahren, mit dem der Nachweis für die Lösung in teilerfremden positiven ganzen Zahlen geführt wird. Das Verfahren des Verf. ist ohne Zweifel anderen Lösungsmethoden (z. B. der Kettenbruchmethode) überlegen. *K. Vogel.*

Boyer, Carl B.: Fermat's integration of  $X^n$ . *Nat. Math. Mag.* 20, 29—32 (1945).

● Coolidge, Julian Lowell: A history of the conic sections and quadric surfaces. London: Oxford University Press 1945. XI, 214 p.; \$ 6,00.

Eine zusammenfassende geschichtliche Betrachtung der Kegelschnitte existierte bisher nur für die Antike (Zeuthen 1886). Hier wird zum ersten Mal die Gesamtentwicklung der Lehre von den Kegelschnitten und den Flächen 2. Ordnung bis auf die neueste Zeit von berufenster Seite behandelt. Zuerst schildert Verf. die griechischen Leistungen, dann das Wiedererwachen des Interesses an dem lange — von Pappus bis Werner (1504) — vergessenen und verschütteten Stoff (auf die Araber geht Verf. nicht ein). Es folgt eine eingehende Darstellung der beiden Richtungen, in denen sich die Weiterentwicklung (sich teils zeitlich ablösend, teils gleichzeitig nebeneinander hergehend) vollzieht: einmal die synthetisch-projektive von Desargues bis von Staudt, dann die algebraische, von Fermat und Descartes bis Euler. Schließlich werden die Fortschritte dargelegt, die sich nach Euler durch Verwendung neuer algebraischer Mittel, durch Erweiterung des Koordinatenbegriffes sowie durch die Schöpfung der Invariantentheorie ergaben.

*K. Vogel.*

Vries, Hk. de: Historische Studien. XXIV. Über die Berührungen und Schnitte von Kreisen und Kegelschnitten. *Nieuw Arch. Wiskunde* 33, 100—164 (1946) [Holländisch].



Ivins jr., William M.: A note on Girard Desargues. *Scripta math.* 9, 33—48 (1943).

Verf. berichtet zusammenfassend über die Schriften von Desargues und veröffentlicht die bis dahin unbekannten Originalfiguren zum Brouillon project. . . pour la coupe de pierres (1640) aus dem Exemplar des Metropol. Mus. of Art (New York).  
J. E. Hofmann.

Viola, T.: Per la storia del teorema di Desargues sui triangoli omologici. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. I, 570—575 (1946).

Ivins jr., William M.: Two first editions of Desargues. *Bull. Metrop. Mus. Art*, n. Ser. 1, 33—35 (1942) (10 plates).

Crawford, L.: Edward Waring, eighteenth century mathematician. *Trans. roy. Soc. South Africa* 29, 69—74 (1942).

Labra, Manuel: Biographische Note: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768—1830). *Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat.* 2, 24—26 (1945) [Spanisch].

● Sergescu, Petre: Eine Episode in dem Kampf für den Triumph der Differentialrechnung: der Rolle-Sourin-Streit 1702—1705. *Studien zum Gedächtnis des großen Nicolas Iorga*, 17 S. Bukarest, 1942 [Rumänisch].

Sergescu, Pierre: Sur l'identité des auteurs de quelques articles de mathématiques, publiés de 1692 à 1703 dans le *Journal des Savants*. *C. r. Acad. Sci., Paris* 214, 971—973 (1942).

Sergescu, P.: Sur l'identité des auteurs de quelques articles mathématiques, insérés dans „Le Journal des Savants“ 1684—1703. *An. Acad. Romane, mem. sect. ști.*, III. Ser. 17, Nr. 9, 21 p. (1942).

Krakeur, Lester Gilbert and Raymond Leslie Krueger: The mathematical writings of Diderot. *Isis* 33, 219—232 (1941).

Loria, Gino: Gli „Acta Eruditorum“ durante gli anni 1682—1740 e la storia delle matematiche. *Archeion* 23, 1—35 (1941).

Masotti, Arnaldo: Scritti inediti di Paolo Frisi. II. Giudizio del Frisi sul trattato meccanico-geometrico di Giambattista Suardi. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.*, 76 (III. Ser. 7), 301—315 (1943).

Green, H. Gwynedd and H. J. J. Winter: John Landen, F. R. S. (1719—1790) — mathematician. *Isis* 35, 6—10 (1944).

Ochakaja, D.: Über die mathematischen Kenntnisse in Georgien im XVIII. Jahrhundert. *Trudy Tbilissk. mat. Inst.* 9, 207—215 (1941). [Russisch mit deutsch. Zusammenfassg.]

Eulerus, Leonhardus: Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica. Vol. IV. *Commentationes Arithmeticae*. Vol. III. Edidit Rudolf Fueter. Auctoritate et impensis Societas Scientiarum Naturalium Helveticae. Zürich: Orell Füssli; Leipzig, Berlin: B. G. Teubner 1941. XXXIII, 431 S.

Eulerus, Leonhardus: Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica. Vol. V. *Commentationes Arithmeticae*. Vol. IV. Edidit Rudolf Fueter. Auctoritate et impensis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae. Zürich: Orell Füssli; Leipzig, Berlin: B. G. Teubner 1944. XLVII, 374 S.

Eulerus, Leonhardus: Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica. Vol. IV. *Instructio in analysi infinitorum*. Vol. II. Edidit Andreas Speiser. Auctoritate et impensis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae. Zürich: Orell Füssli 1945. I, 403 S.

Ackeret, J.: Leonhard Eulers letzte Arbeit. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, 160—168. Zürich: Füssli 1945.

Verf. behandelt das von Euler in der Note *Calculs sur les ballons aërostatiques* (Eneström Nr. 579) untersuchte Problem vom modernen Standpunkt aus und hebt die trotz unvollkommener Ausführung hohe wissenschaftliche Bedeutung der Eulerschen Arbeit hervor.  
J. E. Hofmann.

Nicolai, E. L.: Euler's works on the theory of struts. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski, Ser. mat. Nauk 8, 5—19 (1939) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.]

Spiess, O.: Über einige neu aufgefundenen Schriften der alten Basler Mathematiker. Verh. naturforsch. Ges. Basel 56, 86—111 (1945).

Spiess, Otto: Die Summe der reziproken Quadratzahlen. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, 66—86. Zürich: Füssli 1945.

Fleckenstein, J. O.: Die Taylorsche Formel bei Johann I. Bernoulli. Elemente Math. 1, 13—17 (1946).

Diese Studien sind im Zusammenhang mit den Vorbereitungen zur Bernoulli-Ausgabe entstanden. Spiess berichtet über die Genfer Handschrift 1607 mit Kopien nachgelassener Schriften von Basler Mathematikern, darunter Jak. Bernoullis Vorlesungen über Experimentalphysik (1683/90) und akademische Reden und Vorlesungen von J. Hermann (1707/33). Der Band stammt aus dem Nachlaß des Genfer Physikers J. Jallabert (1712/68), der die Stücke wahrscheinlich während seines Basler Studienaufenthaltes 1737/38 kopieren ließ und selbst kollationiert hat. — In der Studie über die Summe der reziproken Quadratzahlen berichtet Spiess über Eulers Entdeckung (1736) und die weiteren Ansätze Eulers (1737, 1738, 1772), N. Bernoullis (1737, 1750), D. Bernoullis (1772) und Landens (1760). — Was Fleckenstein über das Auftreten der sog. Taylor-Reihe bei Joh. Bernoulli sagt, müßte ergänzt werden durch die (erst seit 1939 allgemein zugänglichen) Ansätze J. Gregorys (seit 1668) und Leibniz' (seit 1673).

*J. E. Hofmann.*

Carathéodory, C.: Basel und der Beginn der Variationsrechnung. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser. 1—18. Zürich: Füssli 1945.

Verf. skizziert in diesem glänzend geschriebenen Überblick unter fortwährenden Verweisen auf Lagranges lichtvolle Urteile (1806) die Leistungen Jak. Bernoullis (1697, 1701), Joh. Bernoullis (1691, 1701, 1718) und Eulers (1729, 1732, 1736, 1744). In einem Anhang werden in moderner Form Jak. Bernoullis Ansätze, Joh. Bernoullis auf unsicherem Boden stehende Entwicklungen und Eulers Herleitung der Differentialgleichung der geodätischen Linien vorgeführt.

*J. E. Hofmann.*

● Lambert, Johann Heinrich: Iohannis Henrici Lamberti Opera Mathematica. Volumen Primum. Commentationes Arithmeticae, Algebraicae et Analyticae, Pars Prima. — Edidit Andreas Speiser. Zürich: Orell Füssli 1946. XXXI, 358 S. 25 Schweiz. Fr.

Dürr, Karl: Die Logistik Johann Heinrich Lamberts. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser. 47—65. Zürich: Füssli 1945.

Richeson, A. W.: Laplace's contribution to pure mathematics. Nat. Math. Mag. 17, 73—78 (1942).

Dugas, René: Sur la pensée dynamique d'Hamilton: origines optiques et prolongements modernes. Revue sci. 79, 15—23 (1941).

Bateman, H.: Hamilton's work in dynamics and its influence on modern thought. Scripta math. 10, 51—63 (1944).

Synge, J. L.: The life and early work of Sir William Rowan Hamilton. Scripta math. 10, 13—24 (1944).

Piaggio, H. T. H.: The significance and development of Hamilton's quaternions. Nature 152, 553—555 (1943).

MacDuffee, C. C.: Algebra's debt to Hamilton. Scripta math. 10, 25—35 (1944).

Whittaker, E. T.: The sequence of ideas in the discovery of quaternions. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 50, 93—98 (1945).

Quaternion centenary celebration. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 50, 69—75, 89—92 (1945).

Birkhoff, George D.: Sir Joseph Larmor and modern mathematical physics. *Science*, n. Ser. 97, 77—79 (1943).

Bell, E. T.: Gauss and the early development of algebraic numbers. *Nat. Math. Mag.* 18, 188—204, 219—223 (1944).

McConnell, A. J.: The Dublin mathematical school in the first half of the nineteenth century. *Proc. roy. Irish Acad., Sect. A* 50, 75—88 (1945).

Sarton, Georges: Grassmann — 1844. *Isis* 35, 326—330 (1945).

Hjelmslev, Johannes: Hieronymus Georg Zeuthen. Address given before the Matematisk Forening on the occasion of the celebration of the 100th birthday of H. G. Zeuthen. *Mat. Tidsskr. A* 1939, 1—10 (1939) [Dänisch].

● Lobachevskij, N. I.: Geometrische Untersuchungen über die Theorie der Parallelen. — Übersetzung, Kommentar, Einführung und Anmerkungen von V. F. Kagan. Moskau-Leningrad: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1945. 176 S. [Russisch].

Aleksandrov, P. S.: Lobachevskij und die russische Zivilisation. *Vestnik Akad. Nauk SSSR* 1943, Nr. 11—12, 52—62 (1943) [Russisch].

● Aleksandrov, P. S. und A. N. Kolmogorov: Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, 1793—1943. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1943. 100 S. [Russisch].

● Kagan, V. F.: Lobachevskij. (Wissenschaftlich-populäre Reihe von Biographien.) Moskau-Leningrad: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1944. 347 S. [Russisch].

Duarte, F. J.: Über die nichteuklidischen Geometrien. Geschichtliche und bibliographische Noten. *Estados Unidos de Venezuela, Bol. Acad. Ci. Fís. Mat. Nat.* 9, 1—67 (1945). *Revista Acad. Colombiana Ci. exact. fis. natur.* 7, 63—81 (1946) [Spanisch].

Mira Fernandes, A. de: Sophus Lie. *Gaz. mat., Lisboa* 3, Nr. 12, 1—2 (1942) [Portugiesisch].

Dugas, René: Sur l'origine du théorème de Coriolis. *Revue sci.* 79, 267—270 (1941).

● Karpinski, L. C.: Bibliography of mathematical works printed in America through 1850. *Ann. Arbor, Mich.: University of Michigan Press* 1940. XXVI, 697 p. \$ 6.00.

Karpinski, Louis C.: Supplement to the bibliography of mathematical works printed in America through 1850. *Scripta math.* 8, 233—236 (1941).

Archibald, Raymond Clare: Mathematical table makers — portraits, paintings, busts, monuments, bio-bibliographical notes. I. II. *Scripta math.* 11, 213—245 (1945); 12, 15—51 (1946).

Higgins, T. J.: Biographies and collected works of mathematicians. *Amer. math. Monthly* 51, 433—445 (1944).

● Ioffe, A. F. (herausgegeben von): Skizze der Geschichte der Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Wissenschaften. Moskau-Leningrad: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1945. 78 S. [Russisch].

220th Anniversary of the Academy of Sciences of the USSR and the development of the science of mechanics. *Priklad. Mat. Mech.* 9, 185—192 (1945) [Russisch und Englisch].

Whittaker, E. T.: Aristotle, Newton, Einstein. *Philos. Mag., VII. Ser.* 34, 266—280 (1943).

Whittaker, E. T.: Aristotle, Newton, Einstein. *Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A* 61, 231—246 (1942).

Nachruf: Stefan Banach. *Uspechi mat. Nauk, n. Ser.* 1, Nr. 3—4 (13—14), 13—16 (1946) [Russisch].

Bell, E. T.: Obituary: Harry Bateman. *Quart. appl. Math.* 4, 105—111 (1946).



**Baker, H. F.:** Obituary: Geoffrey Thomas Bennett. J. London math. Soc. 19, 107—128 (1944).

**Baker, H. F.:** Obituary: Geoffrey Thomas Bennett. 1868—1943. Obit. Notices roy. Soc. London 4, 597—615 (1944).

**Kuzmin, R. O.:** Das mathematische Werk von S. N. Bernštejn. Uspechi mat. Nauk 8, 3—7 (1941) [Russisch].

**García, Godofredo:** Das wissenschaftliche Werk von Prof. George D. Birkhoff. Revista Ci. 44, 187—232 (1942) [Spanisch].

**García, Godofredo:** Nachruf: George D. Birkhoff. Revista Ci. 46, 675—677 (1944) — Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 7, 435—437 (1944) [Spanisch].

**Hadamard, Jacques:** Obituary: George David Birkhoff. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 719—721 (1945).

**Kosambi, D. D.:** Obituary: George David Birkhoff. 1884—1944. Math. Student 12, 116—120 (1945).

**Langer, R. E.:** Obituary: George David Birkhoff. Trans. Amer. math. Soc. 60, 1—2 (1946).

**Morse, Marston:** George David Birkhoff and his mathematical work. Bull. Amer. math. Soc. 52, 357—391 (1946).

**Nachruf:** George David Birkhoff. Bol. Soc. mat. Mexicana 2, Nr. 1/2, 15—18 (1945) [Spanisch].

**Nachruf:** George David Birkhoff (1884—1944). Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 2, 28—29 (1945) [Spanisch].

**Rey Pastor, J.:** Professor George D. Birkhoff und sein Einfluß in Argentinien. Revista Un. mat. Argentina 10, 65—68 (1945) — Rev. Ci. 47, 105—109 (1945) — Gaz. Mat., Lisboa 6, Nr. 26, 12—13 (1945) [Spanisch].

**Whittaker, E. T.:** Obituary: George David Birkhoff. J. London math. Soc. 20, 121—128 (1945).

**Wilson, Edwin B.:** Obituary: George David Birkhoff. Science, n. Ser. 102, 578—580 (1945).

**Obituary:** Oskar Bolza. Science, n. Ser. 97, 108—109 (1943).

● **Selecta. Jubilé scientifique de M. Émile Borel.** Paris: Gauthier-Villars 1940. 418 p.

**Schmidt, Erhard:** Constantin Carathéodory zum 70. Geburtstag. Forsch. Fortschritte 19, 249—250 (1943).

**Bibliographie der Schriften von Professor C. Carathéodory.** Bull. Soc. math. Grèce 22, 198—207 (1946).

● **Bernstejn, S. N. (herausgegeben von):** Das wissenschaftliche Vermächtnis von P. L. Cebyšev. Teil 1. Mathematik. Moskau-Leningrad: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1945. 174 S. [Russisch].

**Steklov, V. A.:** Theorie und Praxis in Cebyševs Forschungen. Uspechi mat. Nauk, n. Ser. 1, Nr. 2 (12), 4—11 (1946) [Russisch].

**Biography:** S. A. Chaplygin's fifty years of outstanding works as research scientist. Priklad. Mat. Mech. 5, 131—148 (1941) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

**Nachruf:** S. A. Chaplygin (Čaplygin). Vestnik Akad. Nauk SSSR 1942, 86—90 (1942) [Russisch].

**Levi, B.:** Nachruf: Federigo Enriques. Math. Notae 6, 119—123 (1946) [Spanisch].

**Chapman, S. and E. T. Whittaker:** Obituary: Prof. A. R. Forsyth, F. R. S. Nature 150, 49—50 (1942).



Neville, E. H.: Obituary: Andrew Russell Forsyth. 1858—1942. J. London math. Soc. 17, 237—256 (1942).

Whittaker, E. T.: Obituary: Andrew Russell Forsyth. 1858—1942. Obit. Notices roy. Soc. London 4, 209—227 (1942).

Dingle, Herbert: Obituary: Alfred Fowler. 1868—1940. Observatory 63, 262—267 (1940).

Milne, E. A.: Obituary: Ralph Howard Fowler. 1889—1944. Obit. Notes roy. Soc. London 5, 61—78 (1945).

Milne, E. A.: Obituary: Ralph Howard Fowler. J. London math. Soc. 19, 244—256 (1944).

Terracini, Alejandro: Nachruf: Guido Fubini. 1879—1943. Revista Un. mat. Argentina 10, 27—30 (1944) [Spanisch].

The list of mathematical papers by Prof. M. Fujiwara. Tôhoku math. J. 49, 133—138 (1942).

Biography: On the seventieth anniversary of the birth of B. G. Galerkin. Priklad. Mat. Mech. 5, 331—334 (1941) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Nachruf: Nil Aleksandrovic Glagolev (1888—1945). Uspechi mat. Nauk, n. Ser. 1, Nr. 2 (12), 43—47 (1946) [Russisch].

Kolmogorov, A.: Nachruf: Valerij Ivanovic Glivenko. Uspechi mat. Nauk 8, 379—383 (1941) [Russisch].

Ljusternik, L.: Nachruf: Dmitrij Aleksandrovic Grave. (1863—1939). Uspechi mat. Nauk 8, 377—378 (1941) [Russisch] (1 Tafel).

Smirnov, V. I. und S. L. Sobolev: Nachruf: Nikolaj Maksimovic Gjunter. 1871—1941. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 5, 193—197; Schriftenverzeichnis: 197—202 (1941) [Russisch].

Moore, Charles N.: Obituary: Harris Hancock, in memoriam. Bull. Amer. math. Soc. 50, 812—815 (1944).

Archibald, R. C.: Obituary: Thomas Little Heath. Math. Gaz. 24, 234—237 (1940).

Ford, W. B.: Obituary: Earle Raymond Hedrick. Amer. math. Monthly 50, 409—411 (1943).

Carathéodory, Constantin: David Hilbert (Nachruf). S.-Ber. math.-natur. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1943, 350—354 (1944).

Machado, Bernardino: David Hilbert. Gaz. mat., Lisboa 4, Nr. 14, 1—2 (1943) [Portugiesisch].

Sommerfeld, A.: Zum Andenken an David Hilbert. Naturwissenschaften 31, 213—214 (1943).

van Veen: In memoriam David Hilbert (1862—1943). Mathematica, Zutphen, B 11, 159—169 (1943) [Holländisch].

Weyl, Hermann: Obituary: David Hilbert. 1862—1943. Obit. Notices roy. Soc. London 4, 547—553 (1944).

Weyl, Hermann: David Hilbert and his mathematical work. Bull. Amer. math. Soc. 50, 612—654 (1944).

Carleman, Torsten: Annonce de la mort de Erik Albert Holmgren. Acta Math. 76, I—III (1945) [Mit Schriftenverzeichnis].

Young, A. W.: Obituary: Edward Lindsay Ince, M. A., D. Sc., F. R. S. E. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 6, 263—264 (1941).

Obituary: Nikolaj Evgrafovich Korin (Nikolai Kochin). Priklad. Mat. Mech. 9, 3—12 (1945) [Russisch und Englisch].

Ljusternik, L. A.: Nachruf: Aleksej Nikolaevič Krylov (1863—1945). Uspechi mat. Nauk, n. Ser. 1, Nr. 1 (11), 3—10 (1946) [Russisch].

Smirnov, V. I.: Das wissenschaftliche Werk von Aleksej Nikolaevič Krylov. Uspechi mat. Nauk, n. Ser. 1, Nr. 3/4 (13/14), 3—12 (1946) [Russisch].

- Mikami, Yoshio: On Narikiyo Kuroda and surveying. Tôhoku math. J. 49, 223—242 (1943) [Japanisch].
- Comrie, P.: Obituary: George Lawson, M. A. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 6, 261—262 (1941).
- Burkill, J. C.: Obituary: Henri Lebesgue. 1875—1941. Obit. Notices roy. Soc. London 4, 483—490 (1944).
- Burkill, J. C.: Henri Lebesgue. J. London math. Soc. 19, 56—64 (1944).
- Fayet, J.: Nachruf: Henri Lebesgue. 1876—1941. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 1, 195—197 (1941) [Spanisch].
- Fehr, H.: Henri Lebesgue. 1875—1941. Enseignement math. 38, 330—332 (1942).
- Rosenblatt, Alfred: Zum Tode von Henri Lebesgue. Revista Ci. 44, 357—364 (1942) [Spanisch].
- Sergescu, Petre: Leben und mathematisches Werk Henri Lebesgue's. Monograf. mat., Sem. mat. Univ. Cluj 7, 15—23 (1942) [Rumänisch].
- Vicente Gonçalves, J.: Henri Lebesgue. Gaz. mat., Lisboa 3, Nr. 12. 2—3 (1942) [Portugiesisch].
- Amaldi, U.: Commemorazione del socio Tullio Levi-Civita. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 1130—1155 (1946).
- Buhl, A.: Tullio Levi-Civita. 1873—1941. Enseignement math. 38, 350—351 (1942).
- Cartan, Élie: Notice sur M. Tullio Levi-Civita. C. r. Acad. Sci., Paris 215, 233—235 (1942).
- Hodge, W. V. D.: Obituary: Tullio Levi-Civita. 1873—1941. Obit. Notices roy. Soc. London 4, 151—165 (1942).
- Hodge, W. V. D.: Obituary: Tullio Levi-Civita. J. London math. Soc. 18, 107—114 (1943).
- Levi, B.: Zum Tode von Tullio Levi-Civita (1873—1941). Math. Notae 2, 155—159 (1942) [Spanisch].
- Tullio Levi-Civita. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 25, III—VIII (1946).
- Roth, L.: Obituary: Prof. T. Levi-Civita, For. Mem. R. S. Nature 149, 266 (1942).
- Ruse, H. S.: Obituary: Tullio Levi-Civita. Edinburgh math. Notes Nr. 33, 19—24 (1943).
- Obnorskij, S. P.: Boris Michailovič Ljapunov. Vestnik Akad. Nauk SSSR 1942, 83—85 (1942) [Russisch].
- Milne, E. A.: Obituary: Augustus Edward Hough Love. 1863—1940. J. London math. Soc. 16, 69—78; list of publications, 78—80 (1941).
- Milne, E. A.: Obituary: Augustus Edward Hough Love. 1863—1940. Obit. Notices roy. Soc. London 3, 467—479; list of publications, 480—482 (1941).
- Whitmore, Charles E.: Mill and mathematics: an historical note. J. Hist. Ideas 6, 109—112 (1945).
- Mangeron, Dumitru Ion: Das wissenschaftliche Werk von Gustav Magnus Mittag-Leffler. Revista mat. Timișoara 26, 8 S. (1946) [Rumänisch].
- Phillips, H. B.: Obituary: Frank Morley (1860—1937). Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 73, 138—139 (1939).
- Dougall, John: Obituary: Robert Franklin Muirhead, B. A., D. Sc. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 6, 259—260 (1941).
- Biography: The sixtieth anniversary of the birth of Professor Doctor E. L. Nicolai. Priklad. Mat. Mech. 5, 3—10 (1941) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.] (1 Tafel).

Birkhoff, George D.: Obituary: William Fogg Osgood. *Scientific Monthly* 57, 466—469 (1943).

Coolidge, Julian L., George D. Birkhoff and Edwin C. Kemble: Obituary: William Fogg Osgood. *Science* 98, 399—400 (1943).

Koopman, Bernard Osgood: Obituary: William Fogg Osgood — in memoriam. *Bull. Amer. math. Soc.* 50, 139—142 (1944).

Keyser, Cassius Jackson: Charles Sanders Peirce as a pioneer. *Galois Lectures, Scripta Mathematica Library*, Nr. 5, 87—112 (1941).

Bouligand, Georges: Émile Picard. *Revue génér. Sci. pures appl.* 52, 1—3 (1942).

Buhl, A.: Émile Picard. 1856—1941. *Enseignement math.* 38, 348—350 (1942).

Broglie, Louis de: La vie et l'oeuvre de M. Émile Picard. *Mém. Acad. Sci. Inst. France*, II. Sér. 66, 45 p. (1943).

Hadamard, J.: Obituary: Émile Picard. 1856—1941. *Obit. Notices roy. Soc. London* 4, 129—150 (1942).

Hadamard, J.: Obituary: Émile Picard. *J. London math. Soc.* 18, 114—128 (1943).

Lefort, Guy: Nachruf: Émile Picard. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 5, 147—151 (1945) [Spanisch].

Mandelbrojt, S.: Obituary: Émile Picard. 1856—1941. *Amer. math. Monthly* 49, 277—278 (1942).

Rosenblatt, Alfred: Zum Tode von Émile Picard. *Revista Ci.* 44, 311—356 (1942) [Spanisch].

Burkill, J. C.: Obituary: Samuel Pollard. *J. London math. Soc.* 20, 189—192 (1945).

Onicescu, O.: D. Pompeiu. *Mathematica, Timișoara* 19, 12—15 (1943).

Narayan, Lakshmi: Obituary notice. Ganesh Prasad. *Proc. Benares math. Soc.* 1, 107—114 (1939).

Stepanov, V.: Nachruf: Ivan Ivanovic Privalov. 1891—1941. *Izvestija Akad. Nauk SSSR. Ser. mat.* 5, 389—391; *Schriftenverzeichnis* 391—394 (1941) [Russisch].

Die wissenschaftlichen Arbeiten von Dr. Julio Rey Pastor in der Zeit von 1905—1945. *Univ. nac. Litoral. Inst. mat.*, Publ. 6, 355—377 (1946) [Spanisch].

Crathorne, A. R.: Obituary: Henry Lewis Rietz. In memoriam. *Ann. math. Statist.* 15, 102—108 (1944).

Smith, C. D.: Obituary: Henry Lewis Rietz, 1875—1943. *Nat. Math. Mag.* 18, 182—184 (1944).

Semple, J. G.: Obituary: Charles Henry Rowe. *J. London math. Soc.* 19, 241—244 (1944).

Brasch, Frederick E.: Obituary: David Eugene Smith. *Science*, n. Ser. 100, 257—259 (1944).

Fite, W. Benjamin: David Eugene Smith. *Amer. math. Monthly* 52, 237—238 (1945).

Reeve, William David: Obituary: David Eugene Smith. *Scripta Math.* 11, 209—212 (1945).

Simons, Lao Geneva: Obituary: David Eugene Smith — in memoriam. *Bull. Amer. math. Soc.* 51, 40—50 (1945).

Gjunter, N. M.: Das Werk V. A. Steklovs in der mathematischen Physik. *Uspechi mat. Nauk*, n. Ser. 1, Nr. 3/4 (13/14), 23—43 (1946) [Russisch].

Smirnov, V. I.: Vladimir Andreevic Steklov (anlässlich seines 20. Todestages). *Uspechi mat. Nauk*, n. Ser. 1, Nr. 3/4 (13/14), 17—22 (1946) [Russisch].



Onicescu, Octave et Georges Vranceanu: *La vie et l'oeuvre de Georges Titeica*. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 43, 147—161 (1941).

Born, M.: Obituary: Prof. Otto Toeplitz. *Nature* 145, 617 (1940).

Allen, E. S.: The scientific work of Vito Volterra. *Amer. math. Monthly* 48, 516—519 (1941).

Levi, Beppe: Die Persönlichkeit Vito Volterras. *Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ.* 3, 25—36, *Schriftenverzeichnis*: 37—48 (1941) [Spanisch].

Pérard, Albert: Vito Volterra. (1860—1940). *Cahiers Phys.* Nr. 3, 51—58 (1941).

Picard, Émile: Vito Volterra. *C. r. Acad. Sci., Paris* 211, 309—312 (1940).

Rosenblatt, Alfred: Nachruf: Vito Volterra. *Revista Ci.* 44, 423—442 (1942) [Spanisch].

Somigliana, Carlo: Vito Volterra. *Pontificia Acad. Sci., Acta* 6, 57—85 (1942).

Thompson, D'Arcy W. and S. Chapman: Obituary: Prof. Vito Volterra, *For. Mem. R. S. Nature* 147, 349—350 (1941).

Wavre, R.: Vito Volterra. 1860—1940. *Enseignement math.* 38, 347—348 (1942).

Whittaker, E. T.: Obituary: Vito Volterra. 1860—1940. *Obit. Notices roy. Soc. London* 3, 691—718; list of publications, 718—729 (1941).

Bailey, W. N.: Francis John Welsh Whipple. *J. London math. Soc.* 18, 249—256 (1943).

Carlsaw, H. S. and G. H. Hardy: Obituary: John Raymond Wilton. *J. London math. Soc.* 20, 58—64 (1945).

Turnbull, H. W.: Obituary: Alfred Young. 1873—1940. *Obit. Notices roy. Soc. London* 3, 761—777; list of publications, 777—778 (1941).

Wilson, G. H. A.: Obituary: Dr. Alfred Young. *F. R. S. Nature* 147, 229 (1941).

Cartwright, M. L.: Obituary: Grace Chisholm Young. *J. London math. Soc.* 19, 185—192 (1944); mit *Schriftenverzeichnis*.

Hardy, G. H.: Obituary: William Henry Young. 1863—1942. *Obit. Notices roy. Soc. London* 4, 307—323 (1943).

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Whittaker, E. T.: Some disputed questions in the philosophy of the physical sciences. *Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A* 61, 160—175 (1942).

Harpe, Jean de la: Les progrès de l'idée du temps dans la philosophie grecque. *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser*, 128—137. Zürich: Füssli 1945.

Epstein, Paul S.: The time concept in restricted relativity. *Amer. J. Phys.* 10, 1—6 (1942).

Fantappiè, Luigi: Einheitliche Theorie der Kausalität und Finalität in physikalischen und biologischen Erscheinungen, gegründet auf die relativistische Wellenmechanik. *Revista mat. Hisp.-Amer.* IV. Ser. 3, 82—99 (1943) [Spanisch].

Richardson, R. G. D.: Applied mathematics and the present crisis. *Amer. math. Montly* 50, 415—423 (1943).

Bouligand, G.: Les crises de l'unité dans la mathématique. *Revue génér. Sci. purs appl.* 52, 215—221 (1945).

Bouligand, G.: Les nouveaux problèmes de la formation mathématique. *Revue génér. Sci. pur. appl.* 53, 183—186 (1946).

Sagastume Berra, Alberto E.: Über die Philosophie der Mathematik. *An. Soc. ci. Argentina* 142, 177—192 (1946) [Spanisch].

Blumberg, Henry: On the change of form. Amer. math. Monthly 53, 181—192 (1946).

● Bell, Eric Temple: The magic of numbers. New York and London: McGraw-Hill Book Company 1946. VIII, 418 p.; \$ 3,50.

● Woodger, J. H.: The technique of theory construction. (International Encyclopedia of Unified Science, vol. 2. Nr. 5.) Chicago: University of Chicago Press 1939. VII, 81 pp. \$ 1,00.

Weyl, Hermann: Mathematics and logic. A brief survey serving as preface to a review of „The philosophy of Bertrand Russell“. Amer. math. Monthly 53, 2—13 (1946).

Marković, Z.: Sur la formation des théories mathématiques. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 1, 49—64 (1946) [Kroatisch mit französ. Zusammenfassg.].

Larguier, Everett H.: Postulational methods. Scripta math. 8, 99—109 (1941).

Levi, Beppe: The notion of „deductive domain“ as an element of orientation on the questions of foundations of mathematical theories. Univ. nac. Litoral Inst. Mat., Publ. 2, 179—208 (1940) [Spanisch].

Levi, B.: Approximation als Instrument für Rechnung und Beweis. Math. Notae 1, 37—63 (1941) [Spanisch].

Hempel, C. G.: On the nature of mathematical truth. Amer. math. Monthly 52, 543—556 (1945).

Hempel, Carl G.: Studies in the logic of confirmation. I, II. Mind 54, 1—26, 97—121 (1945).

Hempel, Carl G.: A note on the paradoxes of confirmation. Mind 55, 79—82 (1946).

Albuquerque, J.: Über widerspruchsfreie Existenz. Gaz. Mat., Lisboa 6, Nr. 25, 4—6 (1945) [Portugiesisch].

Gokieli, L. P.: Über den Existenzbegriff in der Mathematik. Trudy Tbilissk. mat. Inst. 11, 23—56 (1942) [Russisch mit georg. Zusammenfassg.].

Gokieli, L. P.: Über den Existenzbegriff in der Mathematik. I, II. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 2, 881—888 (1941); 3, 111—118 (1942) [Russisch mit georg. Zusammenfassg.].

Gokieli, L. P.: Über den Existenzbegriff in der Mathematik. III, IV. Trudy Tbilissk. mat. Inst. 13, 153—206 (1944) [Russisch mit georgischer Zusammenfassg.].

Gokieli, L.: Über die Klasseneinteilung der Größen mittels reflexiver, symmetrischer und transitiver Relationen. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 5, 493—502 (1944) [Georgisch und Russisch].

● Beth, E. W.: Geschichte der Logik. 's Gravenhage: N. V. Servire 1944. 96 s. [Holländisch].

Beth, E. W.: Logistik als Erweiterung der traditionellen formalen Logik. Algemeen Nederl. Tijdschr. voor Wijsbegeerte en Psychol. 34, 53—68 = Ann. Genootsch. Wetensch. Philos. 11, 1—16 (1940) [Holländisch].

Thompson, Samuel M.: Syllogistic logic in linear notation. Philos. Sci. 9, 362—366 (1942).

Dotterer, Ray H.: A supplementary note on the rules of the antilogism. J. symbolic Logic 8, 24 (1943).

Becker, O.: Das formale System der ontologischen Modalitäten. Bl. Deutsche Philosophie 16, 387—422 (1943).

Die Hartmannsche Einteilung der Modi unter logischen Gesichtspunkten bedarf einer Revision. Interessant der Anhang (S. 410—422). In diesem wird zunächst bemerkt, daß verschiedene vom Verf. an anderer Stelle [Jbuch. philos. phänomenolog. Forsch. 11, 497 ff. (1940)] aufgestellte modale logistische Kalküle sich auf einen, den sogenannten Sechs-Modi-Kalkül, reduzieren lassen. Versuch einer

modalen Deutung des klassischen Prädikatenkalküls. Danach wäre eine mathematische Aussage von der Form  $(\exists x) \mathfrak{A}(x)$ , die nicht die scharfe intuitionistische Bedeutung „Es läßt sich eine Ziffer  $z$  mit der Eigenschaft  $\mathfrak{A}(z)$  tatsächlich angeben“ haben soll, zu deuten als „Möglicherweise gibt es eine Ziffer  $z$  mit der Eigenschaft  $\mathfrak{A}(z)$ “. Ebenso wäre die Aussage  $(x) \mathfrak{A}(x)$  des klassischen Kalküls zu deuten als: „Es ist unnötig, daß alle  $x$  die Eigenschaft  $\mathfrak{A}(x)$  haben.“ Entsprechend wäre  $(\exists x) \mathfrak{A}(x)$  zu interpretieren als: „Es ist unmöglich, daß ein  $x$  von der Eigenschaft  $\mathfrak{A}(x)$  existiert“ und  $(x) \mathfrak{A}(x)$ : „Es ist notwendig, daß alle  $x$  die Eigenschaft  $\mathfrak{A}(x)$  haben.“ Nach dieser Deutung könnte dann der klassische Prädikatenkalkül ungeändert beibehalten werden. W. Ackermann.

**Malisoff, William Marias:** Meanings in multi-valued logics. Philos. Sci. 8, 271—274 (1941).

● **Quine, Willard Van Orman:** Die Bedeutung der neuen Logik. Biblioteca de Ciências Sociais, Vol. III. São Paulo: Livraria Martins Editora 1944. 252 p. [Portugiesisch].

**Toledo Toledo, Raimundo:** Mathematische Grundlagen einer strukturellen Logik. Euclides, Madrid 6, 554—560, 614—620 (1946) [Spanisch].

● **Cooley, John C.:** A primer of formal logic. New York: Macmillan Company 1942. XI, 378 p. \$ 3,00.

● **Feys, R.:** Logistik. Formale Logik. I. Allgemeine Übersicht. Aussagen- und Klassenlogik. Antwerpen: Philosophische Bibliothek, N. V. Standaard- Boekhandel 1944. 340 S. [Holländisch].

**Vredenduin, P. G. J.:** Logistik. Chr. Huygens 18, 170—211 (1940) [Holländisch].

**Church, Alonzo:** Introduction to Mathematical Logic. I. (Annals of Mathematics Studies, Nr. 13.) Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1944. VI, 118 pp. \$ 1,75.

**Turing, A. M.:** The use of dots as brackets in Church's system. J. symbolic Logic 7, 146—156 (1942).

**Bronstein, Daniel J.:** A correction to the sentential calculus of Tarski's Introduction to Logic. J. symbolic Logic 7, 34 (1942).

**Mautner, F. I.:** An extension of Klein's Erlanger program: logic as invariant-theory. Amer. J. Math. 68, 345—384 (1946).

Der Boolesche Kalkül der Satzfunktionen wird als Invariantentheorie der symmetrischen Gruppe aller Permutationen des Individuenbereiches angesehen. Führt man in genauer Analogie zur Geometrie „logische Koordinatensysteme“ ein, so sind die in H. Weyls Formulierung des Kleinschen Erlanger Programms an eine „Invariantentheorie“ gestellten Forderungen erfüllt. Verf. entwickelt einen „Tensorkalkül“ und überträgt die gruppen- und invariantentheoretischen Methoden der „linearen“ Geometrie. H. König.

**Bouligand, Georges:** Sur une catégorie de propositions. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 495—496 (1946).

**Dexter, Glenn Edward:** The calculus of non-contradiction. Amer. J. Math. 65, 171—178 (1943).

Der Aussagenkalkül wird mit Hilfe eines einzigen Operators, dargestellt durch einen horizontalen Strich, formuliert, der auf beliebig viele Elemente angewandt werden kann.  $\overline{p_1 \dots p_n}$  bedeutet, daß mindestens eine der Aussagen  $p_1, \dots, p_n$  falsch ist.  $\overline{p_1 \dots p_n}$  wird „Parenthese“ genannt. Eine Menge von Aussagen soll einen Widerspruch enthalten, wenn eine Parenthese darunter vorkommt und jedes Glied dieser Parenthese. Axiome werden nicht gebraucht, statt dessen eine einzige Ableitungsregel: Wenn unter der Annahme der Richtigkeit einer Parenthese



sich ein Widerspruch ergibt, so ist jedes Glied der Parenthese richtig. Die Hauptformeln der Aussagenlogik werden so bewiesen. *W. Ackermann.*

**Fuentes Miras, J.:** Das Entscheidungsproblem im Aussagenkalkül. *Euclides*, Madrid 3, 669—672 (1943) [Spanisch].

**Novikoff, P. S.:** On the consistency of certain logical calculus. *Mat. Sbornik*, n. Ser. 12 (54), 231—261 (1943) [mit russ. Zusammenfassg.].

Verf. führt in den zweiwertigen Aussagenkalkül unendliche Summen und Produkte ein. Axiome werden aufgestellt, die etwa denen des engeren Prädikatenkalküls entsprechen. Für den Kalkül wird ein Widerspruchsfreiheitsbeweis gegeben, der darauf hinauskommt zu zeigen, daß alle beweisbaren Formeln „regulär“ sind, d. h. eine bestimmte Eigenschaft haben, die nur „wahren“ Formeln zukommt. Die Ausführungen und Beweise sind im einzelnen, wenigstens für den Referenten, nicht immer verständlich, da die Formulierung der Begriffe nicht präzise genug ist. (S. spätere Arbeit: dies. Zbl. 38, 15.) *W. Ackermann.*

**Hiz, Henri:** Remarque sur le degré de complétude. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 223, 973—974 (1946).

Verf. definiert Grade der Vollständigkeit für Systeme  $\mathfrak{A}$  von Aussagen innerhalb einer deduktiven Theorie.  $\mathfrak{A}$  ist vollständig vom 1. Grade, wenn jede andere Aussage oder ihr Gegenteil aus  $\mathfrak{A}$  abgeleitet werden kann, vollständig vom  $(n+1)$ -ten Grade, wenn  $\mathfrak{A}$  frühestens durch Adjunktion von  $n$  Aussagen vollständig vom 1. Grade wird. Beispiele werden gegeben. Vgl. auch frühere Arbeiten von K. Gödel [*Anz. Akad. Wiss. Wien, math.-natur. Kl.* 69, 65—66 (1932)] und S. Jaskowski (*Actes Congr. Int. Phil.* Paris 1935). *W. Ackermann.*

**Shestakov, V.:** Representation of characteristic functions of propositions by expressions realizable by relay-contact circuits. *Izvestija Akad. Nauk SSSR*, Ser. mat. 10, 529—554 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

$\omega_x(p)$  sei die „charakteristische Funktion der Aussage  $p$ “, die den Wert  $\omega$  bzw.  $\alpha$  hat, je nachdem  $p$  wahr oder falsch ist. Setzt sich die Formel  $f(p, q, \dots)$  aussagenlogisch aus  $p, q, \dots$  zusammen, so kann  $\omega_x(f(p, q, \dots))$  aus  $\omega, \alpha, \infty_0(p), \infty_0(q), \dots$  mittels Inversion und Addition zusammengesetzt werden. Daraus folgt: Faßt man  $\infty_0(p)$  als Symbol für einen geschlossenen bzw. unterbrochenen Kontakt auf, je nachdem  $p$  wahr oder falsch ist, so läßt sich  $\omega_x(f(p, q, \dots))$  durch eine elektrische Schaltung repräsentieren. Entsprechend werden charakteristische Funktionen einer  $n$ -wertigen Logik durch  $n$ -fache Schalter dargestellt.

*Kurt Schütte.*

**Martin, R. M.:** A homogeneous system for formal logic. *J. symbolic Logic* 8, 1—23 (1943).

Ein neues System der Logik zur Begründung der Mathematik mit einem einzigen Typ von Individuen, der auch als der Typ der Individuenklassen angesehen werden kann, wird beschrieben. Außer Aussagenverknüpfungen und Quantoren für Individuen tritt die Inklusion als primitiver Begriff auf, ferner ein Ausdruck für die  $R$ -Kette einer Relation. Klasse und Elementenbeziehung werden wie in den *Principia Mathematica* definiert. Infolge geeigneter Axiome und Ableitungsregeln kann die Boolesche Algebra und die Arithmetik gewonnen werden. *W. Ackermann.*

**Newman, M. H. A.:** Stratified systems of logic. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 39, 69—83 (1943).

Auf der Grundlage eines induktiven Formelaufbaus wird eine allgemeine Theorie der Typisierung von Formeln entwickelt und mit den Typenvorschriften von Quine, Church und der *Principia* in Verbindung gebracht. *II. Hermes.*

**Hailperin, Theodore:** A set of axioms for logic. *J. symbolic Logic* 9, 1—19 (1944).

Es wird ein logisches Axiomensystem aufgestellt, das äquivalent ist einem von W. V. Quine (dies. Zbl. 16, 193), aber den dort benutzten Begriff der Stratifikation vermeidet. Das entsprechende Axiom von Quine wird durch neun andere Axiome ersetzt.

*W. Ackermann.*

**Quine, W. V.:** On existence conditions for elements and classes. *J. symbolic Logic* 7, 157—159 (1942).

Das Klassenbildungsprinzip \*202 in des Verf.'s „*Mathematical Logic*“ (New York 1940) ist prädikatenlogisch äquivalent zur Konjunktion des Allklassenaxioms und des Zermeloschen Aussonderungsaxioms in der Fassung von Skolem.

*H. Hermes.*

**Quine, W. V.:** On the logic of quantification. *J. symbolic Logic* 10, 1—12 (1945).

Für die einstellige Prädikatenlogik wird ein neues, bequemer zu handhabendes Entscheidungsverfahren angegeben. Hierbei ist ein vorgelegter Ausdruck in vorgeschriebener Weise zu reduzieren und die Reduzierte rein aussagenlogisch zu prüfen. Die allgemeingültigen Ausdrücke des mehrstelligen Prädikatenkalküls erhält man aus denen des einstelligen ausschließlich mit Hilfe einer verallgemeinerten Abtrennungsregel.

*H. Hermes.*

**Bochvar, D. A.:** To the question of paradoxes of the mathematical logic and theory of sets. *Mat. Sbornik, n. Ser.* 15 (57), 369—384 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Aus der ohne Typenunterscheidung widerspruchsvoll erweiterten Prädikatenlogik wird unter Verzicht auf das Komprehensionsaxiom eine „klassische Logik“ ausgesondert, die widerspruchsfrei ist.

*Kurt Schütte.*

(1) **Curry, Haskell B.:** A revision of the fundamental rules of combinatory logic. *J. symbolic Logic* 6, 41—53 (1941).

(2) **Curry, Haskell B.:** Consistency and completeness of the theory of combinators. *J. symbolic Logic* 6, 54—61 (1941).

(3) **Curry, Haskell B.:** The combinatory foundations of mathematical logic. *J. symbolic Logic* 7, 49—64 (1942).

(4) **Curry, Haskell B.:** Some advances in the combinatory theory of quantification. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 28, 564—569 (1942).

(5) **Curry, Haskell B.:** The inconsistency of certain formal logics. *J. symbolic Logic* 7, 115—117 (1942).

In (1) wird ein vereinfachter Aufbau der kombinatorischen Logik gegeben (Vermeidung der Axiomenschemata, Elimination der Gleichheit als primitiver Begriff u. a. m.), der durch Arbeiten von J. B. Rosser (dies. Zbl. 11, 2: 12, 386) angeregt wurde. (2) zeigt Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit dieses Systems. (3) gibt einen Überblick über die Aufgaben und Probleme der kombinatorischen Logik, zeigt die Äquivalenz der Theorie der Kombinatoren und des  $\lambda$ -Formalismus von A. Church und weist auf die Schwierigkeiten bei der Einführung eines universellen Quantors hin. Für das letzte werden drei verschiedene Wege angedeutet (Einführung von neuen Termen, die entweder Funktionalität oder Allgemeinheit, bzw. Implikation bedeuten, sowie Beschränkung der Anwendung der neuen Terme auf sogen. „kanonische“ Terme), die in (4) näher erläutert werden. (5) zeigt, daß die Paradoxie von Kleene und Rosser in einem kombinatorisch vollständigen System abgeleitet werden kann, wenn eine Implikation vorhanden ist mit den Eigenschaften: I.  $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ; II. wenn  $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ , so  $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ; III. wenn  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ , so  $\mathfrak{B}$ .

*W. Ackermann.*

- Fitch, Frederic B.: A basic logic. *J. symbolic Logic* 7, 105—114 (1942).  
 Fitch, Frederic B.: Representations of calculi. *J. symbolic Logic* 9, 57—62 (1944).  
 Fitch, Frederic B.: A minimum calculus for logic. *J. symbolic Logic* 9, 89—94 (1944).

Aufbau eines (kombinatorischen) Kalküls ohne Negation, der grundlegend ist in dem Sinne, daß man annehmen kann, daß in ihm jedes (rekursiv gebbare) Logiksystem in einem bestimmten Sinne definierbar ist. Zum weiteren Ausbau vgl. dies. Zbl. 30, 193; 35, 8; 38, 5; 39, 245. *H. Hermes.*

Goodman, Nelson: On the simplicity of ideas. *J. symbolic Logic* 8, 107—121 (1943).

Ideen von Klassen und Relationen werden Polynome zugeordnet, die ein Maß für den Grad ihrer Kompliziertheit abgeben sollen. Eine Idee einer Klasse  $A$  von Klassen z. B. erhält den Index  $\infty$ ,  $u$  oder  $n$ , je nachdem die Anzahl der nicht leeren Unterklassen von  $A$ , unter deren Elementen jedesmal alle Klassen mit einer bestimmten Kardinalzahl und nur solche vorkommen, nicht notwendig endlich, notwendig endlich, aber nicht notwendig unterhalb einer endlichen Grenze bleibend, oder höchstens  $n$  ist. Für Klassen höherer Ordnung werden entsprechend höhere Potenzen von  $u$  verwendet. Index einer Zusammenstellung von Ideen soll die polynomiale Summe der einzelnen Indizes sein, falls  $\infty$  nicht vorkommt. Einer Abzählung der Polynome in  $u$  im üblichen Sinne soll die Ordnung der Ideen nach ihrer Kompliziertheit entsprechen. Da den allgemeinsten mathematischen Ideen der Index  $\infty$  entsprechen würde und für diese demnach keine Vergleichbarkeit in diesem Sinne möglich ist, ist die Möglichkeit einer fruchtbaren Anwendung nicht recht einzusehen. *W. Ackermann.*

Goodman, Nelson: Sequences. *J. symbolic Logic* 6, 150—153 (1941).

Goodstein, R. L.: On the restricted ordinal theorem. *J. symbolic Logic* 9, 33—41 (1944).

Finiter Beweis des Satzes, daß eine absteigende Folge von Ordinalzahlen endlich ist, falls die Ordnungszahlen höchstens gleich  $\omega^{\omega^{\omega}}$  sind. Verf. vermutet entsprechende Beweise für Ordinalzahlen bis zu einem beliebigen  $\omega_n$  ( $\omega_1 = \omega$ ;  $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$ ). *W. Ackermann.*

Goodstein, R. L.: Function theory in an axiom-free equation calculus. *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. 48, 401—434 (1945).

Der elementare Kalkül mit freien Variablen von Hilbert und Bernays (dies. Zbl. 9, 145) wird kombiniert mit Überlegungen aus H. B. Currys primitiver rekursiver Arithmetik (dies. Zbl. 25, 5), um ein System zu erhalten, das für die elementare Zahlentheorie ausreicht, dabei keinen eigentlichen Logikkalkül benutzt, dessen Rolle gewisse zahlentheoretische Funktionen übernehmen.

*W. Ackermann.*

Germansky, Baruch: Axiome der natürlichen Zahlen. *Riveon Lematematika* 1, 13 (1946) [Hebräisch].

Bing, Kurt: Über B. Germanskys Axiomensysteme für die Grundlagen der natürlichen Zahlen. *Riveon Lematematika* 1, 21—28 (1946) [Hebräisch].

Bing, Kurt: Über Germanskys Axiomensystem für die natürlichen Zahlen. *Riveon Lematematika* 1, 57—60 (1946) [Hebräisch].

Die Axiome beziehen sich auf die Grundrelation der Nachbarschaft. Sie sind den Peano-Axiomen äquivalent. *Kurt Schütte.*

Potron: Sur les fondements de l'arithmétique. *Revue génér. Sci. pures appl.* 51, 141—144 (1940).



## Algebra und Zahlentheorie.

### Kombinatorik:

Cotlar, Misha: Eine Verallgemeinerung der Faktoriellen. *Math. Notae* 5, 89—107 (1945) [Spanisch].

Kesava Menon, P.: Some properties of binomial coefficients. *Math. Student* 7, 93—96 (1939).

Megyesi, István: Lexikographische Ordnung von kombinatorischen Komplexionen. *Mat. Fiz. Lapok* 47, 178—179 (1940) [Ungarisch mit deutsch. Zusammenfassg.].

Miller, A. R.: The number of configurations of a cooperative assembly. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 38, 109—124 (1942).

Allen, Edward S. and Harvey Diehl: The number of stereoisomeric alcohols. *Iowa State College, J. Sci.* 16, 161—171 (1942).

Venkatarayudu, T.: The 7—15 problem. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 9, 531 (1939).

Usai, Giuseppe: Quadri di Tartaglia generalizzati. *Matematiche* 1, 12—20 (1945).

Usai, Giuseppe: Su una generalizzazione dei quadri di Tartaglia e su un problema di calcolo delle probabilità. *Matematiche* 1, 102—103 (1946).

González del Valle, A.: Eine als Folge eines elektrischen Problems erhaltene Beziehung unter Binomialkoeffizienten. *Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser.* 4, 48—50 (1944) [Spanisch].

En identifiant deux solutions d'un problème d'électricité, l'A. obtient une identité concernant les coefficients du binôme, identité que l'on trouve dans Netto „Lehrbuch der Kombinatorik“ (Leipzig 1927, p. 253), établie d'une autre manière.

*S. Bays.*

Tietze, Heinrich: Über gewisse Umordnungen von Permutationen. I. II. III. IV. *S.-Ber. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München* 1943, 131—134, 135—148, 269—279, 281—293 (1944).

Le contenu des deux premières notes est un résumé de celui des deux mémoires du même A. (ce Zbl. 42, 11). La note III donne des exemples d'application du critère de stabilité; la note IV traite plus à fond, en particulier dans le cas où  $f = 1$ , des questions de probabilité découlant du même problème. *S. Bays.*

Tietze, Heinrich: Über gewisse Umordnungen von Permutationen und ein zugehöriges Stabilitätskriterium. I. *J.-Ber. Deutsch. Math. Verein.* 53, 147—182 (1943).

Besprechung in dies. Zbl. 42, 11.

Fernandez Toral, M.: Permutationszahlen mit zyklischer Vertauschung. I. II. *Euclides, Madrid* 3, 134—139, 283—284 (1943) [Spanisch].

Fu, Chung-Sun: A problem on non-sensed circular permutations. *Wu-Han Univ. J. Sci.* 8, Nr. 1, 1.1—1.16 (1942).

La formule concise pour le nombre de permutations circulaires, dans les deux sens, de  $n$  objets avec répétitions, est dans le cas de la répétition fixé  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ ,  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ ,  $\frac{1}{2}\{h + n^{-1} \sum \varphi(d) [n_1 d^{-1}, \dots, n_m d^{-1}]\}$ , où la somme s'étend à tous les diviseurs  $d$  communs aux  $n_i$ .  $q(d)$  est la fonction d'Euler, la parenthèse intérieure signifie le coefficient polynômial  $(\sum n_i d^{-1})! [(n_1 d^{-1})! \dots (n_m d^{-1})!]^{-1}$  et  $h$  est le nombre  $[[n_1/2], \dots, [n_m/2]]$ , à moins que trois ou plus des  $n_i$  soient impairs, auquel cas  $h = 0$ . — Pour  $n$  objets tous différents, c'est-à-dire la répétition  $(1^n)$ , la formule se réduit au résultat connu:  $(n - 1)!/2$ .

*S. Bays.*

Hadwiger, H.: Gruppierung mit Nebenbedingungen. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 43, 113—122 (1943).

Soit  $A(n, m, k)$  le nombre de manières de répartir  $n$  objets en  $m$  ensembles de au plus  $k$  objets chacun. L'A. déduit la fonction génératrice et donne des résultats.

*S. Bays.*

Hadwiger, H.: Eine Bemerkung über zufällige Anordnungen der natürlichen Zahlen. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 46, 105—109 (1946).

Relations de récurrence et formules explicites pour le nombre  $A_n^x$  des permutations des entiers 1 à  $n$  avec exactement  $x$  des successions 12, 23, ...,  $(n-1)n$  et donnée du premier terme du développement asymptotique de  $A_n^x$ . L'A. ignore le résultat classique  $A_n^0 = A^n 0! + A^{n-1} 0!$ .

*S. Bays.*

Waldapfel, L.: Über das Profil der Permutationen. Mat. fiz. Lapok 50, 257—261 (1943) [Ungarisch mit deutscher Zusammenfassg.].

L'A. fait correspondre à chaque permutation  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  des éléments 1, 2, ...,  $n+1$ , une séquence de signes  $+$  et  $-$  constituée ainsi: le  $i^{\text{ème}}$  signe est  $+$  si  $a_i < a_{i+1}$ , sinon il est  $-$ . L'A. cherche le nombre des permutations des  $n+1$  éléments aux quelles correspond une même séquence.

*S. Bays.*

Brătîlă, F. and P. Sergescu: Verallgemeinerte Kombinationen. Revista mat., Timişoara 21, Nr. 2, 16 S. (1941) [Rumänisch].

E. G. Laguarda a été conduit à déterminer la valeur du nombre  $C_n^p(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de combinaisons  $p$  à  $p$  avec répétition limitée (au plus  $a_i$  fois pour  $A_i$ ) des lettres  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Les  $A_i$  expriment ce nombre en termes des mêmes nombres de combinaisons  $K_n^p = C_n^p(p, p, \dots, p)$  avec répétition non restreinte ( $K_n^p = 1$ ,  $K_n^p = 0$  pour  $p < 0$ ). L'identité suivante où  $M = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ :  $C_n^p(a_1, a_2, \dots, a_n) = K_n^{M-p} - \sum K_n^{M-p-a_1-1} + \sum K_n^{M-p-a_1-a_2-2} - \dots \pm \sum K_n^{M-p-a_1-a_2-\dots-a_n-n}$  est le résultat principal du mémoire.

*S. Bays.*

Etherington, I. M. H.: Some problems of non-associative combinations. I. Edinburgh math. Notes 32, 1—6 (1941).

L'A. établit une connexion entre les partitions d'un polygone convexe par des diagonales et l'insertion de parenthèses dans un produit. Le problème est pratiquement équivalent à la construction des "arbres" de Cayley. L'énumération de ces partitions conduit à la fonction génératrice  $y = f(x)$  qui satisfait à l'équation algébrique  $y = x + y^a + y^b + \dots$ ,  $a, b, \dots, > 1$ . Dans les cas simples la solution de l'équation est trouvée sous forme de série entière en  $x$ , le coefficient  $A_n$  de  $x^n$  donnant le nombre des partitions du  $(n+1)$ -gone.

*S. Bays.*

Erdélyi, A. and I. M. H. Etherington: Some problems of non-associative combinations. II. Edinburgh math. Notes Nr. 32, 7—12 (1941).

Les AA. appliquent une méthode de Birkeland [C. r. Acad. Sci., Paris 171, 1370—1372 (1920) et 172, 309—311 (1921)] pour obtenir les partitions du polygone ci-dessus. Plus généralement, le nombre des partitions du  $(n+1)$ -gone en  $\alpha$   $(a+1)$ -gones,  $\beta$   $(b+1)$ -gones, ..., où  $n, \alpha, a, \beta, b, \dots$  sont des entiers positifs donnés tels que  $n-1 = \alpha(a-1) + \beta(b-1) + \dots$  est:  $A_{n\alpha\beta\dots} = (n-1+\alpha+\beta+\dots)! [a! \alpha! \beta! \dots]^{-1}$  et ainsi la valeur de  $A_n$  (note précédente) est  $\sum_{\alpha, \beta, \dots} A_{n\alpha\beta\dots}$ .

Un résultat analogue a été obtenu par G. Belardinelli (ce Zbl. 22, 133).

*S. Bays.*

Robinson, H. A.: A problem of regions. Amer. math. Monthly 52, 33—34 (1945).

Il s'agit du partage d'un espace euclidien à  $d$  dimensions, simplement connexe, en cellules  $d$  (à  $d$  dimensions), par  $n$  sous-espaces à  $d-1$  dimensions. Les sous-



espaces se coupent 2 à 2 en  $k$  cellules ( $d - 2$ ) et par chacune de ces dernières passent exactement  $d$  des  $n$  sous-espaces en question. — L'A. donne pour le nombre total des cellules  $d$  l'expression  $S(n, d, k) = \sum_{i=0}^d \binom{n}{i} + (k - 1) \binom{n}{d}$  et pour le nombre des cellules intérieures l'expression  $C(n, d, k) = \binom{n-1}{d} + (k - 1) \binom{n}{d}$ .  
S. Bays.

Jessen, Axel: Ein kombinatorisches Problem. Mat. Tidsskr. B 1945, 58 (1945) [Dänisch].

L'A. dispose les entiers 1 à 13, chacun répété quatre fois, dans un rectangle de 4 lignes et 13 colonnes de manière que chaque paire  $(i, j)$ ,  $i \neq j$ , intervienne exactement dans une colonne.  
S. Bays.

Easterfield, Thomas E.: A combinatorial algorithm. J. London math. Soc. 21, 219—226 (1946).

L'algorithme est un procédé pour déterminer le minimum de toutes les sommes de  $n$  éléments pris dans un tableau carré de  $n$  cases de côté d'entiers positifs, à raison d'un seul élément par ligne et par colonne.  
S. Bays.

Shyü, Kintzyur: Two theorems concerning combinations. Duke math. J. 11, 293—299 (1944).

Nous donnerons le second de ces théorèmes. Soit  $k_1, k_2, \dots, k_n$  des entiers positifs. On a :

$$\sum_x \prod_{v=1}^n \left[ a \binom{x_v}{k_1} + b \binom{x_v}{k_2} + \dots \right] = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots} \binom{m+n-1}{\alpha k_1 \dots \beta k_2 \dots n-1} a^\alpha b^\beta \dots$$

où la somme de gauche s'étend à toutes les partitions en  $x_v$  entiers  $\geq 1$  du nombre  $m$  telles que  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$  et la somme de droite s'étend à toutes les partitions en  $\alpha, \beta, \dots$  entiers  $\geq 0$  du nombre  $n$  telles que  $\alpha + \beta + \dots = n$ .  
S. Bays.

Hsu, L. Ching-Siur: A combinatorial formula with some applications. Bull. Amer. math. Soc. 51, 106—113 (1945).

L'A. établit une formule compliquée d'analyse combinatoire. Il en fait l'application aux partitions de nombres et à l'intégrale de Dirichlet.  
S. Bays.

Gupta, Hansraj: A problem in combinations. Math. Student 8, 131—132 (1940).

Narasimha Murti, V.: A problem in combinations. Math. Student 10, 85—86 (1942).

Il s'agit d'établir le rôle de garde de  $m$  soldats pendant  $m$  jours de manière que chacun soit compagnon de chaque autre pendant 2 jours exactement. Gupta (ce Zbl., ci-dessus) a établi que si l'effectif de la garde est  $n$ , le problème n'est possible que pour  $m - 1 = n(n - 1)/2$ . Il a donné des solutions pour  $n = 3, 4, 5, 6$ , les trois premières étant dites "élégantes" en raison d'une certaine propriété. Il a conjecturé que pour chaque  $n$  il existe une solution (élégante ou autre). L'A. établi à nouveau ces faits et démontre que pour  $n = 6$  ( $m = 16$ ) il n'existe pas de solution élégante.  
S. Bays.

Levi, F. W.: Remarks on Mr. V. Narasimha Murthi's paper: On a problem of arrangements. (I) J. Indian math. Soc., n. Ser. 4, 45—46 (1940).

Chakrabarti, S. C.: Some further algebraic identities. J. Indian math. Soc., n. Ser. 8, 115—119 (1944).

L'A. considère un certain nombre d'identités impliquant la généralisation connue du coefficient du binôme :

$${}_k S_n(a) = {}_k S_n = [(a^1 - 1)(a^{k-1} - 1) \dots (a^{k-n+1} - 1)] / [(a^n - 1)(a^{n-1} - 1) \dots (a - 1)] a^{n(n-1)/2}.$$

On a  $\lim_{n \rightarrow 1} {}_k S_n(a) = \binom{k}{n}$  et  ${}_k S_n$  vérifie l'équation de différences  ${}_{k+1} S_n = a^n {}_k S_n + a^{n-1} {}_k S_{n-1}$ .

Si  $k$  est un entier,  $kS_n(a)$  est la  $n^{\text{ième}}$  fonction symétrique élémentaire de  $1, a, a^2, \dots, a^k$ . Un résultat typique est  $\sum_{m=1}^r xS_{r-m}yS_m = x+yS_r$ . S. Bays.

**Bruijn, N. G. de:** A combinatorial problem. Nederl. Akad. Wet., Proc., **49**, 758—764 = *Indagationes math.* **8**, 461—467 (1946).

L'arrangement cyclique 00010111 et son inverse 11101000 sont les seuls à contenir chacun, exactement une fois, dans leurs ensembles de trois éléments consécutifs, les 8 triples avec répétition des chiffres 0 et 1. Utilisant les propriétés des „graphs“ finis, l'A. prouve un énoncé général de R. Posthumus, qui se rapporte au problème des liaisons téléphoniques, énoncé selon lequel le nombre des arrangements différents ci-dessus de  $2^n$  chiffres qui sont 0 ou 1 est  $2^{f(n)}$ , où  $f(n) = 2^{n-1} - n$ . S. Bays.

**Good, I. J.:** Normal recurring decimals. J. London math. Soc. **21**, 167—169 (1946).

Il y a  $a^r$  arrangements  $r$  à  $r$  avec répétitions des  $a$  entiers  $0, 1, \dots, a-1$ . L'A. construit un arrangement cyclique des éléments  $0, 1, \dots, a-1$ , chacun répété  $a^r$  fois, tel qu'il contienne les  $a^r$  arrangements précédents chacun une fois et une seule fois. — Dans le cas spécial  $a = 2$ , de Bruijn a prouvé que le nombre de tels arrangements est  $2^{f(n)}$  ou  $f(n) = 2^{n-1} - n$  (v. la récession précédente).

S. Bays.

**Rees, D.:** Note on a paper by I. J. Good. J. London math. Soc. **21**, 169—172 (1946).

L'A. donne différentes preuves du théorème énoncé par I. J. Good (v. la récession précédente).

S. Bays.

(1) **Fisher, R. A.:** Some combinatorial theorems and enumerations connected with the numbers of diagonal types of a Latin square. Ann. Eugenics **11**, 395—401 (1942).

(2) **Fisher, R. A.:** Completely orthogonal  $9 \times 9$  squares. A correction. Ann. Eugenics **11**, 402—403 (1942).

Verf. bringt eine Rekursionsformel von Cayley für die Anzahl  $a_n$  der Bäume mit  $n$  Knotenpunkten, deren einer als Wurzel gilt, in die Gestalt  $\log \varphi(x)x^{-1} = \varphi(x) + (\frac{1}{2})\varphi(x^2) + (\frac{1}{3})\varphi(x^3) + \dots$  mit  $\varphi(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots$  und dehnt die Cayleysche bis  $a_{13}$  reichende Tabelle bis  $a_6$  aus. Im weiteren Verfolg dieser Methode findet Verf. einen Ausdruck der Form  $(1-x)^{-b_1}(1-x^2)^{-b_2}(1-x^3)^{-b_3}\dots$ , wo der Koeffizient von  $x^{n-1}$  die Anzahl der möglichen Diagonaltypen für lateinische Quadrate von  $n^2$  Feldern angibt. — In (2) berichtigt Verf. einen Irrtum. Wie Bose und Nair fanden, gehören die vom Verf. in seinem Buche (Design of Experiments, Edinburgh 1935) angegebenen orthogonalen lateinischen Quadrate mit  $9 \times 9$  Feldern nicht demselben Typ an wie die von Fisher und Yates in ihren „Statistical Tables...“. R. Sprague.

(1) **Mann, Henry B.:** The construction of orthogonal Latin squares. Ann. math. Statistics **13**, 418—423 (1942).

(2) **Mann, H. B.:** On the construction of sets of orthogonal Latin squares. Ann. math. Statistics **14**, 401—414 (1943).

Verf. zieht in (1) zur Konstruktion orthog. lat. Quadr. die Cayleyschen Gruppenquadrate heran. Er zeigt, daß gewisse Abbildungen der Gruppe auf sich selbst, die nicht notwendig Automorphismen sind, ein Aggregat von paarweis orthog. lat. Quadr. bestimmen, und stellt fest, daß die Mehrzahl aller bisher konstruierten solchen Aggregate auf Automorphismen Abelscher Gruppen der Ordnung  $m = p^n$  und des Typs  $(1, 1, \dots, 1)$  beruhen. Nach dem neuen Verfahren werden, mit Benutzung zweier Gruppen der Ordnung 12, neue Eulersche  $12 \times 12$ -Quadrate gewonnen. In (2) werden  $m-1$  paarweis orthog. lat. Quadr.



konstruiert mit Hilfe von Automorphismen der Periode  $m - 1$  der eben genannten Gruppen. Durch Verallgemeinerung dieser Methode auf das direkte Produkt von  $t$  solcher Gruppen gewinnt Verf.  $r - 1$  paarweis orthog. lat. Quadr. der Ordnung  $p_1^{m_1} \dots p_t^{m_t}$  mit  $r = \text{Min}(p_i^{m_i})$ , z. B. 3 mit  $20 \times 20$  Feldern.

*R. Sprague.*

(1) Hall, Marshall: An existence theorem for Latin squares. Bull. Amer. math. Soc. 51, 387—388 (1945).

(2) Finney, D. J.: Some orthogonal properties of the  $4 \times 4$  and  $6 \times 6$  Latin squares. Ann. Eugenics 12, 213—219 (1945).

(3) Finney, D. J.: Orthogonal partitions of the  $5 \times 5$  Latin squares. Ann. Eugenics 13, 1—3 (1946).

(4) Finney, D. J.: Orthogonal partitions of the  $6 \times 6$  Latin squares. Ann. Eugenics 13, 184—196 (1946).

(5) Finney, D. J.: Latin squares of the sixth order. Experientia 2, 404—405 (1946).

(1): Zu jedem lat. Rechteck mit  $n$  Spalten und  $k$  Zeilen können weitere  $n - k$  Zeilen angegeben werden, die es zu einem lat. Quadrat ergänzen. (2)—(5): Problem der Einteilung (partition) der  $n^2$  Felder eines lat. Quadr. in getrennte Klassen von  $n k_1, n k_2, \dots$  Elementen mit  $k_1 + k_2 + \dots = n$  derart, daß die  $i$ -te Klasse in jeder Zeile und jeder Spalte des lat. Quadrats  $k_i$  Felder einnimmt und jeden Buchstaben  $k_i$  mal enthält. Jede Lösung heißt eine  $(k_1, k_2, \dots)$ -orthogonale Einteilung des lat. Quadrats. Beispiel einer (2,2)- oder  $(2^2)$ -Einteilung für  $n = 4$  ist

$$\begin{array}{cccc} A & b & c & D \\ B & a & d & C \\ c & D & A & b \\ d & C & B & a. \end{array}$$

[Die Unlösbarkeit des Eulerschen Problems der 36 Offiziere ist gleichbedeutend mit der Nichtexistenz einer  $(1^6)$ -Einteilung für  $n = 6$ .] Untersucht wird die Möglichkeit und Anzahl von orthog. Einteilungen bei den bekannten Typen lat. Quadrate für  $n = 5$  und 6.

*R. Sprague.*

(1) Kerawala, S. M.: The enumeration of the Latin rectangle of depth three by means of a difference equation. Bull. Calcutta math. Soc. 33, 119—127 (1941).

(2) Riordan, John: Three-line Latin rectangles. I, II. Amer. math. Monthly 51, 450—452 (1944); 53, 18—20 (1946).

(3) Erdős, Paul and Irving Kaplansky: The asymptotic number of Latin rectangles. Amer. J. Math. 68, 230—236 (1946).

(1): Verf. findet für die Anzahl  ${}_3K_n$  der lat. Rechtecke mit 3 Zeilen und  $n$  Spalten eine lineare Differenzengleichung 5. Ordnung und gibt die numerischen Werte bis  $n = 15$ . Ein früheres Ergebnis von Jacob wird als irrig nachgewiesen. Dagegen bestätigt sich die Jacobische Vermutung  ${}_3K_n \sim e^{-3}(n!)^2$  insofern, als der Limes  ${}_3K_n/(n!)^2$  existiert und in den ersten 5 Dezimalen mit  $e^{-3}$  übereinstimmt. —

(2): Aufstellung einer expliziten Formel für  ${}_3K_n$ , nämlich  $\sum_i \binom{n}{i} D_i D_{n-i} u_{n-2i}$ . Dabei bedeuten  $D_i$  die Anzahl der Permutationen, die an keiner Stelle mit  $(1, \dots, n)$  übereinstimmen, und  $u_n$  die Anzahl derjenigen, die außerdem überall von  $(2, \dots, n, 1)$  abweichen. Ferner Beweis für die Jacobische Vermutung in vollem Umfange. (3): Verallgemeinerung der Abschätzung  ${}_3K_n \sim e^{-3}(n!)^2$  mit der Bezeichnung  $f(n, k) = n! {}_kK_n$  zu  $f(n, k) \sim (n!)^k e^{-k(k-1)/2}$ , gültig nicht nur für jedes feste  $k$ , sondern sogar für  $k \leq (\log n)^{1/2-\epsilon}$ . Dieselben Autoren geben auch die Anfangsglieder einer asymptotischen Entwicklung, die im Falle  $k = 3$  die Form hat  $f(n, 3) = (n!)^3 e^{-3} [1 - n^{-1} - (2n^2)^{-1} + \dots]$ . Die ersten 3 Glieder

liefern bei  $n > 20$  vier richtige Stellen mit erheblich geringerem Aufwand an Rechnung, als die genaue Bestimmung nach der Formel von Riordan erfordern würde.

*R. Sprague.*

**Erdős, Paul and Irving Kaplansky: Sequences of plus and minus.** Scripta math. 12, 73—75 (1946).

Le nombre des arrangements de  $m$  unités positives et de  $n$  unités négatives, tels que les sommes partielles de ces  $m + n$  nombres atteignent toujours au moins  $m - n$ , est: 0 si  $m > n + 1$ ,  $(n + 1)^{-1} \binom{2n}{n}$  si  $m = n + 1$ ,  $(n + 1)^{-1} \cdot (n + m - 1) \binom{m+n}{m}$  si  $m \leq n + 1$ . Ces nombres restent les mêmes dans le cas plus général où toutes les sommes partielles atteignent au moins  $m - n - a$ .

*S. Bays.*

**Riordan, John: Permutations without 3-sequences.** Bull. Amer. math. Soc. 51, 745—748 (1945).

L'A. énumère les permutations de  $1, 2, \dots, n$  qui ne contiennent aucune des séquences 123, 234,  $\dots, n-2 \ n-1 \ n$ , ou plus généralement qui en contiennent un nombre fixé. Une table est donnée pour  $n \leq 10$ .

*S. Bays.*

**Kaplansky, Irving and John Riordan: The problem of the rooks and its applications.** Duke math. J. 13, 259—268 (1946).

De combien de manières peut-on placer  $k$  „tours“ sur un échiquier de forme donnée pour que deux d'entre elles ne puissent s'attaquer l'une l'autre. Pour un rectangle de  $m$  cases sur  $n$  cases la réponse est  $\binom{m}{k} \binom{n}{k} k!$ . Les A. obtiennent la réponse pour quelques autres formes; par exemple pour un triangle isocèle droit de côté  $n - 1$ , la réponse est le nombre de Stirling de seconde sorte,  $S(n - k, n) = \frac{n!}{k!} \binom{n}{k}$ . Des applications variées sont faites, par exemple la classification des permutations par ordre ascendant. Le nombre de manières de placer  $j$  „fous“ sur les cases noires d'un échiquier ordinaire est le coefficient de  $x^j$  dans le développement symbolique de  $T^n(T + x)^4$  où  $T^{n-1} = \sum_k S(n - k, n) x^k$ .

*S. Bays.*

(1) **Kaplansky, Irving: Solution of the „Problème des ménages“.** Bull. Amer. math. Soc. 49, 784—785 (1943).

(2) **Kaplansky, Irving and John Riordan: The problème des ménages.** Scripta math. 12, 113—124 (1946).

(3) **Joseph, A. W.: A problem in derangements.** J. Inst. Actuaries Students' Soc. 6, 14—22 (1946).

Les trois travaux se rapportent directement ou indirectement au problème des „ménages“ de Lucas: trouver le nombre de manières de placer  $n$  couples mariés à une table ronde, hommes et femmes alternant, de sorte que aucune femme ne soit assise à côté de son propre époux. Ce nombre est égal à  $2n! \lambda(n)$  où  $\lambda(n)$  est le nombre des permutations de  $1, 2, \dots, n$  avec une certaine propriété fixée. Plusieurs expressions de  $\lambda(n)$  ont été données par des voies différentes (voir en particulier Touchard, ce Zbl. 9, 3, et Schöbe, ce Zbl. 28, 2). (1) donne une formule assez explicite pour être appelée la solution du problème:  $\lambda(n) = (-1)^n 2 = (-1)^{n-1} n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{2r+1} r!$ . La preuve de la formule est faite par une intéressante application du principe de la classification „en croix“ de Cayley et Sylvester. (2) donne une nouvelle preuve de la formule ci-dessus au moyen d'une méthode symbolique. Les AA. prennent également en considération le cas plus large du problème de Lucas où exactement  $r$  maris sont placés près de leurs propres épouses. Ils obtiennent des formules explicites, des relations de récurrence et des expressions asymptotiques. (3) est la recherche du nombre



des permutations de  $n$  éléments telles que le  $i^{\text{ième}}$  élément n'est pas dans les positions  $i$  et  $i + 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , et le  $n^{\text{ième}}$  élément n'est pas dans la position  $n$ . Ses résultats sont en rapport avec les travaux précédents, en particulier avec le second; en effet, abstraction faite du facteur  $2n!$  le problème en question revient exactement à celui de Lucas avec une table en ligne droite. *S. Bays.*

Mendelsohn, N. S.: Symbolic solution of card matching problems. Bull. Amer. math. Soc. 52, 918—924 (1946).

Soit les nombres de cartes suivants, toutes différentes,  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Les  $a_i$  cartes sont marquées  $i$ . On demande de trouver le nombre des arrangements de ces cartes dans lesquels  $p_i$  places fixées sont interdites aux cartes  $i$  et le nombre de ceux dans lesquels ces mêmes cartes se trouvent  $s$  fois ou au plus  $s$  fois aux places interdites. Soit  $p_{ik}$  le nombre des places interdites à la fois aux cartes  $i$  et  $k$ . Dans le cas où tous les  $p_{ik} = 0$ , le problème a été résolu par Kaplansky [même Bull. 50, 906—914 (1944)]. L'A. obtient une solution dans le cas général sous forme d'une formule de récurrence qui donne la solution pour le système  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  en fonctions des solutions pour moins de  $n$  sortes de cartes. *S. Bays.*

### Lineare Algebra. Polynome:

● Sierpiński, Wacław: Grundlagen der höheren Algebra. Mit einem Anhang von Andrzej Mostowski: Auszug aus der Galoistheorie. Warszawa-Wrocław: Monografie Matematyczne, Vol. 11. 1946. XII, 347 p. [Polnisch].

Ore, Aadne: Über die Reduzibilität von Determinanten. Norsk mat. Tidsskr. 27, 10—12 (1945) [Norwegisch].

Milne-Thomson, L. M.: Determinant expansions. Math. Gaz. 25, 130—135 (1941).

Walther, A.: Zum Determinantenverfahren von Chiò. Z. angew. Math. Mech. 24, 41 (1944).

Chakrabarti, Satish Chandra: On a few recurrences. J. Indian math. Soc., n. Ser. 5, 18—26 (1941).

Facciotti, G.: Sopra una trasformazione nei determinanti di 2° ordine e su un rettangolo numerico ad essa connesso. Atti Secondo Congresso Un. mat. Ital., Bologna 1940, 1005—1012. Roma: Edizioni Cremonense 1942.

Vaulot, A.-E.: Application de trois types de déterminants au calcul des fréquences propres de systèmes oscillants couplés. Rev. gén. Électricité 48, 352—353 (1940).

Parodi, M.: Application des propriétés de trois types de déterminants au calcul des fréquences propres de systèmes oscillants couplés. Rev. gén. Électricité 47, 358—363 (1940).

Parodi, Maurice: Sur un type de polynômes rencontré dans l'étude des filtres électriques. Rev. gén. Électricité 51, 142—144 (1942).

Boaga, C.: Su talune relazioni ricorrenti fra le matrici normali angolari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 389—394 (1946).

Amici, Andrea: Sul determinante di Stern ed i coefficienti polinomiali. Atti Accad. Ligure Sci. Lett. 2, 183—186 (1942).

Zwei verschiedene Umformungen der Determinante  $S = \left| \binom{x_i}{k} \right|_{i=1, \dots, n; k=0, \dots, n-1}$  liefern folgende Beziehung:  $\sum (-1)^i \binom{x_{i_1}, x_{i_2}-1, \dots, x_{i_n}-n+1}{k} = k! V/x_1! \dots x_n!$  Dabei ist  $i_1, \dots, i_n$  eine Permutation der Zahlen  $1, \dots, n$  und  $i$  die Anzahl ihrer Inversionen.  $V$  ist die Vandermondsche Determinante von  $x_1, \dots, x_n$ , und es ist  $k = x_{i_1} + (x_{i_2} - 1) + \dots + (x_{i_n} - n + 1)$ . *H.-J. Kowalsky.*

**Cherubino, Salvatore:** Sopra un certo pfaffiano. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **13**, 30—35 (1942).

Für  $\kappa, \lambda = 1, \dots, 2n$  sei  $a_{\kappa\lambda} = -a_{\lambda\kappa}$ ; ferner sei  $b_{\kappa\lambda} = 1$  für  $\kappa = \lambda + n$ ,  $b_{\kappa\lambda} = -1$  für  $\kappa = \lambda - n$ ,  $b_{\kappa\lambda} = 0$  sonst. Dann ist der Pfaffsche Ausdruck (die Wurzel aus der Determinante) der Matrix  $(a_{\kappa\lambda} - x b_{\kappa\lambda})$  ein Polynom vom Grade  $n$  in  $x$ , dessen Koeffizienten linear durch die Pfaffschen Ausdrücke der Hauptminoren von  $(a_{\kappa\lambda})$  ausgedrückt werden können.

*H. Wielandt.*

**Tenea, Luigi:** Ricerche sui determinanti di differenza. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **76** (III. Ser. 7) 127—134 (1943).

**Tenea, Luigi:** Relazioni fra i minori di matrici di Hankel. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **77** (III. Ser. 8) 141—148 (1944).

Bilden in einer  $n$ -zeiligen Matrix  $A = (a_{ik})$  die Elemente der  $i$ -ten Zeile eine arithmetische Progression ( $i - 1$ -ter Ordnung (so daß  $\prod_{k=1}^{i-1} a_{ik} = d_i$  unabhängig von  $k$  ist), so lassen sich gewisse Unterdeterminanten von  $A$  durch die  $d_i$  allein ausdrücken. Greift man z. B.  $n - v$  aufeinander folgende Spalten heraus und läßt von diesen  $v$  aufeinander folgende weg, etwa die mit den Indizes  $s + 1, \dots, s + v$ , so hat die entstehende  $n$ -reihige Unterdeterminante den Wert  $d_1 d_2 \dots d_n \cdot \det(c_{\alpha\beta})$  mit  $c_{\alpha\beta} = \binom{n}{s + \alpha - \beta}$ ;  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, v$ . Hieraus wird in der zweiten Arbeit geschlossen: Leitet man aus einer Zahlenfolge  $a_1, a_2, \dots$  die neue Folge  $b_1, b_2, \dots$  durch  $m$ -fach wiederholte Bildung der Summe von je zwei benachbarten Gliedern ab, so läßt sich die Summe der Unterdeterminanten  $(n - m)$ -ten Grades der  $n \times (n - m)$ -Matrix  $(b_{i+k})$  ausdrücken als eine Linearverbindung der Unterdeterminanten desselben Grades der  $n \times n$ -Matrix  $(a_{i+k})$ .

*H. Wielandt.*

**Giuga, G.:** Alcune estensioni del determinante di Vandermonde. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. **12**, 263—296 (1942).

34 Typen meist bekannter Determinanten werden in systematischer Reihenfolge entwickelt. So besonders die Determinanten von Vandermonde, Stern und Trudi, ihre Verallgemeinerungen und daran anknüpfende neue Typen. Durchgehend handelt es sich dabei um Determinanten, die aus Binomialkoeffizienten und ganzzahligen Parametern aufgebaut sind.

*H.-J. Kowalsky.*

**Bellman, Richard:** A note on determinants and Hadamard's inequality. Amer. math. Monthly **50**, 550—551 (1943).

Der trivialen Identität  $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 \end{vmatrix}^2$  wird auf Grund einer geometrischen Interpretation ein 3-dimensionales Analogon zur Seite gestellt. Eine entsprechende Ausdehnung auf höhere Dimensionen ist möglich.

*H.-J. Kowalsky.*

**Aitken, A. C.:** On the number of distinct terms in the expansion of symmetric and skew determinants. Edinburgh math. Notes Nr. **34**, 1—5 (1944).

Für die Anzahl  $u_n$  der in der Entwicklung einer symmetrischen Determinante vom Grade  $n$  auftretenden verschiedenen Terme gilt die von Cayley angegebene Formel  $u_n = n u_{n-1} - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)u_{n-3}$ . Für diese und ähnlich geartete Formeln gibt Verf. neue und elementare Beweise an.

*H.-J. Kowalsky.*

**Woude, W. van der:** Über Parameterdarstellungen mit Anwendung der Cayleyschen Formel. Nederl. Akad. Wet., Proc. **49**, 866—877 = Indagationes math. **8**, 537—548 (1946) [Holländisch].

Beschreibt man eine gegebene Mannigfaltigkeit mit Hilfe einer Parameterdarstellung, so kann es vorkommen, daß gewisse Punkte der Mannigfaltigkeit nicht direkt erfaßt werden, sondern erst durch einen Grenzprozeß erreicht werden können. Auch bei homogener Darstellung können solche Limespunkte existieren, wie an verschiedenen Beispielen — so insbesondere an der Fläche von Segre —



gezeigt wird. Dieser Sachverhalt wird allgemeineren Gesichtspunkten untergeordnet und auf gewisse Problemstellungen bei orthogonalen Matrizen angewandt. Ist  $(a_{ik})$  eine orthogonale Matrix mit  $|a_{ik}| = \pm 1$ , so sei  $a_{ik}^\pm = a_{ik} \pm \delta_{ik}$ , und  $b_{ik}$  seien die algebraischen Komplemente der  $a_{ik}^\pm$ . Dann gilt  $b_{ii} = \frac{1}{2}|a_{ik}^\pm|$  und  $b_{ik} = -b_{ki}$  ( $i \neq k$ ). Ist andererseits eine Matrix  $(b_{ik})$  mit diesen Eigenschaften gegeben, so kann man umgekehrt eine eigentlich orthogonale Matrix  $(a_{ik})$  angeben, deren Elemente homogene Funktionen in den  $b_{ik}$  vom Grade Null sind. Die Determinanten eigentlich orthogonaler Matrizen, die nicht auf diese Art gewonnen werden können, heißen Aussonderungsdeterminanten. Die Existenz solcher Aussonderungsdeterminanten wird für die Fälle  $n = 2, 3, 4$  untersucht. Bei den Beweisen werden die oben genannten Gesichtspunkte verwandt.

H.-J. Kowalsky.

Raymond, François: Sur certains déterminants intervenant dans la théorie des oscillations de systèmes symétriques. *Revue sci.* 80, 128—129 (1942).

Die  $n$ -reihige zyklische Determinante (Zirkulante)  $A = (d_{ik})$  mit  $d_{ik} = d_{1, k-i}$  (Indizes mod  $n$ ) kann in der Form  $A = A_0 \dots A_{n-1}$  dargestellt werden. Dabei ist  $A_k = \sum_i a^{-(i-1)k} d_{1,i}$  und  $a = e^{2\pi i/n}$ . Es werden Spezialfälle diskutiert; insbesondere der symmetrische Fall.

H.-J. Kowalsky.

(1) Williamson, John: Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares. *Duke math. J.* 11, 65—81 (1944).

(2) Williamson, John: Determinants whose elements are 0 and 1. *Amer. math. Monthly* 53, 427—434 (1946).

(3) Turowicz, A.: Sur un propriété des déterminants. *Ann. Soc. Polon. Math.* 18, 118—122 (1945).

Behandlung der Frage nach Extremwerten von  $n$ -reihigen Determinanten, deren Elemente geeignet beschränkt sind. Ist  $A = (a_{ik})$  eine quadratische Matrix der Ordnung  $n$  mit  $|a_{ik}| \leq 1$ , so gilt  $|A| \leq n^{n/2}$ . Notwendig dafür, daß der Maximalwert  $n^{n/2}$  angenommen wird, ist:  $a_{ik} = \pm 1$  und  $n = 1, 2$  oder  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Ob diese Bedingungen auch hinreichend sind, ist nicht bekannt. Die Existenz von  $H$ -Matrizen (Matrizen, deren Determinante den Maximalwert annimmt) wurde von Paley (dies. Zbl. 7, 100) für folgende Werte von  $n$  bewiesen: (1)  $n = 1, 2$ . (2)  $n = p^h + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ . (3)  $n = 2(p^h + 1)$  mit  $p \not\equiv 0 \pmod{2}$ . (4)  $n = p(p + 1)$  mit  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Weiter existieren  $H$ -Matrizen für alle  $n$ , die sich als Produkte von Faktoren der Typen (1)—(4) darstellen lassen. — In (1) werden mittels der Paleyschen Methode der Legendresymbole über Galoisfeldern folgende Resultate gewonnen: Existiert eine  $H$ -Matrix der Ordnung  $m$ , so auch der Ordnung  $m(p^h + 1)$  mit  $p \not\equiv 0 \pmod{2}$ . Ist  $k_i = p^{h_i} + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ , so existiert eine  $H$ -Matrix der Ordnung  $N = 2^t k_1 \dots k_r$  von der Form  $E + C$  ( $E$  Einheitsmatrix,  $C$  schiefsymmetrisch) sowie eine  $H$ -Matrix der Ordnung  $N(N + 1)$ . Mittels einer neuen Methode, bei der ganzzahlige Quaternionen herangezogen werden, gelingt Verf. über Paley hinaus die Konstruktion von verschiedenen  $H$ -Matrizen für dasselbe  $n$ . Überdies wird als neues Resultat die Existenz einer  $H$ -Matrix der Ordnung 172 nachgewiesen. Die erwähnte Methode führt auf die Auflösung gewisser Gleichungssysteme, die in engem Zusammenhang stehen mit der Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von vier Quadraten. — (2) untersucht die Maximalwerte von Determinanten mit Elementen  $a_{ik} = \pm 1$ , jedoch  $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ . Für  $n = 7$  ist dieser Wert  $2^6 \cdot 9$ , und es gibt im wesentlichen nur einen Typ von solchen Determinanten. Für  $n = 9, 10, 11$  sind die Ergebnisse weniger vollständig. Die Werte dieser Determinanten sind absolut größer als der irgendeines Minors  $n$ -ter Ordnung der 12-reihigen  $H$ -Matrix. Die Beweise stützen sich auf ein Reduktionsverfahren, das umgekehrt zur Konstruktion von Beispielen ausgenutzt wird. — Eine analoge Frage nach dem Minimalwert von Determinanten, deren Elemente  $a_{ik}$  der Be-

dingung  $|a_{ik} - \delta_{ik}| \leq a \leq n^{-1}$  ( $a > 0$ , beliebig;  $\delta_{ik}$  Kroneckersymbol) genügen, wird in (3) behandelt: Der Minimalwert solcher Determinanten ist  $1 - na$ . Hierfür wird ein neuer, elementarer Beweis angegeben. Weiter ergibt sich: Eine Determinante der angegebenen Art nimmt genau dann den Minimalwert an, wenn es Zahlen  $\eta_1, \dots, \eta_n$  mit  $|\eta_i| = 1$  gibt derart, daß  $a_{ik} = b_{ik} \eta_i \eta_k$ , wobei  $b_{ik} = \delta_{ik} - a$ .  
H.-J. Kowalsky.

Albert, A. A.: A rule for computing the inverse of a matrix. Amer. math. Monthly 48, 198—199 (1941).

Garnir, Henri: Sur la détermination des matrices satisfaisant à un système de relations de la théorie du méson. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 539—540 (1946).

● Gantmacher, F. R. and M. G. Krein: Oszillationsmatrizen und kleine Oszillationen mechanischer Systeme. Moskov-Leningrad 1941 [Russisch].

Dmitriev, N. and E. Dynkin: On the characteristic numbers of a stochastic matrix. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 49, 159—162 (1945).

Dmitriev, N. and E. Dynkin: On characteristic roots of stochastic matrices. Izvestija Akad. Nauk SSSR. Sér. math. 10, 167—184 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Sarymsakov, T. A.: Sur les suites des matrices stokhastiques. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 47, 326—328 (1945).

Maruasvili, T. L.: Über die Wurzeln von Determinanten, die die kritische Spannung bestimmen. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 7, 103—111 (1946) [Russisch].

Dubnov, J. et V. Ivanov: Sur l'abaissement du degré des polynômes en affineurs. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 41, 95—98 (1943).

Das Produkt  $A_1 A_2 \dots A_N$  von  $N$  Matrizen  $n$ -ten Grades kann bei  $N \geq 2^n - 1$  stets reduziert werden auf eine Summe von Produkten mit höchstens  $N - 1$  Faktoren.  
R. W. Weitzenböck.

● MacDuffee, Cyrus Colton: Vectors and matrices. Carus Monograph Series, Nr. 7. Ithaca, N. Y.: Mathematical Association of America 1943. XI, 192 p.; \$ 2,00.

Fundamentale Sätze aus der Theorie der Matrizen, im wesentlichen Reduktion der Matrizen auf Normalformen.  
K. Shoda.

Clippinger, R. F.: Matrix products of matrix powers. Bull. Amer. math. Soc. 50, 368—372 (1944).

Seien  $A_i, i = 1, \dots, m$ , Matrizen des Grades  $n$  mit komplexen Elementen. Die Menge der Matrizen  $\prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^m (\exp A_{ij})^{\alpha_{ij}}$  mit nichtnegativen  $\alpha_{ij}$  bezeichnet man mit  $\mu$ . Die abgeschlossene Hülle von  $\mu$ , aufgefaßt als Punktmenge in einem  $2n^2$ -dimensionalen Euklidischen Raum, wird als die abgeschlossene Hülle einer Punktmenge angegeben, die durch eine Differentialgleichung charakterisiert wird.  
K. Shoda.

Blumenthal, L. M.: Note on an extension of matrix rank. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 4, 235—241 (1944).

Eine Matrix  $R = (r_{ij})$  heißt von einem relativen Rang  $\rho$  bezüglich einer Menge von Matrizen  $\{\varepsilon\}$ , wenn es eine Matrix  $\varepsilon = (e_{ij})$  gibt derart, daß  $(e_{ij} r_{ij})$  den Rang  $\rho$  hat. Bei der Untersuchung der relativen Ränge beschränkt sich Verf. auf reelle symmetrische Matrizen  $R$  und die Menge  $\{\varepsilon\}$  aller symmetrischen Matrizen mit  $e_{ii} = 1, e_{ij} = \pm 1$ .  
K. Shoda.

(1) Amato, V.: Funzioni di matrici. Eserc. mat., Catania, II. Ser. 13, Fasc. 7—10, 4 p. (1941).

(2) Amato, V.: Sui polinomi di matrice. Atti Accad. Gioenia Sci. natur. Catania, VI. Ser. 5, Nr. IV, 5 p. (1942).

(1) besteht im wesentlichen aus einer Aufzählung von 30 italienischen Arbeiten über Definition und Eigenschaften von  $f(A)$ , wobei  $f$  eine analytische



Funktion einer komplexen Veränderlichen und  $A$  eine quadratische komplexe Matrix bedeuten. (2) zeigt: Zwei  $n \times n$ -Matrizen  $A, B$  sind genau dann mit denselben Matrizen vertauschbar, wenn  $B$  als Polynom in  $A$  geschrieben werden kann, etwa  $B = p(A)$ , und außerdem für jeden Eigenwert  $\alpha$  von  $A$  gilt:  $\text{Rang}(B - p(\alpha)E)^m = \text{Rang}(A - \alpha E)^m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). *H. Wielandt.*

**Palermo, F.:** Sull' equazione minima di una matrice. Boll. Accad. Gioenia Sci. natur. Catania, III. Ser. 18, 26—32 (1942).

Verf. leitet den bekannten Zusammenhang zwischen den Elementarteilern einer quadratischen Matrix  $A$  und der Gleichung niedrigsten Grades  $f(A) = 0$  mittels der Jordanschen Normalform von  $A$  her. *H. Wielandt.*

**Zin, Giovanni:** Sui sistemi di equazioni lineari a coefficienti dipendenti linearmente da un parametro. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 79, 209—219 (1944).

Eigenvektoren  $x_1, \dots, x_p$  zu paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  der Aufgabe  $Ax = \lambda Bx$  sind stets linear unabhängig. Hierbei bedeuten  $A, B$  beliebige  $n \times n$ -Matrizen. *H. Wielandt.*

**Yen, Chih-ta:** On matrices whose associated matrices are equal. Sci. Record 1, 87—90 (1942).

$T(A)$  sei eine nichtsinguläre assoziierte Matrix [vgl. Wedderburn, Lectures on matrices (dies. Zbl. 10, 99), p. 76—87]. Verf. beweist: Aus  $T(A) = T(B)$  folgt unter gewissen Bedingungen  $A = \omega B$  mit Einheitswurzel  $\omega$ . *K. Shoda.*

**Lee, H. C. and S. L. Liang:** Some properties of Hermitian matrices. Sci. Record 1, 321—324 (1945).

Eine Identität von Lagrange für die positiv definiten Hermiteschen Matrizen läßt sich auf gewisse Hermitesche Matrizen übertragen. *K. Shoda.*

**Chu, Fu-Tsu:** Determination of the class number of Hermitian forms with determinant  $\pm 1$ . Sci. Record 1, 325—329 (1945).

**Liang, S. L.:** The polar factorisation of a singular matrix. Sci. Record 1, 330—331 (1945).

Jede singuläre Matrix  $A$  läßt sich in der Form  $A = UP$  darstellen, wo  $P$  eine positiv semidefinite Hermitesche Matrix und  $U$  eine unitäre Matrix ist. Die Matrix  $P$  ist dabei eindeutig bestimmt. *K. Shoda.*

**Ghosh, N. N.:** A note on Hermitian matrix. Bull. Calcutta math. Soc. 36, 87—90 (1944).

Verf. studiert die Darstellung einer Hermiteschen Matrix als lineare Verbindung einfacher Hermitescher Matrizen. *K. Shoda.*

**Ghosh, N. N.:** On a new reduction theorem of matrices. Bull. Calcutta math. Soc. 37, 33—36 (1945).

**Ghosh, N. N.:** On some properties of complex operational matrices. Bull. Calcutta math. Soc. 38, 96—100 (1946).

**Venkatachaliengar, K.:** Pairs of symmetric and skew matrices in an arbitrary field. I. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 22, 243—264 (1945).

Neue Methode, eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß ein Paar von symmetrischen Matrizen  $A, B$  zu einem Paar  $C, D$  in einem Körper von beliebiger Charakteristik  $\neq 2$  äquivalent ist. *K. Shoda.*

**Cheng, Tseng-Tsun:** Generalisation of De Moivre's and Fourier's theorems to matrices. Coll. Papers Sci. Engin. nat. Univ. Amoy 1, 65—68 (1943).

Verallgemeinerung der Darstellung der komplexen Zahlen durch binäre Matrizen. *K. Shoda.*

**Bambah, R. P. and S. Chowla:** On integer roots of the unit matrix. Science and Culture 12, 105 (1946).

Andeutung eines zahlentheoretischen Beweises folgenden Satzes: Jede ganzzahlige zweireihige Matrix  $A \neq E$ , deren dritte Potenz die Einheitsmatrix  $E$  ist, ist zu der Begleitmatrix des Polynoms  $x^2 + x + 1$  unimodular ähnlich.

*H. Wielandt.*

**Hsu, P. L.: On a factorization of pseudo-orthogonal matrices.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 17, 162—165 (1946).

Sei  $I_{p,-q}$  die Matrix des Grades  $p+q$ , die die direkte Summe der Einheitsmatrix  $I_p$  des Grades  $p$  und  $-I_q$  ist. Eine Matrix  $A$  des Grades  $p+q$  heißt pseudo-orthogonal, wenn  $A I_{p,-q} A' = I_{p,-q}$  ist. Eine Zerlegung von  $A$  mit  $p \leq q$  in ein Produkt von Matrizen wird angegeben.

*K. Shoda.*

**Hua, Loo-Keng: Orthogonal classification of Hermitian matrices.** Trans. Amer. math. Soc. 59, 508—523 (1946).

Zwei Hermitesche Matrizen  $H, H_1$  heißen orthogonal konjunktiv, wenn es eine orthogonale Matrix  $P$  mit  $PHP' = H_1$  gibt. Man beweist leicht, daß  $HH$  und  $H_1\bar{H}_1$  ähnlich sind. Verf. beweist: 1) Die Anzahl der Elementarteiler für negative Eigenwerte von  $H\bar{H}$  ist gerade und die komplexen Elementarteiler treten stets mit den konjugierten paarweise auf. 2) Die Elementarteiler von  $H\bar{H}$ , zusammen mit einem für jeden positiven Elementarteiler fixierten Vorzeichen, bestimmen  $H$  bis auf eine orthogonale konjunktive Transformation. Verf. betrachtet allgemeiner auch Paare  $(H, S), (H_1, S_1)$ , wo  $S, S_1$  nichtsinguläre Matrizen sind, zudem die Gruppe der Matrizen  $P$  mit  $\bar{P}HP' = H, PSP' = S$  und erhält einen Satz über die Anzahl der Parameter der Gruppe.

*K. Shoda.*

**Williamson, John: A generalization of the polar representation of nonsingular matrices.** Bull. Amer. math. Soc. 48, 856—863 (1942).

Der Begriff der polaren Darstellung läßt sich folgendermaßen verallgemeinern. Die Darstellung  $A = DR$  einer nichtsingulären Matrix  $A$  heißt  $H$ -Darstellung, wenn  $DH = HD^*, RHR^* = H$  für eine nichtsinguläre Hermitesche Matrix  $H$ . Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer  $H$ -Darstellung von  $A$  und auch für die Eindeutigkeit von  $D$  werden angegeben.

*K. Shoda.*

**Williamson, John: Note on the equivalence of nonsingular pencils of Hermitian matrices.** Bull. Amer. math. Soc. 51, 894—897 (1945).

Verallgemeinerung der Resultate des Verf. (dies. Zbl. 12, 4) für Matrizen im Körper der Charakteristik  $\neq 2$ .

*K. Shoda.*

**Niven, Ivan: Two observations concerning algebraic equations for matrices.** Amer. J. Math. 65, 660—662 (1943).

Sei  $A$  eine Matrix in einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Verf. erhält eine Methode, sämtliche Lösungen  $W = f(A)$  einer algebraischen Gleichung  $P(W, A) = 0$  mit einer Variablen  $W$  anzugeben, wobei  $f(A)$  ein Polynom von  $A$  ist.

*K. Shoda.*

**Lagerstrom, Pao: A proof of a theorem on commutative matrices.** Bull. Amer. math. Soc. 51, 535—536 (1945).

Die Gesamtheit der mit einer Matrix  $A$  vertauschbaren Matrizen bildet einen Ring. Das Zentrum des Ringes ist der Polynombereich von  $A$ . Dieser bekannte Satz wird bewiesen. Vgl. K. Shoda, Math. Z. 29, 696—712 (1929).

*K. Shoda.*

**Smiley, M. F.: The rational canonical form of a matrix.** Amer. math. Monthly 49, 451—454 (1942).

Methode, eine Matrix ähnlich durch elementare Transformationen in die Normalform mit den sogenannten Begleitmatrizen zu bringen.

*K. Shoda.*

**Foulkes, H. O.: Collineatory transformation of a square matrix into its transpose.** J. London math. Soc. 17, 70—80 (1942).



Lösungen der Matrixengleichung  $HA = A'H$  für eine vorgegebene Matrix  $A$ , falls der Grad gleich 2, 3 ist. Für Matrizen höheren Grades gibt Verf. eine Lösungsmethode an.  
*K. Shoda.*

**Egan, M. F.:** Symmetric matrices and quadratic forms. Math. Gaz. 29, 89—91 (1945).

Beweis bekannter Sätze über symmetrische Matrizen durch Reduktion quadratischer Formen.  
*K. Shoda.*

(1) **Chevalley, Claude:** A new kind of relationship between matrices. Amer. J. Math. 65, 521—531 (1943).

(2) **Tuan, Hsio-Fu:** A note on the replicas of nilpotent matrices. Bull. Amer. math. Soc. 51, 305—312 (1945).

(3) **Cohen, I. S.:** Note on a note of H. F. Tuan. Bull. Amer. math. Soc. 52, 175—177 (1946).

(1): Verf. führt den Begriff „replica“ ein.  $X, Y$  seien Matrizen von den Graden  $m, n$ . Unter der Kroneckerschen Summe  $X \oplus Y$  versteht man eine Matrix  $X \times E_n + E_m \times Y$  des Grades  $m+n$ . Man setze  $X_{r,s} = X^* + \dots + X^* + X + \dots + X$  mit  $r$ -mal  $X^*$  und  $s$ -mal  $X$ , wo  $X^* = -X'$  (negative Transponierte) ist. Ein Vektor in dem  $m'+s$ -dimensionalen Raum heißt eine Invariante von  $X$ , wenn  $X_{r,s}e = 0$  ist. Eine Matrix  $Y$  heißt eine „replica“ von  $X$ , wenn jede Invariante von  $X$  auch eine von  $Y$  ist. Ist der Grundkörper perfekt, so wird die Bestimmung der „replica“ auf die folgenden speziellen Fälle reduziert: 1)  $X$  ist halbeinfach, 2)  $X$  ist nilpotent. Der halbeinfache Fall wird leicht erledigt. Ist  $X$  nilpotent und ist der Grundkörper  $k$  von der Charakteristik 0, so ist jede „replica“ von  $X$  gleich  $\alpha X$  mit  $\alpha \in k$ . (2): Bestimmung der „replica“ einer nilpotenten Matrix für den Grundkörper der Charakteristik  $p$ . Dasselbe in (3) mit vereinfachendem Verfahren.  
*K. Shoda.*

**Parker, W. V.:** The characteristic roots of matrices. Duke math. J. 12, 519—526 (1945).

Eine komplexe  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit den Eigenwerten  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) ist genau dann normal, wenn  $AA^*$  die Eigenwerte  $\alpha_k \bar{\alpha}_k$  oder wenn  $A + A^*$  die Eigenwerte  $\alpha_k + \bar{\alpha}_k$  besitzt. Durch passende Wahl der unitären Matrix  $U$  kann man erreichen, daß  $AU$  das Spektrum  $\{|\alpha_k|\}$  erhält, oder daß  $AU$  eine vorgeschriebene Zahl  $\sigma$  mit  $\min |\alpha_k| \leq \sigma \leq \max |\alpha_k|$  als einen Eigenwert hat, oder daß  $(AU)^n = E \det A$  wird, oder schließlich daß mit  $\text{Rang } A = r$  gilt:  $(AU)^p = 0$  für jedes  $p \geq n/(n-r)$ .  
*H. Wielandt.*

**Loomis, Lynn H.:** On a theorem of von Neumann. Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 213—215 (1946).

Verf. gibt einen elementaren, keinen Fixpunktsatz benutzenden Induktionsbeweis für den folgenden Satz von J. v. Neumann (dies. Zbl. 17, 39): Zu je zwei  $n \times m$ -Matrizen  $A > 0, B$  gibt es genau eine Zahl  $\lambda$  derart, daß  $Bx \leq \lambda Ax, B'y \geq \lambda A'y$  durch nichtverschwindende Spalten  $x \geq 0, y \geq 0$  gelöst werden kann (die Ungleichungen sind elementweise zu verstehen, ' bedeutet Transposition). Im Sonderfall  $B =$  Einheitsmatrix ist  $\lambda$  die Maximalwurzel von  $A, x$  und  $y$  sind die zugehörigen Eigenvektoren von  $A$  und  $A'$ .  
*H. Wielandt.*

**Duncan, W. J.:** Factorization of a class of determinants and applications to dynamical chains. Philos. Mag., VII. Ser. 36, 615—622 (1945).

$U = (u_{ik})$  sei eine Matrix der Ordnung  $n$ , die durch die Transformation  $TUT^{-1} = R$  auf Diagonalform gebracht werden kann. Weiter seien  $P$  und  $C$  Matrizen der Ordnung  $m$  und  $F = (u_{ik} C + \delta_{ik} P)$ , also eine Matrix der Ordnung  $m \cdot n$ . Dann ist  $|F| = \prod_{\sigma=1}^n |P + \varrho_{\sigma} C|$ , wobei die  $\varrho_{\sigma}$  die Eigenwerte von  $U$  bedeuten. Transformation von  $F$  mit der Matrix  $J = (t_{ik} E_m)$  ( $E_m$  Einheitsmatrix

der Ordnung  $m$ ) liefert nämlich die Matrix  $((P + \varrho_{\sigma} C) \delta_{\sigma, t})$ . Solche Faktorzerglegungen spielen in der Elastizitätstheorie und besonders bei Tragflügelproblemen in der Aerodynamik eine wesentliche Rolle. Beispiele für derartige Anwendungen werden ausführlich diskutiert.

*H.-J. Kowalsky.*

**Duncan, W. J.:** Properties of characteristic numbers and modes deduced by matrix methods. Ministry of Aircraft Production (London). Aeronaut. Res. Committee, Rep. and Memoranda Nr. 2006 (8095 & 8447). 1—15 (1941).

**Todd-Taussky, Olga:** Appendix. A note on skew-symmetric matrices. Ministry of Aircraft Production (London). Aeronaut. Res. Committee, Rep. and Memoranda Nr. 2006 (8095 & 8447), 16—18 (1944).

**Manley, R. G.:** Roots of frequency equations. Nature and distribution of roots. Aircraft Engineering 16, 203 (1944).

Duncan gibt eine Einführung in die Verwendung der Matrizen Schreibweise bei Schwingungsvorgängen und beweist die wichtigsten Eigenschaften der Eigenwerte und der (von vornherein zu einer „modal matrix“  $V$  zusammengefaßten) Eigenvektoren von (schief- oder) symmetrischen, (schief- oder) hermiteschen, orthogonalen und unitären Matrizen  $A$ . (Ungenauigkeiten: S. 7, Z. 2 v. u. ergänze „ $C$  positive definite“; S. 11, Z. 5 streiche „square“.) Die Bemerkungen von O. Todd-Taussky betreffen die Gestalt von  $V'V$  und  $VV'$  für reelles schiefsymmetrisches  $A$ . Manley versucht die (für  $A = B$  offensichtlich falsche Behauptung) zu beweisen: Sind  $A, B$  positiv definite reelle symmetrische Matrizen, so hat  $\det(A - \lambda B) = 0$  lauter verschiedene Wurzeln.

*H. Wielandt.*

**Wagner, E.:** Die Elementarteiler eines Polynoms in einer Matrix. Math. Z. 49, 328—338 (1944).

**Wagner, E.:** Über Shodasche Matrizen und Polynome in einer Matrix. Math. Z. 49, 517—537 (1944).

Ist  $\mathfrak{R}_n$  die Gesamtheit der  $n \times n$ -Matrizen mit Elementen aus einem Körper  $\mathfrak{K}$ , so kann man zu jedem  $A \in \mathfrak{R}_n$  mit gegebenen Elementarteilern  $a_{\sigma} \in \mathfrak{K}[t]$  ( $\sigma = 0, \dots, s-1$ ),  $a_{\sigma} a_{\sigma-1}$ , und zu jedem Polynom  $f \in \mathfrak{K}[x]$  die Elementarteiler von  $f(A)$  explizit angeben (N. H. McCoy, dies. Zbl. 12, 98). Verf. führt dies ohne Kenntnis der Arbeit von McCoy durch, im wesentlichen auf demselben Wege. Als Anwendung bestimmt er die Anzahl der Klassen ähnlicher Lösungen  $X \in \mathfrak{R}_n$  von  $f(X) = A$ , sowie die Anzahl derjenigen Lösungen  $X$ , welche ihrerseits Polynome in  $A$  sind. Die Struktur des Ringes der mit  $A$  vertauschbaren Matrizen  $B$  kann nach Shoda [Math. Z. 29, 696—712 (1929)] durch eine Matrix  $S = (s_{ik})$  beschrieben werden, wobei  $s_{ik} \in \mathfrak{K}[t]$ ,  $a_k | a_i s_{ik}$  gilt ( $i, k = 0, \dots, s-1$ ). Verf. untersucht das Ähnlichkeitsproblem in dem Ring  $\mathfrak{S}$  aller dieser „Shoda-Matrizen“ mit idealtheoretischen Hilfsmitteln. Charakteristik  $\mathfrak{K}$  gleich 0 vorausgesetzt. Ordnet man jedem  $S \in \mathfrak{S}$  das „charakteristische Ideal“  $a_S = (a_0 d_0, \dots, a_{s-1} d_{s-1}, d_s)$  im Ring  $\mathfrak{K}[t, x]$  zu, worin  $d_{\sigma}$  die  $\sigma$ -te Abschnittsdeterminante von  $S$  bedeutet, so ist die Bedingung  $a_S = a_T$  notwendig (aber nicht hinreichend) für die Existenz eines  $U \in \mathfrak{S}$  mit  $T = USU^{-1}$ . Auch aus  $s_{ik} \equiv t_{ik} \pmod{a_k}$  (kurz:  $S \equiv T$ ) folgt  $a_S = a_T$ . Eine weitere Invariante gegenüber Ähnlichkeitstransformation in  $\mathfrak{S}$  ist das „Minimalideal“  $m_S$ ; es besteht aus denjenigen  $m \in \mathfrak{K}[t, x]$ , für welche  $m(tE, S) \equiv 0$  gilt. Diese Hilfsmittel werden zum Aufbau einer im Anschluß an Krull abstrakt formulierten Äquivalenztheorie für Paare vertauschbarer Matrizen verwendet. Verf. bezeichnet einen  $\mathfrak{K}$ -Modul  $\mathfrak{A}$  von endlichem Rang als eine Elementarteilergruppe 2. Art, wenn auf ihm zwei miteinander vertauschbare Operatoren  $A$  und  $B$  definiert sind. Bei festgehaltenem  $\mathfrak{A}$  und  $A$  bestimmt jedes  $B$  eineindeutig eine Ähnlichkeitsklasse von Shodamatrizen  $S$ , daher ein charakteristisches Ideal und ein Minimalideal. Diese fallen zusammen, wenn  $\mathfrak{A}$  zyklisch

ist, d. h.  $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}[A, B] r_0$  für ein  $r_0 \in \mathfrak{A}$ , und werden dann in einem interessanten Sonderfall explizit bestimmt ( $\mathfrak{K}$  algebraisch abgeschlossen,  $B = f(A)$ ,  $\mathfrak{A}$  direkt unzerlegbar). H. Wielandt.

**Vogel, Alfred:** Das charakteristische Polynom einer Matrix und die Trennung seiner Wurzeln. Deutsche Math. 7, 521—552 (1944).

Jede 3- oder 4-reihige Matrix kann durch Ähnlichkeitstransformation rational auf eine Normalform  $C$  gebracht werden, in welcher die Elemente der  $i$ -ten Zeile alle den gleichen Wert  $c_i$  haben, abgesehen vom Diagonalelement  $c_{ii} = c_i + d_i$ . Ist  $C$  reell und haben zwei  $c_i$  dasselbe Vorzeichen, so schließen die entsprechenden  $d_i$  einen reellen Eigenwert von  $A$  oder ein weiteres  $d_i$  ein. H. Wielandt.

(1) Dresden, A.: On the iteration of linear homogeneous transformations Bull. Amer. math. Soc. 48, 577—579 (1942).

(2) Dresden, A.: A correction to „On the iteration of linear homogeneous transformations“. Bull. Amer. math. Soc. 48, 949 (1942).

(1) Transformation auf Jordans Normalform ergibt, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x$  ( $A$  quadratische Matrix,  $x$  Spaltenvektor) nur dann für alle  $x$  existiert, wenn der Betrag keiner charakteristischen Wurzel von  $A$  größer als 1 ist, und wenn er nur für solche charakteristischen Wurzeln gleich 1 ist, die lediglich in Kästchen der Seitenlänge 1 auftreten. (2) R. Oldenburger hat das Resultat schon früher (dies. Zbl. 23, 197) veröffentlicht. G. Lochs.

**Schwerdtfeger, H.:** On contact transformations associated with the symplectic group. J. Proc. roy. Soc. New South Wales 76, 177—181 (1942).

Frobenius zeigte 1879: Die Determinante einer symplektischen Transformation  $y = Ax + Bp$ ,  $q = Cx + Dp$  ( $x, y, p, q$  Spaltenvektoren mit  $n$  Zeilen,  $A, B, C, D$   $n$ -reihige Matrizen) ist  $+1$ . Sein Beweis und alle folgenden Beweise waren umständlich, bis Radon mittels eines Lemmas (dies. Zbl. 21, 291), das er mittels Stetigkeitsbetrachtungen bewies, einen einfachen Beweis gab. Hier gelingt der Beweis rein algebraisch und einfach, wenn  $\det A$  oder  $\det B$  nicht verschwindet. Der allgemeine Fall wird mittels des Radonschen Lemmas erledigt, für das ein rein algebraischer Beweis gegeben wird, der aber, wie Verf. mitteilt, falsch ist. Einen korrekten Beweis habe G. Papy (dies. Zbl. 28, 3) gegeben. G. Lochs.

**Morita, Kiiti:** Über normale antilineare Transformationen. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 715—720 (1944).

Eine Transformation (T.) im  $n$ -dimensionalen komplexen Vektorraum, die aus dem Übergang zum konjugiert komplexen Vektor und einer nachfolgenden linearen T. zusammengesetzt ist, heißt antilineare T. (a. T.). Die mit der transponierten Koeffizientenmatrix gebildete a. T. heißt zur ersten transponiert. Eine mit ihrer transponierten vertauschbare a. T. heißt normal, die zugehörige Matrix quasinormal. Bedeutet  $A'$  die transponierte zu  $A$ , so ist  $AA' = A'\bar{A}$  gleichbedeutend mit quasinormal. Es wird gezeigt: 1) Eine quasinormale Matrix kann durch Transformation mit einer unitären auf folgende Form gebracht werden: Längs der Hauptdiagonale sind zweireihige Kästchen  $\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}$  und einreihige Kästchen  $a$  aneinandergereiht, alle  $a$  und  $b$  sind reell, nichtnegativ, außerhalb der Kästchen sind alle Elemente 0. 2) Ist  $A$  quasinormal,  $AA'\bar{A}$  reell, so kann  $A$  durch eine reelle, orthogonale T. auf die beschriebene Gestalt mit komplexen  $a$  und  $b$  gebracht werden. 3) Sind mehrere a. T. miteinander und mit ihren Transponierten vertauschbar, so können ihre Matrizen durch eine unitäre Matrix simultan auf die beschriebene Gestalt mit reellen  $a$  und  $b$  transformiert werden. 4) Eine



beliebige Matrix kann durch eine unitäre auf folgende Form transformiert werden: Längs der Hauptdiagonale ein- und zweireihige Kästchen, unterhalb davon alle Elemente 0. G. Lochs.

**Petrescu, St.:** Sur la réduction à une forme canonique d'une forme bilinéaire symétrique gauche par des transformations orthogonales. *Mathematica, Timisoara* 22, 1—12 (1946).

**Comessatti, A.:** Sulla normalizzazione delle forme bilineari alternate a coefficienti interi. *Boll. Un. mat. Ital., II. Ser.* 5, 61—72 (1943).

Eine gegebene ganzzahlige schiefsymmetrische Bilinearform wird mittels einer ganzzahligen unimodularen linearen Transformation auf die Frobeniusische Normalform (1)  $\sum_{i=1}^q e_i (x_{2i-1} y_{2i} - y_{2i-1} x_{2i})$  mit (2)  $e_i | e_{i+1}$  gebracht. Als Zwischenstufe dient (1) ohne die Einschränkung (2). H. Wielandt.

**Turnbull, H. W.:** The critical concomitant of bilinear forms. *Proc. London math. Soc., II. Ser.* 49, 99—127 (1946).

Verf. stellt den Zusammenhang her zwischen der Theorie der Elementarteiler einer Matrix  $A = ||a_{ij}^k||$  und den projektiven Invarianten der zugehörigen  $n$ -ären Bilinearform  $F = a_{ij}^k x_i x_j u^k$ . Das volle Formensystem von  $F$  hat Verf. 1932 aufgestellt (dies. Zbl. 2, 381); es enthält u. a. multilineare Komitanten  $Q' = (x^{(0)} x^{(1)} \dots y^{(0)} y^{(1)} \dots) = (X^p, Y^{p_1} \dots Z^{p_h})$ , die in bestimmter Weise geordnet werden und deren erste, die nicht identisch Null ist, „kritische“ Komitante  $Q$  genannt wird. Hierbei ist  $p_1 + p_2 + \dots + p_h = n - h$  mit  $p_1 \geq p_2 \geq \dots$ , und  $x^{(i)}$  bedeutet den Vektor  $A^i$  mit  $A_x^0 = x$ ,  $A_x^1 = A x$ ,  $A_x^2 = A(A x)$  usw. Die Zahlen  $p_i + 1$  sind die Ordnungen der  $h$  invarianten Faktoren der Matrix  $A$ . Die kritische Form  $Q'$  ist eine multilineare Form in  $G_d$ -Koordinaten (compound coordinates)  $X^p, Y^{p_1}, \dots$ , die in Linearfaktoren zerfällt. Die Exponenten der verschiedenen Linearfaktoren ergeben hierbei die Grade der Elementarteiler von  $A$ . Es wird auf den engen Zusammenhang von  $Q'$  mit der Segreschen Normalform von  $A$  hingewiesen. Ist im besonderen die Minimalgleichung für  $A$  vom Grade  $n$  und sind  $(\lambda - \lambda_i) e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) die  $k$  verschiedenen Elementarteiler, so hat  $Q'$  die Gestalt  $L_1^{e_1} L_2^{e_2} \dots L_k^{e_k}$ , wo die  $L_i$  Linearformen in  $x$  sind, linear-unabhängig untereinander. Schließlich überträgt Verf. die Ergebnisse auf das Komitantensystem zweier quadratischer Formen. Hier liefern die Linearfaktoren von  $Q'$  die Elementarteiler des Büschels der zwei zugehörigen symmetrischen Matrizen. R. W. Weitzenböck.

**Brandt, H.:** Über quadratische Kern- und Stammformen. *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser*, 87—104. Zürich: Füssli 1945.

Hinweis auf die vom Verf. eingeführten Begriffe: Diskriminante einer quadratischen Form (Verh. Internat. Mat.-Kongreß 2, 10; Zürich 1932), Kernform und Stammform (z. B. dies. Zbl. 17, 196). Transformation einer Form in die Gestalt  $f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_1 x_2 + \dots + x_{2r-1} x_{2r} + g(x_{2r+1}, \dots, x_n) \bmod \text{Primzahlpotenzen mit möglichst großem } r$  liefert Kriterien für Kern- und Stammformen. M. Eichler.

**Eichler, Martin:** Zur Theorie der quadratischen Formen gerader Variablenzahl. *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser*, 34—36. Zürich: Füssli 1945.

Einige Grundgedanken aus dem später erschienenen Buch des Verfs. (Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin 1952). M. Eichler.

**Bourgin, D. G.:** Quadratic forms. *Bull. Amer. math. Soc.* 51, 907—908 (1945).

Es wird gezeigt, daß die Signatur einer indefiniten quadratischen Form  $Q$  in  $n + 2$  Veränderlichen durch  $n + 2 - \sum_{i=0}^n R_i$  gegeben ist, wo die  $R_i$  die mod 2 reduzierten Bettischen Zahlen der Hyperfläche  $Q = 0$  sind. R. W. Weitzenböck.

**Dubisch, R.:** Composition of quadratic forms. Ann. of Math., II. Ser. 47, 510—527 (1946).

Seien  $f(x)$  und  $g(y)$  zwei quadratische Formen in  $n$  bzw. in  $m$  Veränderlichen mit Koeffizienten aus einem Körper  $\mathfrak{K}$ , dessen Charakteristik  $\neq 2$ .  $f$  und  $g$  gestatten eine „partial composition“, wenn es in  $\mathfrak{K}$  Größen  $\gamma_{ijk}$  gibt, so daß bei  $z_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_{ijk} (k = 1, 2, \dots, n)$  die Beziehung  $f(x) \cdot g(y) = f(z)$  gilt. Bedingungen hierfür werden durch ein allgemeines Theorem gegeben im Anschluß an den durch A. A. Albert behandelten Fall  $m = n$  (vgl. das übernächste Referat).

R. W. Weitzenböck.

**Richardson, A. R.:** The composition of quadratic forms. Duke math. J. 13, 587—600 (1946).

Sei  $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ,  $(\beta) = (\beta_1, \dots, \beta_k)$  und  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ;  $f(x)$ ,  $v(\alpha)$  und  $u(\beta)$  seien quadratische Formen mit Koeffizienten aus einem Ring  $\mathfrak{R}$ . Ist jedes  $x_r$  eine Bilinearform in  $\alpha$  und  $\beta$  mit Koeffizienten aus  $\mathfrak{R}$  und  $f(x) = u(\beta) \cdot v(\alpha)$ , so wird  $f(x)$  eine „zusammensetzbare“ Form in  $\mathfrak{R}$  genannt. Neben Hinweisen auf Arbeiten von Clifford, Lipschitz, Vahlen und Hurwitz werden die Fälle  $k = 2^{n-1}$  und  $n = 3$ ,  $n = 4$  ausführlich behandelt. Für  $k = n$  und sehr allgemeines  $\mathfrak{R}$  vgl. die nachstehend besprochene Arbeit von A. A. Albert. R. W. Weitzenböck.

**Albert, A. A.:** Quadratic forms permitting composition. Ann. of Math., II. Ser. 43, 161—177 (1942).

Eine quadratische Form  $f(x)$  in  $n$  Veränderlichen mit Koeffizienten aus einem Körper  $\mathfrak{K}$  „erlaubt eine Zusammensetzung“, wenn  $f(x) = f(x) \cdot g(y)$  mit  $z_k = \gamma_k^{rs} x_r y_s$ ,  $\gamma_k^{rs}$  und die Koeffizienten der quadratischen Form  $g(y)$  ebenfalls aus  $\mathfrak{K}$ . Die  $y$  sind dabei  $m$  Veränderliche. Die Ermittlung solcher Formen  $f$  wurde für  $\mathfrak{K} =$  Körper der komplexen Zahlen von Hurwitz durchgeführt, seine Beweise sind von Dickson verallgemeinert. Verf. behandelt hauptsächlich den Fall, daß  $\mathfrak{K}$  ein Kongruenzkörper der Charakteristik 2 ist. R. W. Weitzenböck.

**MacDuffee, C. C.:** On the composition of algebraic forms of higher degree. Bull. Amer. math. Soc. 51, 198—211 (1945).

Sind  $f$ ,  $g$  und  $h$  drei Formen gleichen Grades und ist  $f(x) = g(y) \cdot h(z)$  auf Grund von  $n$  Beziehungen  $x_k = \sum c_{ijk} y_i z_j$ , dann heißt  $f$  „zusammengesetzt“. Über solche Formen, deren Koeffizienten einem Ring  $\mathfrak{R}$  angehören, werden einige Sätze bewiesen im Zusammenhang mit solchen von Polynomidealen im Quotientenkörper von  $\mathfrak{R}$ .

R. W. Weitzenböck.

**Ko, Chao:** On the decomposition of quadratic forms in seven variables. Sci. Record 1, 30—33, 33—36 (1942).

Für  $f_7 = \sum_1^n x_i^2 + (\sum_1^n x_i)^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_n$  wird bewiesen, daß jede positiv definite Form in 7 bzw. in 8 Veränderlichen äquivalent ist mit einer  $f_7$  bzw.  $f_8$ .

R. W. Weitzenböck.

**Ko, Chao and S. C. Wang:** Table of primitive positive quaternary quadratic forms with determinants  $\leq 25$ . Sci. Record 1, 54—58 (1942).

Enthält einige Druckfehler und nimmt keine Rücksicht auf die durch S. B. Townes (dies. Zbl. 22, 306) gegebene Tabelle. R. W. Weitzenböck.

**Oldenburger, Rufus:** Expansions of quadratic forms. Bull. Amer. math. Soc. 49, 136—141 (1943).

**Oldenburger, Rufus:** The characteristic of a quadratic form for an arbitrary field. Trans. Amer. math. Soc. 53, 454—462 (1943).

Für eine quadratische Form  $Q$  vom Range  $r$  wird die „Charakteristik“  $\sigma$  definiert als größte Zahl, für die  $Q + \lambda_1 L_1^2 + \dots + \lambda_r L_r^2$  ebenfalls den Rang  $r$

hat, wobei die  $L_i$  unabhängige Linearformen sind. Über  $\sigma$  werden einige Sätze bewiesen, die in der zweiten Arbeit auf Körper mit einer Charakteristik  $\neq 2$  ausgedehnt werden.

*R. W. Weitzenböck.*

Mann, H. B.: Quadratic forms with linear constraints. Amer. math. Monthly 50, 430—433 (1943).

Bedingungen, daß eine quadratische Form  $Q(x)$  definit sei für diejenigen  $x_i$ , die eine Reihe linear-homogener Gleichungen erfüllen.

*R. W. Weitzenböck.*

Corput, J. G. van der and H. J. A. Duparc: Determinants and quadratic forms. I. H. Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 995—1002, 1111—1114 = Indagationes math. 8, 615—622, 671—674 (1946).

Zwei Sätze über die Entwicklung in Faktoren der Determinanten  $|a_s(y_r - x_s) e_{rs}|$  werden auf definite quadratische Formen angewendet.

*R. W. Weitzenböck.*

Dines, Lloyd L.: On linear combinations of quadratic forms. Bull. Amer. math. Soc. 49, 388—393 (1943).

Zwei quadratische Formen  $Q_1 = \sum a_{ik} x_i x_k$  und  $Q_2 = \sum b_{ik} x_i x_k$  werden  $c$ -orthogonal genannt, wenn  $\sum a_{ik} b_{ik} = 0$  ist. Über  $c$ -orthogonale Formen in einer linearen Schar  $\sum \lambda_r Q_r$  werden einige Sätze bewiesen.

*R. W. Weitzenböck.*

Littlewood, D. E.: On the number of terms in a simple algebraic form. Proc. Cambridge philos. Soc. 38, 394—396 (1942).

Littlewood, D. E.: On the number of terms in a simple algebraic form under the symplectic group. Proc. Cambridge philos. Soc. 39, 197—199 (1943).

Die genannten Zahlen werden durch die Ordnungen der irreduziblen Darstellungen der vollen linearen Gruppe gegeben und finden sich bereits 1901 in der Dissertation von I. Schur. In der zweiten Arbeit finden sich diese Zahlen für die symplektische Gruppe; sie wurden schon von H. Weyl bestimmt [Math. Z. 24, 342 (1925)].

*R. W. Weitzenböck.*

Soudan, Robert: Substitution linéaire dans une forme quadratique. C. r. Soc. Physique Genève 63, 71—73 (1946).

Beweis des Trägheitsgesetzes für ternäre quadratische Formen.

*R. W. Weitzenböck.*

Hodge, W. V. D.: Some enumerative results in the theory of forms. Proc. Cambridge philos. Soc. 39, 22—30 (1943).

Im Anschluß an zwei frühere Arbeiten [Proc. Cambridge philos. Soc. 38, 129—143 (1942) und Ges. Zbl. 28, 83] werden Normalformen in  $G_d$ -Koordinaten  $x_i, (x y)_{ij}, (x y z)_{ijk}, \dots$  betrachtet, und es wird gezeigt, daß die Basis für diese „ $k$ -connexe“ genannten Formen durch gewisse „Standard“-Formen gebildet wird. Spezielle Fälle bilden Hyperflächen durch die zugeordnete Grassmannsche Mannigfaltigkeit im Bildraum der Gebiete  $G_d$ .

*R. W. Weitzenböck.*

Pall, Gordon: Hermitian quadratic forms in a quasi-field. Bull. Amer. math. Soc. 51, 889—893 (1945).

Sei  $k$  ein Schiefkörper mit von 2 verschiedener Charakteristik, der einen involutorischen Antiautomorphismus  $a \mapsto a^*$  besitzt. Der von E. Witt (dies. Zbl. 15, 57) für quadratische Formen bewiesene „Kürzungssatz“ wird auf Hermitesche Formen in  $k$  übertragen: sind  $x_1^* a x_1 = \sum_{i,k=2}^n x_i^* a_{ik} x_k$  und  $x_1^* a x_1 = \sum_{i,k=2}^n x_i^* a'_{ik} x_k$  äquivalent, so sind es auch die Teilformen mit  $x_1 = 0$ .

*M. Eichler.*

Durfee, William H.: Congruence of quadratic forms over valuation rings. Duke math. J. 11, 687—697 (1944).

Es seien  $f, g$  und  $h$  quadratische Formen über einem perfekten Bewertungsring, dessen Restklassenkörper eine von 2 verschiedene Charakteristik besitzt. Sind



$f + g$  und  $f + h$  kongruent und nichtsingulär, haben ferner  $g$  und  $h$  keine Veränderliche gemeinsam mit  $f$ , so sind  $g$  und  $h$  kongruent. (Vgl. E. Witt, dies. Zbl. 15, 57.)  
L. Fuchs.

Arf, Cahit: Untersuchungen über quadratische Formen im Körper der Charakteristik 2. II. Über arithmetische Äquivalenz quadratischer Formen in Potenzreihenkörpern über einem vollkommenen Körper der Charakteristik 2. Univ. Istanbul, Fac. Sci., Rec. Mém. commém. la pose de la première pierre des Nouv. Inst., Ser. A 7, 297—327 (1943) [mit türkischer Zusammenfassg.].

Teil 1 s. dies. Zbl. 25, 14. Sei  $k = \Omega(t)$  der Körper aller Potenzreihen in  $t$  mit Koeffizienten aus einem vollkommenen Körper  $\Omega$  der Charakteristik 2.  $\omega(a)$  bedeute den Wert von  $a \in k$  bei der Gradbewertung. Es werden vollständige Invariantensysteme binärer und ternärer quadratischer Formen gegenüber unimodularer Transformation  $a_{ik}$  (d. h.  $\omega(a_{ik}) \leq 0$ ,  $\omega(|a_{ik}|) = 0$ ) aufgestellt. a)  $f = a x^2 + b x y + c y^2$ ,  $b \neq 0$ . Zu den algebraischen Invarianten (d. h. gegenüber beliebiger Transformation in  $k$ ), nämlich dem Lösungskörper  $K$  von  $\xi^2 - \xi = a c / b^2$  und der Normenklasse von  $a \bmod K$  (s. Teil I: dies. Zbl. 25, 14), kommen als arithmetische Invarianten hinzu: 1)  $\delta = \text{Min}(\omega(a), \omega(b), \omega(c))$ . 2)  $\mu = \text{Min}(\omega(b/a), \omega(c/a))$ , 3) die mult. Restklasse von  $a L^2 \bmod t^u$ ,  $L$  die Einheitsgruppe von  $k$ . Setzt man  $v = -\omega(a c / b^2)$ , so gilt  $\mu \equiv v \bmod 2$ , falls  $\mu \leq v$ . Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es zu vorgegebenen Invarianten eine Form. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Darstellung eines  $m \in k$  durch  $f$  werden angegeben. Die Theorie der  $f$  mit  $b = 0$  erledigt sich durch eine kurze Bemerkung. — b)  $f = a x^2 + b x y + c y^2 + d z^2$ . (Nach Teil I kann jede ternäre Form mit nicht verschwindenden Produktgliedern in diese Form gebracht werden.) Algebraische Invarianten nach I: die Quadratklasse von  $d$  in  $k$ , der wie unter a) definierte Körper  $K$ , und die Normenklasse von  $a d \bmod K$ . Arithmetische Invarianten, falls  $d = 1$ : 1) die größte natürliche Zahl  $v(a)$ , für welche  $a$  ein quadr. Rest  $\bmod t^v$  ist. 2)  $\bar{\mu} = \text{Min}(\omega(b/a), \omega(c/a), v(a) - 2\omega(a))$  bzw.  $= 0$ , je nachdem  $\omega(a) > 0$  oder  $< 0$ , 3)  $\mu$  wie unter a, 2), 4)  $v = -\omega(a c / b^2)$ , 5) die mult. Restklasse von  $a L^2 \bmod t^{\bar{\mu}}$ , 6) die additive Restklasse von  $a c b^{-2} \bmod H$ . Dabei ist  $H$  die Gruppe der additiven Restklassen aller  $(a \lambda^2 + c \kappa^2) b^{-2} \bmod$  allen  $x^2 - x$  mit  $x \in k$ ; hier durchlaufen  $\kappa, \lambda$  alle Elemente aus  $k$  mit folgenden Einschränkungen:  $\omega(\kappa) > \frac{1}{2} \omega(a)$  für  $\omega(a) > 0$ ,  $\omega(\lambda) \geq \frac{1}{2} \omega(a) - v(a) + \omega(b)$  für  $\omega(a c / b^2) \geq \frac{1}{2} \omega(a) - \omega(b)$ ,  $\lambda = 0$  für  $c = 0$ . Die zwischen diesen Invarianten bestehenden Bindungen werden vollständig aufgezählt; sind beliebige diesen genügende Invarianten vorgegeben, so gibt es zu ihnen eine Form.  
M. Eichler.

Lepage, Th.-H.: Sur certaines congruences de formes alternées. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 15, 21—31 (1946).

Gegeben sei eine symmetrische Matrix  $P$ , deren Elemente  $p_{ij}$  Variable über einem Körper der Charakteristik 0 sind, und eine lineare Funktion  $F$  der Unterdeterminanten aller Grade von  $P$ . Es seien  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  Variable.  $\omega_i = y_i - \sum p_{ij} x_j$ ,  $\Gamma = \sum x_j y_j$ . Dann gibt es genau eine alternierende Form  $\Omega(x_1, \dots, y_n)$  des Grades  $n$ , die von den  $p_{ij}$  unabhängig ist und  $\Omega \omega_1 \dots \omega_n = F \Gamma^n / n!$ .  $\Omega \Gamma = 0$  befriedigt (alle Produkte sind alternierend zu verstehen). Der Beweis beruht auf Hilfssätzen über quadratische Teiler alternierender Formen.

H. Wielandt.

Papy, Georges: Formes biquadratiques et matrices. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 12, 88—97 (1943).

Offenbar kann jede Form  $F = l_{i\alpha j\beta} x_i x_j \xi_\alpha \xi_\beta$  ( $i, j = 1, \dots, m; \alpha, \beta = 1, \dots, n; m \geq n \geq 2$ ) als quadratische Form  $G$  in den  $mn$  Produkten  $x_\mu \xi_\nu$  aufgefaßt werden;  $G$  ist durch  $F$  nicht eindeutig bestimmt. Verf. zeigt, daß  $G$  im allgemeinen nicht-singulär gewählt werden kann; Ausnahmen gibt es höchstens, wenn  $m$  ungerade,

$n = 2$  und jede der  $m^2$  quadratischen Formen  $l_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$  singular ist, oder wenn der Integritätsbereich, dem die Koeffizienten von  $F$  und  $G$  entnommen sind, weniger als  $mn + 1$  Elemente enthält.

H. Wielandt.

Lee, H. C.: On plane factorizations of pseudo-Euclidean rotations. Quart. J. Math., Oxford Ser. 15, 7—10 (1944).

Es wird gezeigt, wie man eine lineare, homogene Koordinatentransformation mit Determinante  $-1$ , die die Form  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - \dots - x_n^2$  invariant läßt, durch ein Produkt von  $\frac{1}{2}n(n-1)$  Transformationen der Gestalt

$$y_i = x_i \cos \alpha - x_j \sin \alpha, \quad y_j = x_i \sin \alpha + x_j \cos \alpha, \quad y_k = x_k \quad \text{für } k \neq i, j$$

oder  $y_i = x_i \cosh a - x_j \sinh a, \quad y_j = x_i \sinh a + x_j \cosh a, \quad y_k$  wie vorhin, darstellen kann. Nur  $p$  von ihnen brauchen die zweite Gestalt zu haben.

G. Lochs.

Todd, J. A.: A note on ternary-binary forms. J. London math. Soc. 20, 209—213 (1945).

$(m, n)$  bedeute eine ternär-binäre Form  $(A'x)^m a_y^n$  ( $x$  ternäre,  $y$  binäre Koordinaten). Für die Formen (1, 1) und (1, 2) werden volle Systeme von projektiven Komitanten aufgestellt und geometrisch interpretiert.

R. W. Weitzenböck.

Todd, J. A.: The complete system of the binary (3, 1) form. Proc. Cambridge philos. Soc. 42, 196—205 (1946).

Todd, J. A.: The complete system of the binary (4, 1) form. Proc. Cambridge philos. Soc. 42, 206—216 (1946).

Das volle System von projektiven Komitanten wird für die doppeltbinären Formen (3, 1) und (4, 1) ermittelt. Es ergeben sich 26, resp. 63 Komitanten.

R. W. Weitzenböck.

Bruck, R. H. and T. L. Wade: The number of independent components of the tensors of given symmetry type. Bull. Amer. math. Soc. 49, 470—472 (1943).

Ein willkürlicher kovarianter Tensor  $p$ -ter Stufe  $T_{i_1 \dots i_p}$  ( $i_p = 1, 2, \dots, n$ ) läßt sich in irreduzible Bestandteile  $[_2]T$  zerlegen entsprechend den Partitionen  $[\alpha]$  der  $p$  Indices. Die Anzahl der skalaren Komponenten von  $[_\alpha]T$  sei  $c_\alpha$ . Es wird gezeigt, daß  $c_\alpha$  mit Hilfe der Gruppencharaktere für die symmetrische Gruppe von  $p$  Elementen berechenbar ist. Dabei wird von Ergebnissen Gebrauch gemacht, die beide Autoren schon 1942 gefunden haben (vgl. das übernächste Referat). Am Schluß wird eine Tabelle für die Zerlegungen bis einschließlich  $p = 6$  gegeben.

R. W. Weitzenböck.

Wade, T. L. and R. H. Bruck: Types of symmetries. Amer. math. Monthly 51, 123—129 (1944).

An Hand des zugehörigen Schemas von Young werden die verschiedenen Symmetrieklassen von Tensoren besprochen.

R. W. Weitzenböck.

Bruck, Richard H. and T. L. Wade: Bisymmetric tensor algebra. I. II. Amer. J. Math. 64, 725—733, 734—752 (1942).

Robinson, G. de B.: Note on a paper by R. H. Bruck and T. L. Wade. Amer. J. Math. 64, 753 (1942).

Verf. nennen einen gemischten Tensor  $A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = A_{(j)}^{(i)}$ , symmetrisch in den  $i$  und in den  $j$ , einen „bisymmetrischen  $2p$ -Tensor“. Mit Hilfe eines verallgemeinerten Kroneckerschen  $\delta_{(j)}^{(i)}$  werden Determinante, Adjungierte und Inverse von  $A_{(j)}^{(i)}$  definiert. Mit diesen  $\delta_{(j)}^{(i)}$  wird ein Ring konstruiert, in dem „immanente“ numerische Tensoren  ${}_{(a)}I_{(j)}^{(i)}$  auftreten, die einer irreduziblen Darstellung  $[a]$  der symmetrischen Permutationsgruppe von  $p$  Elementen zugeordnet sind. In der „Note“ wird der Rang  $r_a$  dieser immanenten Tensoren ermittelt.

R. W. Weitzenböck.

Bruck, Richard H.: The number of absolute invariants of a tensor. Amer. J. Math. 66, 411—424 (1944).

Die Anzahl der algebraisch-unabhängigen affinen Invarianten eines Tensors  $T_{(j)}^{(i)} = T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$  wird nach Eisenhart (dies. Zbl. 8, 108) gegeben durch  $N - Q$ , wo  $N$  gleich der Anzahl der unabhängigen Komponenten von  $T$  und  $Q$  der allgemeine Rang einer Matrix  $||\xi_{(j)}^{(i)\beta}||$  ist. Die Elemente dieser Matrix sind gewisse Linearkombinationen der  $T_{(j)}^{(i)}$ . Die Anzahl  $n^2 - Q$  ist auch gleich der unabhängigen Tensoren  $F_{\beta}^{\alpha}$ , die alle Gleichungen  $\xi_{(j)}^{(i)\beta} F_{\beta}^{\alpha} = 0$  befriedigen. Hiervon wird bei der Ermittlung von  $Q$  in besonderen Fällen Gebrauch gemacht, wobei die Ergebnisse in fünf Theoremen formuliert werden. Bei Tensoren aus besonderen Symmetrieklassen werden frühere Resultate von Verf. und T. L. Wade herangezogen (vgl. dies. Zbl. 25, 362 und das vorangehende Referat). Am Schlusse einige Bemerkungen über Tensordichten (relative Invarianten).

R. W. Weitzenböck.

Wade, T. L.: Tensor algebra and invariants. I. II. Nat. Math. Mag. 19, 3—10 (1944); 20, 5—10 (1945).

(I): Sehr elementare Einführung in die Tensoralgebra. (II) behandelt projektive Invarianten und Invarianten von Untergruppen, dabei die Kleinschen Ideen des Erlanger Programms zugrunde legend.

R. W. Weitzenböck.

(1) Littlewood, D. E.: Invariant theory, tensors and group characters. Philos. Trans. roy. Soc. London, Ser. A 239, 305—365 (1944).

(2) Littlewood, D. E.: On invariant theory under restricted groups. Philos. Trans. roy. Soc. London, Ser. A 239, 387—417 (1944).

(1): Teil I befaßt sich mit den formalen allgemeinen Begriffen und Konstruktionen der Tensoralgebra und der projektiven Invariantentheorie. Betont wird hierbei besonders der Beweis, daß jede ganz-rationale Komitante gegebener Tensoren durch Produktbildung und Verjüngung erhalten werden kann. Hierbei ist allerdings auch von den sog.  $\varepsilon$ -Tensoren Gebrauch zu machen. Hingewiesen wird auf die Äquivalenz der Tensormethode mit der symbolischen Methode. Hier wäre hervorzuheben gewesen, daß diese Äquivalenz auf dem Zurückgehen auf die Invarianten von Linearformen beruht. Bei Tensoren kommt dies durch den Gebrauch von Indices, bei der klassischen Symbolik durch Aufspaltung in Symbolreihen zustande. Teil II bringt das Hauptthema: Eigenschaften der  $S$ -Funktionen, die hauptsächlich verwendet werden zu Ermittlung der Anzahl der linear-unabhängigen Komitanten von gegebener Struktur bei gegebenen Grundformen. (Vgl. das Buch des Verf. The theory of group characters and matrix representations of groups, dies. Zbl. 25, 9). Es werden die durch das Zeichen  $\cdot$  ausgedrückte „Multiplikation“ von  $S$ -Funktionen  $\{p\}$  und  $\{q\}$  und allgemeiner von  $\{\lambda\}$  und  $\{\mu\}$  eingeführt und einige Eigenschaften dieser Operation abgeleitet, wobei auf frühere Arbeiten des Verf. zurückgegriffen wird. Teil III bringt zunächst im Anschluß an eine Formel von Young eine erzeugende Funktion für ternäre Komitanten gegebener Struktur. Als Anwendung des Kalküls mit  $S$ -Funktionen werden die Anzahlen der linear-unabhängigen projektiven Komitanten bei dem System einer binären  $f_2$  und  $f_3$  ermittelt. Neben weiteren Formen werden im besonderen die ternäre  $f_3$  und  $f_4$  und der quadratische Linienkomplex behandelt und deren Komitantentypen bis zum Grade 6 bestimmt. Schließlich wird noch ein Satz über „konjugierte Partitionen“ bewiesen und seine Tragweite für den Aufbau von Komitanten dargelegt, die symmetrisch oder alternierend in den Koeffizienten der Grundform sind. (2): Weiterentwicklung der Methode für die orthogonalen und symplektischen Komitanten. Diese werden erhalten, wenn man den Grundformen eine nichtsinguläre quadratische Form bzw. eine nichtsinguläre alternierende Form adjungiert. Entsprechend dem im Erlanger Programm dargelegten Grundgedanken von F. Klein sind die Komitanten der beiden genannten Kategorien die projektiven Komitanten eines erweiterten



Systems von Grundformen. Ob dies allgemein für speziellere Untergruppen auch gültig ist, ist noch eine offene Frage. Das hierüber vom Verf. auf S. 391 ausgesprochene „Fundamentalththeorem“ ist bisher unbewiesen. Ref. kann die Ansicht des Verf. nicht teilen, nach der die Ermittlung der orthogonalen und symplektischen Komitanten die Kenntnis der Gruppencharaktere und die Theorie der  $S$ -Funktionen notwendig macht. Diese Kenntnis ist nützlich, um eine Übersicht über multilineare Komitanten zu erhalten, die von gegebenem Grade in den Koeffizienten von Normalformen sind.

*R. W. Weitzenböck.*

**Cisotti, Umberto:** Invarianti di vettori e tensori doppi. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend., Cl. Sci. mat. natur.* **77** (III. Ser. 8), 253—258 (1944).

Auf ziemlich umständliche Weise werden die orthogonalen Invarianten ersten bis vierten Grades einer ternären Bilinearform ermittelt. Die symbolische Methode und insbesondere der erste Fundamentalsatz für Dehnungsinvarianten, nach dem die gesuchten Invarianten direkt hinzuschreiben sind, bleiben unerwähnt.

*R. W. Weitzenböck.*

**Doyle, T. C.:** Euclidean metric invariants of conics by tensor algebra. *Amer. math. Monthly* **52**, 179—187 (1945).

Das volle System von Euklidischen Bewegungsinvarianten eines Kegelschnittes wurde vom Ref. ermittelt [S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa **122**, 1241—1258 (1913)]. Die dort symbolisch dargestellten Komitanten werden hier in Tensorschreibweise wiedergegeben.

*R. W. Weitzenböck.*

**Bruins, E. M.:** Die projektiven Invarianten von vier  $G_d$ 's im  $G_{2d}$ . *Nederl. Akad. Wet., Proc.* **49**, 738—743 = *Indagationes math.* **8**, 441—446 (1946) [Holländisch].

Vier Gebiete  $G_d$  [( $d-1$ )-dimensionale lineare Räume]  $a^d$ ,  $\alpha^d$ ,  $p^d$  und  $\pi^d$  haben ein volles System von projektiven Invarianten, das aus den sechs vom Typus  $A_{1,2} = (a^d \alpha^d)$  und aus den  $d-2$  Invarianten der Gestalt  $J_{1234}^{(d-\lambda)} = (a^d \alpha^{d-\lambda} p^\lambda)$ , ( $p^{d-\lambda} \alpha^\lambda \pi^d$ ) besteht.

*R. W. Weitzenböck.*

**Molenaar, P. G.:** Primitive-symmetric projective invariants. I. II. III. *Nederl. Akad. Wet., Proc.* **49**, 238—250, 357—368, 470—478 = *Indagationes math.* **8**, 135—147, 226—237, 325—333 (1946) [Holländisch].

Die Arbeit enthält in erster Linie eine Spezialisierung des Begriffes „projektive“ Invariante, die sich aus der symbolischen Darstellung in Verbindung mit der Zerlegung der symmetrischen Gruppe in primitive Bestandteile ergibt. So ist z. B.  $R = (a b)^2 (c d)^2 (a d) (b c)$  die symbolisch dargestellte Diskriminante einer binären  $f_3 = a_x^3$ . Sie ist gleichzeitig Simultaninvariante der vier kubischen Formen  $a_x^3$ ,  $b_x^3$ ,  $c_x^3$  und  $d_x^3$ , linear (aber nicht symmetrisch) in den Koeffizienten dieser Formen. Permutation der  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  gibt dann i. A. neue Invarianten  $R'$ ,  $R''$ , ... der vier  $f_3$ , und den primitiv-symmetrischen Einheiten entsprechen die im Titel angeführten Invarianten. Sie werden für das angeführte Beispiel der vier  $f_3$  auch geometrisch interpretiert. In zweiter Linie wird bewiesen, daß man bei den projektiven Invarianten einer gemengten Grundform  $F = a_x^p \alpha_x^q$  mit Klammerfaktoren  $(a b \dots)$  und  $(\alpha \beta \dots)$  allein auskommt und Faktoren vom Typus  $(a \alpha \dots)$  nicht auftreten. Auch hierfür wird ein Begriff aus der Theorie der binären Formen gegeben.

*R. W. Weitzenböck.*

**Calugareanu, Georges:** Sur le calcul symbolique de Cayley-Aronhold-Clebsch dans la théorie des invariants. *Mathematica, Timişoara* **21**, 95—109 (1945).

Eine binäre  $f_n = (a_1 x + a_2 y)^n = (A, B, \dots, K) (x, y)^n$  wird dargestellt durch das zweifache Integral  $\iint \psi(p, q) (p x + q y)^n dp dq$  mit  $\psi(p, q) = (p q)^{-1} (A p^{-n} + \dots)$ . Die in der Invariantentheorie üblichen Bemerkungen werden dann mit dem „Kern“  $\psi$  ausgeführt. Auch Ausdehnung auf  $n$ -äre Formen.

*R. W. Weitzenböck.*

**Dubnov, Ya.:** Vollständige Systeme von Invarianten in zentro-affinen Räumen von zwei oder drei Dimensionen. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 5, 250—270 (1941) [Russisch].

● **Dickson, Leonard Eugene:** New first course in the theory of equations. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1939. IX, 185 p. \$ 1,75.

**Thomas, Joseph Miller:** Division sequences. Duke math. J. 13, 459—469 (1946).

By means of determinants there are expressed the members of the sequences generated by application of the Euclidean or Sturmian algorithms to two polynomials in a single indeterminate with coefficients in a domain integrity.

*E. Frank.*

**Jackson, F. H.:** Basic functions and polynomial sequences. Quart. J. Math., Oxford Ser. 17, 99—110 (1946).

The two sequences of polynomials  $f_n(x) = f_{n-1}(x) + x f_{n-2}(x)$ ,  $f_0(x) = 0$ ,  $f_1(x) = 1$ , and  $F_n(x) = c_1 f_{n-1}(x) + c_2 f_{n-2}(x)$  are introduced. Applications to the theory of numbers are indicated.

*E. Frank.*

**Rado, R.:** The irreducible factors of certain polynomials. Quart. J. Math., Oxford Ser. 17, 111—115 (1946).

Here the  $f_n(x)$  introduced by Jackson (see the preceding review) are represented as a product of irreducible polynomials and some properties of these irreducible factors are deduced.

*E. Frank.*

**Delange, Hubert:** Sur certaines suites de polynomes. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 191—193 (1943).

Let  $P_n(z)$  be a sequence of polynomials with the zeros  $\alpha_{\delta n}$ .  $\Phi(n)$  a positive function of  $n$ , and  $\{c_n\}$  a properly chosen sequence. This paper is a continuation of a study of the sequence  $\{\Phi(n)\}^{-1} \log |c_n P_n(z)|$  by the author (this Zbl. 24, 125).

*E. Frank.*

**Corput, J. G. van der:** On the fundamental theorem of algebra. I. II. III. Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 722—732, 878—886, 985—994 = Indagationes math. 8, 430—440, 549—557, 605—614 (1946).

The author proves the fundamental theorem of algebra in the following form: Let  $\Omega$  be a commutative field with Archimedean order. Then there exists an extension field  $\Omega'$  with Archimedean order such that any polynomial of degree  $\mu \geq 1$  with coefficients in  $\Omega'$  and with the highest coefficient 1 has exactly  $\mu$  roots in  $\Omega'(\sqrt[\mu]{-1})$ .  $\Omega'$  is constructed from  $\Omega$  rather by a purely algebraic manner. Let  $C = C(X)$  be a polynomial in  $\Omega$ ,  $I$  be an interval in  $\Omega$  such that  $C$  changes sign only once in  $I$ . Then the couple  $(I, C)$  represents an element of  $\Omega'$ . Two couples  $(I, C)$  and  $(A, D)$  are defined to be equivalent (namely, represent the same element of  $\Omega'$ ) if the greatest common divisor of  $C(X)$  and  $D(X)$  changes sign in  $I \cap A$ . We can define sum and product among couples reasonably and after long steps we can prove the theorem. This paper contains also an intuitionistic proof of the fundamental theorem of algebra.

*Y. Kawada.*

**Onicescu, O.:** Sur le théorème fondamental de l'algèbre. Mathematica, Timișoara 22, 208—214 (1946).

A proof is given of the fundamental theorem of algebra in the form that „a polynomial with real coefficients of even degree has at least one real quadratic factor“. In the proof of the theorem for real polynomials of degree  $4m + 2$ , the following lemma is used: The necessary and sufficient condition that the polynomial  $P_{4m+2}(x) \equiv a_0 x^{4m+2} + a_1 x^{4m+1} + \dots + a_{4m+1} x + a_{4m+2}$  have a quad-

ratic factor  $x^2 - \delta$  is identical with the necessary and sufficient condition that the polynomials  $a_0 x^{2m+1} + a_2 x^{2m-1} + \dots + a_{1m} x + a_{4m+2}$ ,  $a_1 x^{2m} + a_3 x^{2m-2} + \dots + a_{4m-1} x + a_{4m+1}$  have a common factor  $x - \delta$ . A transformation of the polynomial  $P_{4m+2}(x)$  is then considered as well as the topology and continuity involved.

*E. Frank.*

**Rosenbloom, P. C.:** An elementary constructive proof of the fundamental theorem of algebra. Amer. math. Monthly 52, 562—570 (1945).

This proof depends on the construction from a given polynomial  $P(z)$  by rational operations of a sequence of complex numbers  $\{z_n\}$  which satisfies the Cauchy convergence criterion and such that  $P(z_n)$  converges to zero. The existence of a root follows from the definition of the real number system by means of Cantor's regular sequences.

*E. Frank.*

**Scorza-Dragoni, G.:** Un'osservazione sui sistemi di equazioni algebriche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 332—335 (1946).

Es wird ein sich auf ein Lemma von Birkhoff-Kellogg [Trans. Amer. math. Soc. 23, 96—115 (1922), insbes. 98—99] stützender Beweis des Satzes (siehe z. B.: L. Brusotti, dies. Zbl. 28, 103) gegeben, der die Existenz eines Lösungssystems  $-1 \leq x_k \leq 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) für das Gleichungssystem  $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) behauptet, falls die Funktionen  $f_j$  Polynome sind, derart, daß  $f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, -1, x_{j+1}, \dots, x_n) \leq 0$ ,  $f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n) \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) ist.

*J. Aczel.*

**Inaba, Eizi:** Über den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Japanese J. Math. 19, 1—25 (1944).

If for every set of irreducible polynomials  $f_i(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_m)$ ,  $i = 1, \dots, \lambda$ , there are infinitely many values  $t_i = a_i$  in  $K$ , for which  $f_i$  remain irreducible as polynomials in  $x_1, \dots, x_n$ , we say that the Hilbert's irreducibility theorem holds in the field  $K$ . W. Franz (this Zbl. 1, 51) showed, that by the separable finite extension Hilbert's theorem remains true. Present author treated also the case of inseparable extension. K. Dörge [Math. Ann. 95, 84—97 (1926)] proved the non-thinness of allowable value  $t_i = a_i$  by rational field  $K$ . Present author introduces the concept of „thinness“ in general fields and establishes the corresponding problem for an arbitrary field.

*T. Tannaka.*

**Todd, J. A.:** Note on certain reducible polynomials. J. London math. Soc. 20, 204—209 (1945).

Mit ganzzahligem  $a$  sei  $g(y) = y^2 + a y + 1$  und  $f_m(x) = g(x^{2m})$ . Es wird gezeigt, daß, wenn  $f_{m-1}(x)$  irreduzibel,  $f_m(x)$  aber reduzibel ist, notwendig  $m \geq 2$  folgt. [Beim. des Ref.: Mit Hilfe des Satzes von Capelli (vgl. Tschebotaröw-Schwerdtfeger, dies. Zbl. 37, 146) kann man beweisen, daß der obige Satz für ein beliebiges Polynom  $g(y)$  (notwendigerweise irreduzibel) über einem beliebigen Körper richtig bleibt.]

*H. Schwerdtfeger.*

**Brauer, Alfred and Gertrude Ehrlich:** On the irreducibility of certain polynomials. Bull. Amer. math. Soc. 52, 844—856 (1946).

Es wird bewiesen, daß ein ganzzahliges Polynom  $P(x)$  vom Grade  $n$  irreduzibel ist, wenn für  $n$  ganzzahlige  $x_r$  die Werte  $|P(x_r)|$  von Null verschieden sind und unterhalb der Schranke  $G = (n-1)! 2^{n-1} \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor!$  liegen. Dies ist eine Verschärfung eines von Polya gefundenen, von Ille und Tatzuza (vgl. dies. Zbl. 22, 195) verschärften Kriteriums, woraus sich bekannte Resultate von Schur, Dorwart und Ore als Korollare ergeben. Überdies wird ein neuartiges Kriterium bewiesen, wonach  $P(x)$  irreduzibel ist, wenn für  $n$  verschiedene ganze  $x_r$



die Werte  $|P(x_r)|$  von Null verschieden sind und unter der Schranke  $\varphi(n, k) = 2^{-k} \prod_{x=1}^k \left[ \frac{n-1}{k} \right] \left( k \geq \left[ \frac{n+1}{2} \right] \right)$  liegen, während für  $l$  dieser  $x_r$  ( $n/2 < l < n$ ,  $l > 12$  oder  $l = 11$  oder  $9$ ) gilt  $|P(x_r)| < \varphi(l, h)$ , ( $h < l$ ,  $k + h - 1 \leq n$ ).

H. Schwerdtfeger.

Vasileios, Filon: Bemerkungen über einige Kriterien für die Irreduzibilität von Gleichungen. Bull. Soc. math. Grèce 22, 181—190 (1946) [Griechisch].

Sah, A. Pen-Tung: A uniform method of solving cubics. Amer. math. Monthly 52, 202—206 (1945).

Sispánov, Sergio: Über die trinomische Gleichung fünften Grades. Bol. mat. 16, 153—159 (1943) [Spanisch].

Sispánov, Sergio: Algebraische Berechnung des regelmäßigen Elfecks. Revista Un. mat. Argentina 9, 77—88 (1943) [Spanisch].

Bhalotra, Vashpaulraj: A criterion for the solubility by radicals of the general quintic. Math. Student 9, 161—163 (1941).

Amodeo, F.: Sulla risoluzione della equazione di 4° grado. Periodico Mat., IV. Ser. 24, 2—9 (1946).

Bhalotra, Y. and S. Chowla: Some theorems concerning quintics insoluble by radicals. Math. Student 10, 110—112 (1942).

Chowla, S.: On quintic equations soluble by radicals. Math. Student 13, 84 (1945).

Komischke, A.: Sur la résolution non-algébrique de l'équation générale du degré  $n$ . Revista Ci. 41, 453—474 (1939).

Poivert, Jules: Résolution algébrique d'une importante classe d'équations. Rev. Trimest. Canad. 26, 71—78 (1940).

Poivert, Jules: Étude sur la pseudo-résolvante. Rev. Trimestr. Canad. 28, 1—15 (1942).

Schwarz, Štefan: A hypercomplex proof of the Jordan-Kronecker's „principle of reduction“. Časopis Mat. Fys. 71, 17—20 (1946) [Mit tschechischer Zusammenfassg.].

● Artin, Emil: Galois theory. Edited and supplemented with a section on applications by Arthur N. Milgram. Notre Dame Mathematical Lectures, Nr. 2. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame 1942. I. 70 p. \$ 1,25.

● Artin, Emil: Galois theory. — 2nd ed. — Edited and supplemented with a section on applications by Arthur N. Milgram. Notre Dame Mathematical Lectures, Nr. 2. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame 1944. 82 p.; \$ 1,25.

Prägnante Herleitung des Grundbestandes der klassischen Galoisschen Theorie in wesentlich neuer Form. Nach Einführung der Grundbegriffe der linearen Algebra und Körpertheorie beginnt die eigentliche Theorie mit der Definition der Charaktere, d. h. Homomorphismen  $\sigma$  einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  in einen Körper  $F$ , so daß für  $\alpha, \beta \in \mathfrak{G}$  und  $\sigma(\alpha) \in F$ :  $\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta)$ ,  $\sigma(\alpha) \neq 0$ . Eine endliche Anzahl  $n$  von verschiedenen Charakteren ist stets linear unabhängig in  $F$ . Speziell gilt dies, wenn die  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  Isomorphismen eines Körpers  $E$  auf einen Körper  $E'$  sind. Die bei allen  $n$  Isomorphismen festbleibenden Elemente von  $E$  bilden einen Teilkörper, den Fixkörper  $\bar{F} \subset E$ .  $\text{Grad } (E/\bar{F}) \geq n$ , insbesondere auch wenn  $E' = E$ , so daß die  $\sigma_r$  Automorphismen sind. Andererseits wird die Gruppe der Automorphismen eingeführt, die einen vorgegebenen Teilkörper  $F$  von  $E$  festlassen. Der Fixkörper  $\bar{F}$  dieser Gruppe kann größer als  $F$  sein.  $E$  wird eine normale Erweiterung von  $F$  genannt, wenn  $\bar{F} = F$  ist; in diesem Fall, wo die in Betracht kommenden Automorphismen eine Gruppe bilden, ist  $(E/F) = n$ . Sodann wird die Verbindung mit der klassischen Definition einer normalen Erweiterung her-

gestellt durch den Beweis, daß  $E$  dann und nur dann eine normale Erweiterung von  $F$  ist, wenn  $E$  Wurzelkörper eines Polynoms in  $F$  ist, dessen über  $F$  irreduzible Faktoren separabel sind. Dieser Abschnitt schließt mit dem Fundamentalsatz. Es folgen einige nicht überall zu findende Anwendungen, wie eine kurze Theorie der Kummer'schen Körper, sowie die Lösung der „Noetherschen Gleichungen“ mit anschließender Bestimmung der Charaktere in  $F$  für die Automorphismengruppe von  $E$  über  $F$ . Das dritte (letzte) Kapitel bringt eine Diskussion des Problems der Auflösung von Gleichungen durch Radikale, dargestellt von A. N. Milgram. In der zweiten Auflage ist der Abschnitt über lineare Algebra durch eine Einführung der Determinanten ergänzt. Überdies findet man einen Beweis für den Hauptsatz über abelsche Gruppen.

H. Schwerdtfeger.

Tschebotarow, N. G.: The problem of resolvents and critical manifolds. Izvestija Akad. Nauk SSSR. Ser. mat. **7**, 123—146 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Weiterer Beitrag zum Resolventenproblem, welches der Verf. in früheren Arbeiten aus Fragestellungen von Klein und Hilbert entwickelt und bearbeitet hat. [Vgl. Hilbert, Math. Ann. **97**, 243—250 (1926).] Gegeben sei die Gleichung (1)  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ , deren komplexe Koeffizienten  $a_r$  Polynome in den komplexen Parametern  $u_1, \dots, u_m$  ( $m \leq n$ ) sind. Es handelt sich darum, durch geeignete rationale Transformationen der Wurzeln  $x_r$  die Gleichung (1) in eine andere mit möglichst kleiner Anzahl  $s$  von Parametern überzuführen. Die hier verwendete, komplizierte Methode beruht auf der Deutung der Galoisschen Gruppe  $G$  der Gleichung (1) als Monodromiegruppe, bestehend aus den Permutationen, die sich ergeben, wenn man die Wurzeln der Gleichung (1), als analytische Funktionen von  $u_1, \dots, u_m$  betrachtet, auf alle erdenkliche Weise längs geschlossenen Wegen im  $u$ -Raum analytisch fortsetzt. Bei Fortsetzung längs geschlossenen Wegen in einer Umgebung eines Punktes  $P$  entsteht die sog. zu  $P$  gehörige Trägheitsgruppe. Sei  $P$  ein Punkt einer kritischen Mannigfaltigkeit, d. h. einer Gesamtheit von Punkten, in denen die Wurzeln der entsprechenden Gleichung (1) mehrfach sind, so daß etwa die folgenden Inzidenzen stattfinden:  $x_1 = \dots = x_{\mu_1}$ ,  $x_{\mu_1+1} = \dots = x_{\mu_2}$ ,  $\dots$ ,  $x_{\mu_{k-1}+1} = \dots = x_n$ . Insbesondere wird der Fall betrachtet, daß die  $a_r$  linear in den  $u_i$  sind. Die Trägheitsgruppe von  $P$  enthält dann eine Permutation des Zyklentypus  $(1, \dots, \mu_1)(\mu_1 + 1, \dots, \mu_2) \dots (\mu_{k-1} + 1, \dots, n)$ , dem zugleich eine gewisse kritische Mannigfaltigkeit entspricht. Einem Punkt in einer Umgebung von  $P$  wird dann ein Typus mit kleineren Zyklen entsprechen, deren jeder ganz in dem genannten enthalten ist. So ergibt sich eine Kette von kritischen Mannigfaltigkeiten  $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_q$ , die der Gleichung (1) zugeordnet ist. Es wird gezeigt, daß dann jede rationale Resolvente nicht weniger als  $q$  Parameter enthält. Im Falle eines  $f(x)$  mit alternierender Galoisscher Gruppe findet Verf., daß die Anzahl  $s$  wesentlicher Parameter  $\geq [2^{-1}(n-1)]$  ist. Er vergleicht sein Ergebnis mit dem von Hilbert für  $n = 5, \dots, 9$  in der folgenden Tabelle:

	$n = 5$	6	7	8	9
Tschebotarevs rationale Resolvente:	$s_T = 2$	2	3	3	4
Hilberts irrationale Resolvente:	$s_H \leq 1$	2	3	4	4

Im Falle  $n = 5$  erweist sich also die Heranziehung irrationaler Resolventen als von wesentlicher Bedeutung, da so die Anzahl der Parameter vermindert wird. Die Frage, ob die gefundene untere Grenze für  $s_T$  mit der oberen zusammenfällt, bleibt unentschieden. Verf. bringt Argumente, die eine bejahende Antwort auf diese Frage wahrscheinlich machen; doch stellt er fest, daß sie für eine Entscheidung nicht ausreichen. — Manche Einzelheiten dieser Arbeit dürften eine genauere Ausführung verdienen.

H. Schwerdtfeger.

**Todd, J. A.:** The „odd“ number six. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **41**, 66—68 (1945).

Sei  $\varphi_1 = \varphi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  eine  $n$ -wertige rationale Funktion über dem Körper der komplexen Zahlen von den  $n$  Wurzeln der normierten „allgemeinen“ Gleichung  $n$ -ten Grades und  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  die  $n$  Werte, die sich bei allen Permutationen von  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ergeben. Kann man sie so anordnen, daß  $\varphi_r = \varphi(\alpha_r)$  ist, wo  $\varphi(x)$  eine rationale Funktion in einer einzigen Unbestimmten ist? Die Frage wird auf die bekannte Burnsidesche Ergänzung des Bertrandschen Satzes zurückgeführt und so gezeigt, daß sie stets zu bejahen ist, wenn  $n \neq 6$ . Der Ausnahmefall der symmetrischen Gruppe  $\gamma_6$  wird mit einem ebenfalls an sich bekannten Fakt aus der Theorie der geometrischen Konfigurationen in Beziehung gesetzt. *H. Schwerdtfeger.*

**Caracciolo, Maria Serra:** Delle equazioni a radici opposte. *Boll. Mat.*, IV. Ser. **1**, 33—38 (1940).

**Kennedy, E. C.:** Bounds for the roots of a trinomial equation. *Amer. math. Monthly* **47**, 468—470 (1940).

**Albert, A. A.:** An inductive proof of Descartes' rule of signs. *Amer. math. Monthly* **50**, 178—180 (1943).

**Conkwright, N. B.:** An elementary proof of the Budan-Fourier theorem. *Amer. math. Monthly* **50**, 603—605 (1943).

This proof depends on Descartes' rule of signs and Rolle's theorem.

*E. Frank.*

**Vigil, Luis:** Bemerkungen zu einem Satz von Rey Pastor über die Graeffesche Methode. *Univ. nac. Litoral, Inst. Mat.*, Publ. **6**, 191—193 (1946) [Spanisch].

The theorem of Pastor states that each root of  $f(x) = 0$  differs from a root of  $f(x) = \delta$  by less than  $|\delta|^{1/n}$ , where  $f(x)$  is a polynomial of degree  $n$ . Ostrowski (this Zbl. **23**, 334) has observed that there is not necessarily a one-to-one correspondence between the roots of  $f(x) = 0$  and  $f(x) = \delta$ . Here examples are given and it is shown that the correspondence is one-to-one if  $\delta$  is sufficiently small.

*E. Frank.*

**Boulanger, J.:** Sur l'équation de Leuschner. *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* **12**, 680—692 (1943).

For the equation of Leuschner  $(x - m)^2 (x^2 - 2x \cos \psi + 1)^3 - m^2 = 0$ , the separation of the roots and the calculation of the values approached by the roots is discussed for various values of  $m$  and  $\psi$ .

*E. Frank.*

**Maximoff, I.:** On neighbouring roots. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. **37**, 88—90 (1942).

A system  $x_1, x_2, \dots, x_k$  of real roots of a real equation  $f(x) = 0$  is defined as a complete set of neighboring roots of order  $k$  if  $x_k - x_{k-1} = x_{k-1} - x_{k-2} = \dots = x_2 - x_1 = h > 0$  and  $f(x_1 - h) \neq 0$ ,  $f(x_k + h) \neq 0$ . Methods are given for the factorization of  $f(x)$  according to its complete sets of neighbouring roots, and for a given  $h > 0$  for finding the complete set of neighbouring roots to which a given root  $\bar{x}$  belongs.

*E. Frank.*

**Tschebotaröw, N.:** On the methods of Sturm and Fourier for transcendental functions. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. **34**, 2—4 (1942).

Sturm's theorem for the number of roots of an algebraic equation is modified for transcendental equations  $f(x, \cos x, \sin x) = 0$ , where  $f$  is a real polynomial. The Sturm sequene is formed for  $f$  and  $f'$ , the total derivative of  $f$ , with  $\sin x$  and  $\cos x$  taken as constants. Fourier's method is similarly modified for equations of this type.

*E. Frank.*

**Tschebotaröw, N. G.:** Über die Fortsetzbarkeit von Polynomen auf geschlossene Kurven. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. **32**, 3—6 (1941).

**Gavriloff, L.:** Sur la  $K$ -prolongation des polynômes. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. **32**, 235—236 (1941).



(1) Gawrilow, L.: Über  $F$ -Polynome. V. Über  $K$ -Fortsetzbarkeit der Polynome. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. Sér. 12, 139—146 [mit russischer Zusammenfassg.].

(2) Gawrilow, L. und N. Tschebotarow: Über  $F$ -Polynome. VI.  $K$ -Polynome mit verschobenem Zentrum. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. Sér. 12, 183—195 (1940) [Russisch mit deutscher Zusammenfassg.].

(3) Gavrilov, L.: On  $K$ -prolongeable polynomials. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 37, 246—249 (1942).

Allgemeine Orientierung über die in diesen Arbeiten behandelten Probleme bei Tschebotarow [Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. Sér., 8, 109—123 (1937)]. Die dort meist nur angedeuteten Ergebnisse werden ausführlich begründet. (1) bringt eine Vereinfachung des Beweises für den Satz, daß man jedes Polynom so fortsetzen kann, daß alle Wurzeln des fortgesetzten Polynoms auf dem Einheitskreise  $|z| = 1$  liegen; diesen Satz hatte Verf. schon bewiesen [Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. Sér., 8, 125—129 (1937)]. In (2) wird gezeigt, daß man den vorgeschriebenen Kreis, auf dem die Wurzeln liegen sollen, beliebig wählen kann. Das Hauptinteresse dieser von Tschebotarow herrührenden Probleme liegt in ihrem Zusammenhang mit wichtigen Problemklassen der Funktionentheorie, wie Koeffizientenprobleme, Momentenprobleme u. a. *H. Schwerdtfeger.*

Tschebotarow, N.: On  $R$ -integrable polynomials. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 35, 63—65 (1942).

Das Polynom  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$  heißt  $R$ -fortsetzbar, wenn es mit den Anfangstermen einer ganzen Funktion vom Typus  $1^*$  (Laguerre-Pólya) zusammenfällt. Das Polynom  $g(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} / (n-i)!$  heißt  $R$ -integrierbar, wenn es als  $m$ -te Ableitung eines Polynoms mit reellen Wurzeln erscheint. Es wird bewiesen, daß  $g(x)$  dann und nur dann  $R$ -integrierbar ist, wenn  $f(x)$   $R$ -fortsetzbar ist. Vgl. hierzu die Arbeit des Verf. [Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. Sér. 8, 103—108 (1937)] und N. Meymann (dies. Zbl. 19, 245). *H. Schwerdtfeger.*

Marden, Morris: The zeros of certain composite polynomials. Bull. Amer. math. Soc. 49, 93—100 (1943).

Let  $A_0(z)$  be a given  $m + h$  degree polynomial and  $A_k(z) = (\beta_k - z) A'_{k-1}(z) + (\gamma_k - k) A_{k-1}(z)$ ,  $\gamma_k \neq m - k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Theorems on the relative location of the zeros of  $A_0(z)$  and  $A_n(z)$  can be found by the familiar method of first finding such relations for two successive  $A_k(z)$  and then iterating the relations  $n$  times. Here this method is used in the case the parameters  $\beta_k$  and  $\gamma_k$  are complex numbers represented by points within certain given regions of the plane. *E. Frank.*

Marden, Morris: A note on the zeros of the sections of a partial fraction. Bull. Amer. math. Soc. 51, 935—940 (1945).

An elementary proof is given of a theorem of Linfield [Bull. Amer. math. Soc. 27, 17—21 (1920); Trans. Amer. math. Soc. 25, 239—258 (1923)] on the location of the zeros of  $\sum_{k=1}^3 m_k i'(z - z_k)$ , where  $z_1, z_2, z_3$  are distinct noncollinear points and  $m_1, m_2, m_3$  are real numbers different from zero. Generalizations are also given. *E. Frank.*

Ostrowski, Alexander: On a theorem by J. L. Walsh concerning the moduli of roots of algebraic equations. Bull. Amer. math. Soc. 47, 742—746 (1941).

Vijayaraghavan, T.: On a theorem of J. L. Walsh concerning the moduli of zeros of polynomials. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 16, 83—86 (1942).

Each of these papers contains a proof of a theorem by J. L. Walsh [Ann. of Math., II. Ser. 26, 59—64 (1924)]. *E. Frank.*

Ancochea, Germán: Sur les polynomes dont les zéros sont symétriques par rapport à un contour circulaire. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 13—15 (1945).

(i) If  $f(x)$  is a polynomial of degree  $n$  with zeros symmetric with respect to the circumference of the unit circle  $C$ , then  $|f'(x)/f(x)| \leq n/2$  for any  $x$  on  $C$ .  
 (ii) Let  $\Gamma$  be a circular contour,  $f(x)$  a polynomial of degree  $n$  with zeros symmetric with respect to  $\Gamma$ , and  $(\xi - x)f'(x) + nf(x)$  the derivative of  $f(x)$  with respect to  $\xi$ . Then [1] if  $\xi$  is on  $\Gamma$ ,  $\xi$  and the zeros of this derivative separate on  $\Gamma$  the zeros of  $f(x)$ , [2] if  $\xi$  is not on  $\Gamma$ , the only zeros of this derivative on  $\Gamma$  are the multiple zeros of  $f(x)$ .  
*E. Frank.*

Montel, Paul: Remarque sur la note précédente. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 15 (1945).

By use of a theorem of J. L. Walsh, theorem (1) in the preceding review is extended to polynomials  $f(x)$  with zeros interior to  $C$  and those forming couples symmetric with respect to  $C$ .  
*E. Frank.*

Ancochea, Germán: Sur l'équivalence de trois propositions de la théorie analytique des polynomes. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 579—581 (1945).

Let  $F(x) = P(x) + iQ(x)$  be a polynomial with complex coefficients, and  $P(x)$ ,  $Q(x)$  be real polynomials without a common factor. Then the equivalence of the following propositions is well-known: (A) The zeros  $F(x)$  are all in  $R(x) > 0$  or  $R(x) < 0$ . (B) The zeros of  $P(x)$  and  $Q(x)$  are real, simple, and interlacing. (C) If  $p$  and  $q$  are arbitrary real constants, the zeros of the polynomial  $pP(x) + qQ(x)$  are all real. Here it is shown that (A) is a consequence of (C) and that (C) implies (B).  
*E. Frank.*

Iglisch, Rudolf: Zur Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Deutsche Math. 7, 520—521 (1944).

An elementary proof by induction is given of the following theorem of H. Kneser (this Zbl. 26, 385): For any polynomial  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ , corresponding to every positive number  $\delta$ , there exists a positive number  $\varepsilon$  independent of the coefficients  $a_j$  such that, if the derivatives  $|f^{(\mu)}(c)| \leq \varepsilon$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, m-1$ , then  $f(x)$  has at least  $m$  zeros in the circle  $|x - c| \leq \delta$ .  
*E. Frank.*

Lipka, Stephan: Über die Anzahl der Nullstellen von  $T$ -Polynomen. Monatsh. Math. 51, 173—178 (1944).

Let  $\Phi_0(x)$ ,  $\Phi_1(x)$ ,  $\dots$ ,  $\Phi_n(x)$  be continuous real functions defined in a closed interval  $(a, b)$ . A system of functions  $\{\Phi_r(x)\}$  is called a  $T$ -system (Chebyscheff system) of the  $n$ -th order if every linear combination  $P_n(x) = \sum_{r=0}^n a_r \Phi_r(x)$ , with real coefficients not all zero, has at most  $n$  distinct zeros in  $(a, b)$ . The  $P_n(x)$  are called the  $T$ -polynomials of the system. D. R. Dickinson (this Zbl. 22, 217) has shown that the  $\Phi_r(x)$  are a  $T$ -system of the  $n$ -th order if and only if for any  $n+1$  distinct points  $x_0, \dots, x_n$  of  $(a, b)$  the determinant  $|\Phi_i(x_j)|_{i,j=0}^n$  does not vanish. Here it is shown that  $P_n(x)$  has at most  $k$  distinct zeros in  $(a, b)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , if and only if the rank of the matrix  $|\Phi_i(x_j)|_{i,j=0}^n$  is  $k+1$ . Furthermore, if  $P_n(x)$  has at most  $k$  distinct zeros and if  $s$  denotes the number of zeros of  $P_n(x)$  at which  $P_n(x)$  undergoes a change of sign and  $d$  the number of zeros of  $P_n(x)$  without change of sign, then  $s + 2d \leq k$ .  
*E. Frank.*

Weisner, Louis: Moduli of the roots of polynomials and power series. Amer. math. Monthly 48, 33—36 (1941).

Bounds for the moduli of the zeros of polynomials are given. *E. Frank.*

Weisner, Louis: Roots of certain classes of polynomials. Bull. Amer. math. Soc. 48, 283—286 (1942).

Let  $\Phi(z)$ ,  $f(z)$  be polynomials with real zeros. If all roots of  $f(z) = \sum c_k z^k = 0$  satisfy  $|z| = 1$  and all roots of  $\Phi(z) = 0$  satisfy  $R(z) = 0$ , then all roots of  $g(z) = \sum c_k \cdot \Phi(2k - n) z^k = 0$  satisfy  $|z| = 1$ , where  $n$  is the degree of  $f(z)$ . Also, if all roots of  $\Phi(z) = 0$  satisfy  $R(z) = 0$  and all roots of  $f(z)$  lie in the ring  $r_1 \leq |z| \leq r_2$ , then all roots of  $g(z)$  lie in this ring.

*E. Frank.*

**Weisner, Louis:** Polynomials whose roots lie in a sector. *Amer. J. Math.* **64**, 55—60 (1942).

Let  $A(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ ,  $B(z) = b_0 + \dots + b_m z^m$ ,  $f(z) = a_0 b_0 + a_1 b_1 z + \dots + a_s b_s z^s$ ,  $g(z) = a_0 b_0 + 1! a_1 b_1 z + \dots + s! a_s b_s z^s$ ,  $s = \min(m, n)$ . The theorems of Malmgren and Schur are generalized to the case in which the zeros of  $A(z)$  are real while those of  $B(z)$  lie in a sector  $S$  with vertex at the origin. The roots of  $f(z)$  and  $g(z)$  then lie in the double sector  $\pm S$ . The same conclusions apply to the polynomial  $h(z)$ , where  $A(z) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 z + \dots + \binom{n}{n} a_n z^n$ ,  $B(z) = b_0 + \binom{n}{1} b_1 z + \dots + \binom{n}{n} b_n z^n$ ,  $h(z) = a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 z + \dots + \binom{n}{n} a_n b_n z^n$ .

*E. Frank.*

(1) **Frank, Evelyn:** On the zeros of polynomials with complex coefficients. *Bull. Amer. math. Soc.* **52**, 144—157 (1946).

(2) **Frank, Evelyn:** The location of the zeros of polynomials with complex coefficients. *Bull. Amer. math. Soc.* **52**, 890—898 (1946).

Let  $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  be a polynomial with complex coefficients,  $a_k = p_k + i q_k$ . In (1) the author forms  $Q(z) = p_1 z^{n-1} + i q_2 z^{n-2} + p_3 z^{n-3} + i q_4 z^{n-4} + \dots$ , and

$$[1] \quad \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{1}{c_1 z - k_1} + \frac{1}{c_2 z - k_2} + \dots + \frac{1}{c_n z - k_n}.$$

If  $k$  of the  $c_p$  are negative and  $n - k$  are positive, then  $P(z)$  has  $k$  zeros with positive real parts and  $n - k$  with negative real parts. This extends the theorem of Wall (this Zbl. **60**, 55) to complex polynomials. A determinant criterion in terms of the  $p_k$  and  $q_k$  is given for all the zeros of  $P(z)$  to have negative real parts. This extends the determinant criterion of Hurwitz and is equivalent to that given by Bilharz [*Z. angew. Math. Mech.* **24**, 77—82 (1944)]. An algorithm is given for the rapid expansion of  $Q(z)/P(z)$  into the continued fraction [1]. In (2), let  $z = r(w - 1)/(w + 1)$ . The results of (1) are applied to  $P_r(w) = (w + 1)^n P(z)$  for the determination of the number of zeros of  $P(z)$  within  $|z| = r$ . Then, an algorithm is set up for the computation of the zeros of  $P(z)$  by the successive variation of the values of  $r$  until the number of zeros within  $|z| = r$  changes.

*E. Frank.*

**Szász, Otto:** On sequences of polynomials and the distribution of their zeros. *Bull. Amer. math. Soc.* **49**, 377—383 (1943).

Let  $\{P_n(z)\}$  be a sequence of polynomials of degree  $m_n \uparrow \infty$  with roots in the half-plane  $\operatorname{Re} \epsilon^{i\theta} n z \leq 0$ ,  $z \neq 0$ . Let  $P_n(0)$ ,  $\{P_n(0)\}^{-1}$ ,  $P'_n(0)$ ,  $P''_n(0)$  be bounded. Then  $\{P_n(z)\}$  is uniformly bounded in any circle  $|z| \leq r$ .

*E. Frank.*

**Perelmann, M.:** Sur une propriété des suites des polynômes. *Leningradsk. gosudarst. Univ. učnye Zapiski* **83** (Ser. mat. Nauk **12**), 87—91 (1941) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

For two sequences of polynomials  $P_1(x_1, \dots, x_k)$ ,  $P_2(x_1, \dots, x_k), \dots$  and  $Q_1(x_1, \dots, x_k)$ ,  $Q_2(x_1, \dots, x_k), \dots$ , there exists an integer  $n_0$  such that, if  $P_i(x_1^0, \dots, x_k^0) = Q_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_0$ , then  $P_i(x_1^0, \dots, x_k^0) = Q_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , for any complex numbers  $x_1^0, \dots, x_k^0$ , and  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ .

*E. Frank.*

**Tsuji, Masatsugu:** Algebraic equation, whose roots lie in a unit circle or in a half-plane. *Proc. Japan Acad.* **21** (1945), 313—320 (1949).



Let  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ,  $\bar{f}(z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \dots + \bar{a}_n z^n$ ,  $f^*(z) = z^n \bar{f}(1/z)$ . A proof is given of the theorem of A. Cohn [Math. Z. **14**, 110—148 (1922)] that if  $f(z)$  and  $f^*(z)$  have no common factor, if the matrix  $(h_{jk}) = \bar{B}' B - \bar{A}' A$ , where  $A$ ,  $\bar{A}'$ ,  $B$ , and  $\bar{B}'$  are the triangular matrices  $(c_{jk})$  with  $c_{jk} = a_{j-k}$ ,  $\bar{a}_{k-j}$ ,  $\bar{a}_{n+k-j}$ , and  $a_{n+j-k}$  respectively, and if the Hermitian form  $H = \sum_{j,k=0}^{n-1} h_{jk} x_j \bar{x}_k$  is of rank  $n$  and it is reduced to the normal form  $H = |y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_p|^2 - |y_{p+1}|^2 - |y_{p+2}|^2 - \dots - |y_n|^2$ , then  $f(z) = 0$  has  $p$  roots in  $|z| < 1$  and  $n - p$  in  $|z| > 1$ . Other theorems concerning the number of roots of  $f(z) = 0$  in  $I(z) < 0$ ,  $I(z) > 0$ ,  $R(z) < 0$ ,  $R(z) > 0$ , are shown by means of Hermitian forms. These are similar to those due to Fujiwara [Math. Z. **24**, 161—169 (1925)]. *E. Frank.*

**Gaspar, Fernando L.:** Über eine Eigenschaft algebraischer Gleichungen mit reellen Wurzeln. *Revista Un. mat. Argentina* **8**, 81—90 (1942) [Spanisch].

Let  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$  be a polynomial with  $n$  distinct real zeros  $x_i$ . For weights  $y_i$  and moments  $\mu_k = \sum_{i=1}^n y_i x_i^k$ , the polynomials

$$P_i(x) = c \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^i \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_i \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{i-1} & \mu_i & \mu_{i+1} & \dots & \mu_{2i-1} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

where  $c$  is a constant, are orthogonal in the  $x_i$  with respect to the  $y_i$ , i. e.,

$$\sum_{i=1}^n y_i P_j(x_i) P_k(x_i) = 0, \quad j \neq k \text{ or } j = k \geq n, \\ \neq 0, \quad j = k < n.$$

*E. Frank.*

**Perlin, Irwin E.:** Sufficient conditions that polynomials in several variables be positive. *Bull. Amer. math. Soc.* **48**, 458—466 (1942).

Let  $L(x, y) = \sum c_{ij} x^i y^j$  be a polynomial of degree  $2m$  in  $x$  and  $2n$  in  $y$  and let the  $c_{ij}$  be real numbers. Sufficient conditions on the coefficients are found that the polynomial be positive for real values of the variables. Similar conditions are found for polynomials in several variables. *E. Frank.*

**Conte, Luigi:** La limitazione delle radici reali di una equazione algebrica secondo Newton. *Atti Mem. Accad. Sci. Lett. Arti Padova, Mem. Cl. Sci. fis.-mat., n. Ser.* **58**, 163—174 (1942).

Rules given by Newton for the limits of the absolute values of the roots of an algebraic equation are stated and discussed. *E. Frank.*

(1) **Sherman, S., J. DiPaola and H. F. Frissel:** The simplification of flutter calculations by use of an extended form of the Routh-Hurwitz discriminant. *J. aeronaut. Sci.* **12**, 385—392 (1945).

(2) **Sherman, Seymour:** Generalized Routh-Hurwitz discriminant. (An extension of the theorems of Sturm, Routh, and Hurwitz on the roots of polynomial equations.) *Philos. Mag., VII. Ser.* **37**, 537—551 (1946).

In (1) the Routh and Hurwitz criteria for real polynomials to have only zeros with negative real parts are stated for polynomials with complex coefficients. In (2) there is given the construction of a Sturm sequence by Cauchy's index theorem for the number of zeros in a sector, and the Routh and Hurwitz criteria for the number of zeros in a half plane bounded by any line through the origin. *E. Frank.*

**Turán, P.:** On rational polynomials. *Acta Sci. math., Szeged* **11**, 106—113 (1946).

(I) Let  $f(x)$  be a polynomial of degree  $n$  with real coefficients such that  $f(\pm 1) = 0$  and  $f(x) \neq 0$  for  $-1 < x < 1$ . If the absolute maximum of  $f(x)$  in  $-1 \leq x \leq 1$  is attained for  $x = \xi$ , then  $|\xi| \leq \cos(\pi/n)$ , for  $n$  even, and  $|\xi| \leq [3 \cos(\pi/n) - 1]/[1 + \cos(\pi/n)]$ , for  $n$  odd. These bounds are the best possible.  
 (II) Let  $G(z)$  be a polynomial of degree  $n$  and  $\max |G(z)| = |G(1)|$  for  $|z| \leq 1$ . This polynomial cannot vanish on the open arc  $|\arg z| < \pi/n$  of the unit circle and vanishes at the end-points of this arc only if  $G(z) = c(1 + z^n)$ . *E. Frank.*

Beaman, Elizabeth: The moduli of the roots of an algebraic equation. *Amer. math. Monthly* **53**, 506—510 (1946).

Polynomials are found with real coefficients of the second and third degrees which have as zeros the squares of the absolute values of the zeros of a given polynomial of the second or third degree, with complex coefficients. *E. Frank.*

Erdős, P.: On the uniform distribution of the roots of certain polynomials. *Ann. of Math.*, II. Ser. **43**, 59—64 (1942).

This is a continuation of a study of the problems considered by Erdős and Turán (this Zbl. **23**, 22). *E. Frank.*

Erdős, P. and G. Szegő: On a problem of I. Schur. *Ann. of Math.*, II. Ser. **43**, 451—470 (1942).

Let  $Q_n(x_0)$  be a class of polynomials  $f(x)$  of degree  $n$  such that  $|f(x)| \leq 1$  for  $-1 \leq x \leq 1$  and  $f'(x_0) = 0$ . The maximum  $m_n \cdot n^2$  of  $|f'(x_0)|$  for  $-1 \leq x_0 \leq 1$  is attained if and only if  $x_0 = \pm 1$ , and  $f(x)$  satisfies the differential equation of Zolotareff. Furthermore,  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n$  exists and has the value 0.3124. *E. Frank.*

Verblunsky, S.: On positive polynomials. *J. London math. Soc.* **20**, 73—79 (1945).

Let  $p_n(x)$  be a polynomial of degree  $n$  with real coefficients, and  $A, B$  polynomials with real coefficients. If  $p_n \geq 0$  for all  $x$ , then  $p_n = A^2 + B^2$ . If  $p_n \geq 0$ ,  $x \geq 0$ , then  $p_n = A^2 + xB^2$ . If  $p_n \geq 0$  for  $-1 \leq x \leq 1$ , then  $p_n = A^2 + (1 - x^2)B^2$  if  $n$  is even and  $p_n = (1 + x)A^2 + (1 - x)B^2$  if  $n$  is odd. Other known and new results are proved. *E. Frank.*

Wall, H. S.: Polynomials whose zeros have negative real parts. *Amer. math. Monthly* **52**, 308—322 (1945).

Let  $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  be a polynomial with real coefficients. Form  $Q(z) = a_1 z^{n-1} + a_3 z^{n-3} + \dots$  and

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{1}{c_1 z - 1} + \frac{1}{c_2 z} + \frac{1}{c_3 z} + \dots + \frac{1}{c_n z}.$$

If  $k$  of the  $c_p$  are negative and  $n - k$  positive, then  $P(z)$  has  $k$  zeros with positive real parts and  $n - k$  with negative real parts. *E. Frank.*

Batschelet, Eduard: Untersuchungen über die absoluten Beträge der Wurzeln algebraischer, insbesondere kubischer Gleichungen. *Verhandlungen naturforsch. Ges. Basel* **55**, 158—179 (1944).

Batschelet, Eduard: Über die absoluten Beträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen. *Acta math.* **76**, 253—260 (1945).

Batschelet, Eduard: Über die Schranken für die absoluten Beträge der Wurzeln von Polynomen. *Commentarii math. Helvet.* **17**, 128—134 (1945).

Ostrowski (this Zbl. **23**, 334) proved that for a polynomial  $A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$ ,  $A_0 \neq 0$ , with real or complex coefficients with zeros  $x_k$  arranged such that  $|x_1| \leq |x_2| \leq \dots \leq |x_n|$ , on variation of only the arguments of the  $A_k$ , the inequality  $0 < a_k \leq |x_k| \leq b_k$  holds with  $b_k/a_k \leq C_n = 0.73(n+1)^2$ . If  $c_n$  is the smallest number which may replace  $C_n$ ,  $1 \leq c_n \leq C_n$ , Ostrowski showed that  $\liminf c_n/n \geq 4/\pi$ . It is shown that  $\liminf c_n/n = (\log 2)^{-1}$ ,  $c_n \sim n^2/4$  and  $c_n^{(k)} > k(n - k + 1)$  where  $c_n^{(k)}$  is a constant analogous to  $c_n$  with fixed  $k$ . Ostrowski had obtained the bound  $c_n^{(k)} \leq (3/2 + \sqrt{2})k(n - k + 1)$ . *E. Frank.*

**Batschelet, Eduard:** Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. *Elemente Mathematik* **1**, 73—81 (1946).

Let  $f(x) = x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$  be a polynomial equation with real or complex coefficients. A number of results obtained by Newton, Laguerre, Birkhoff and Jensen, Fekete, and Takahashi concerning the separation of the roots of  $f(x) = 0$  are derived by the use of Grace's theorem [*Proc. Cambridge philos. Soc.* **11**, 352—357 (1902)]. Some results are also extended. In particular, (1.) an upper bound is shown for the error committed when the Newton approximation method is broken off after  $k$  steps; (2.) at least one root of  $f(x) = 0$  lies inside or on the circumference of any circle through the points  $\pm (a_n/a_{n-2})^{1/n}$  (similar to results of Laguerre); (3.) if  $\lambda = \{|f(\alpha)|/|f(\beta)|\}^{1/n}$ ,  $\alpha, \beta$  any complex numbers, at least one root of  $f(x) = 0$  lies inside or on the circle  $|x - \alpha| = \lambda|x - \beta|$  (an extension of a result by Fekete); (4.) if all roots of  $f(x) = 0$  lie in a circle  $K$  for which  $x = 0$  lies outside, then all points  $-a_k/a_{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , lie inside  $K$  (an extension of a result by Takahashi). *E. Frank.*

**Garnea, E. G.:** Über eine Eigenschaft der Wurzeln der Ableitung eines Polynoms dritten Grades. *Revista Soc. Cubana Ci. Fís. Mat.* **1**, 115—122 (1943) [Spanisch].

**Soula, J.:** Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique de degré  $n$  et l'équation dérivée de degré  $n - 2$ . *Mathematica. Timișoara* **19**, 60—66 (1943).

Let  $z_1, z_2, \dots, z_n$  be the roots of the equation

$$f(z) = z^n + A z^{n-1} + B z^{n-2} + \dots = 0,$$

and  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  the roots of its derivative  $f^{(n-2)} = 0$  of order  $n - 2$ . Let  $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ ,  $L^2 = \sum |z_j - z_k|^2$ , and  $\Delta^2 = \sum \Delta_{jk}^2$ , where  $\Delta_{jk}$  is the area of the triangle with vertices  $z_j, z_k$ , and  $\gamma$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, n$ . Then  $|\gamma_1 - \gamma_2|^2 = 4(L^4/n^2 - 16\Delta^2)^{1/2}/n(n-1)$ . If the points  $z_j$  lie in a rectangle with sides of lengths  $a$  and  $b$  with at least one  $z_j$  on each side of the rectangle, then  $n(a^2 + b^2)/2 \leq L^2 \leq n^2(a^2 + b^2)/4$ . Therefore  $|\gamma_1 - \gamma_2|^2 \geq (a^2 + b^2)/(n-1)$ , and, if  $b = 0$  and the  $z_j$  are real,

$$a^2/2n(n-1) \leq |\gamma_1 - \gamma_2|^2/4 \leq a^2/4(n-1).$$

*E. Frank.*

**Bruijn, N. G. de:** On the zeros of a polynomial and of its derivative. *Nederl. Akad. Wet., Proc.* **49**, 1037—1044 = *Indagationes Math.* **8**, 635—642 (1946).

Let  $f(z)$ , a polynomial of degree  $n$  with real coefficients, have zeros  $a_p$ , and  $f'(z)$  have zeros  $b_p$ . Then  $(n-1)^{-1} \sum_{p=1}^{n-1} |I(b_p)| \leq n^{-1} \sum_{p=1}^n |I(a_p)|$ , with equality only if all the zeros of  $f(z)$  are real. This theorem is also generalized and applications of these theorems are given which show a tendency for the zeros of  $f'(z)$  to lie closer to the real axis than those of  $f(z)$ . *E. Frank.*

**Biernacki, M.:** Sur les zéros des polynômes et sur les fonctions entières dont le développement taylorien présente des lacunes. *Bull. Sci. math., II. Sér.* **69**, 197—203 (1945).

A new bound is found on the least number  $\Phi(n, p)$  such that, if a polynomial  $P(x)$  of degree  $n$  has  $n - p$  zeros in a circle of radius  $R$ , its first derivative  $P'(x)$  will have at least  $n - p - 1$  zeros in the concentric circle of radius  $R\Phi(n, p)$ .

*E. Frank.*

**Montgomery, John C.:** The roots of a polynomial and its derivative. *Bull. Amer. math. Soc.* **47**, 621—624 (1941).

When the location is given of certain of the zeros of the first derivative of a polynomial  $f(z)$  of degree  $n$ , conclusions are drawn concerning the location of the zeros of  $f(z)$ .

*E. Frank.*



Anghelutz, Th.: Sur la détermination de l'indice d'une fonction rationnelle. *Mathematica, Timișoara* 22, 41—50 (1946).

Consider the real polynomials  $U = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ ,  $V = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \dots + b_p$ ,  $p \leq m$ , which have no real zeros in common. In order to calculate the Cauchy index  $I$  of the function  $V/U$ , it is shown that  $I = V_{+\infty} - V_{-\infty}$ , where  $V_{+\infty}$  and  $V_{-\infty}$  are the variations of sign in the sequence  $a_0 x^m, b_0 x^p, -A_1 x^{p-1}/b_0^{m-p+1}, -A_2 x^{p-2}/b_0^{m-p+1}, \dots, (-1)^{q(q+1)/2} A_q x^{p-q}/b_0^{m-p+1}, \dots, (-1)^{p(p+1)/2} A_p/b_0^{m-p+1}$ , for  $x = +\infty$  and  $x = -\infty$ , where

$$A_q = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{m-p+2q-2} & b_{m-p+2q-1} \\ 0 & b_0 & \dots & b_{m-p+2q-3} & b_{m-p+2q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{q-1} & b_q \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{m-p+2q-2} & a_{m-p+2q-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{m-p+2q-3} & a_{m-p+2q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{m-p+q-1} & a_{m-p+q} \end{vmatrix}.$$

The above result is used to derive the theorem of Hermite that  $I$  is the difference between the number of zeros of  $U + iV$  with positive imaginary parts and the number with negative imaginary parts, where  $m = n$  and  $p = n - 1$ . It is also used to derive the determinant criterion of Hurwitz for a polynomial whose zeros all have negative real parts.

*E. Frank.*

Peiser, Alfred M.: Some applications of Fourier analysis and calculus of probability to the study of real roots of algebraic equations. *Trans. Amer. math. Soc.* 56, 470—493 (1944).

Let  $F(x, t) = x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n = 0$  be an algebraic equation with real coefficients and  $N_n(x) = N_n(x_0, \dots, x_n)$  the number of its real roots. Here the methods of Fourier analysis and calculus of probability are applied to the study of the function  $N_n(x)$ . For example, let  $K_n = \sum_{j=0}^n t^{2j}$ ,  $L_n = \sum_{j=0}^n j t^{2j-1}$ ,

$$M_n = \sum_{j=0}^n j^2 t^{2j-2}, \quad D_n = K_n M_n - L_n^2, \quad R_n = (D_n)^{1/2}/K_n, \quad X_n = \sum_{j=0}^n t^j x_j / (K_n)^{1/2},$$

$$Y_n = \sum_{j=0}^n (K_n j t^{j-1} - L_n t^j) x_j / (K_n D_n)^{1/2}. \text{ Then at each continuity point of } N_n,$$

$$N_n(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} h(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} R_n |Y_n| \exp(-X_n^2 h^2/2) dt. \quad \text{E. Frank.}$$

Couffignal, Louis: Recherches de mathématiques utilisables. Sur les conditions de stabilité des systèmes oscillants. *Revue sci.* 83, 195—210 (1945).

A simplification is given of Routh's conditions for a polynomial equation with real coefficients to have all roots with negative real parts. *E. Frank.*

Leonhard, A.: Neues Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung. *Arch. Elektrotechnik* 38, 17—28 (1944).

A method is given for the determination of stability of a dynamical system. If, in the characteristic equation in the variable  $p$ , the pure imaginary  $i\omega$  is substituted for  $p$ , and  $\omega$  varies from 0 to  $+\infty$ , a curve  $H(i\omega)$  results. From the curve it is determined if the system is stable. Also the number of roots with positive and negative real parts can be determined, and in many cases approximations for a pair of complex roots. Examples illustrate the method in order to show it is simpler to apply than the Nyquist or Hurwitz criteria. *E. Frank.*

Cypkin, Ya. Z. und P. V. Bromberg: Über den Stabilitätsgrad linearer Systeme. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1945, 1163—1168 (1945) [Russisch].

The Hurwitz criterion for the roots of a polynomial equation to lie in the left-half plane is transformed in order for the roots to lie in  $x < -\delta < 0$ . The method is illustrated with a third degree equation. *E. Frank.*

Meerov, M. V.: Kennzeichen für die Aperiodizität eines Regulators. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1945, 1169—1178 (1945) [Russisch].

A determinantal criterion is given for a polynomial equation to have real roots. The method is illustrated with a fourth degree equation. *E. Frank.*

Schmidt, Karl: Stabilität und Aperiodizität bei Bewegungsvorgängen vierter Ordnung. Arch. Elektrotechnik 37, 217—220 (1943).

If the value of  $a_4$  is fixed in the characteristic equation  $a_4 z^4 + z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1 = 0$ , where the  $a$ 's are positive constants, relations are found between  $a_1$  and  $a_2$  which make two of the roots conjugate pure imaginary, and which make two real, negative and equal. The results are shown graphically. *E. Frank.*

Motzkin, Théodore: Sur l'équation irréductible  $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ,  $n > 1$ , à coefficients complexes entiers, dont toutes les racines sont sur une droite. Les 11 classes de droites admissibles. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 220—222 (1945).

Terracini, Alejandro: Einige elementare Bemerkungen hinsichtlich der Realität der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Math. Notae 4, 137—144 (1944) [Spanisch].

Loria, Gino: W. v. Tschirnhaus and algebraic equations with roots in arithmetical progression. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 6, 181—184 (1940).

#### Verbände. Ringe. Körper:

(1) Birkhoff, Garrett: What is a lattice? Amer. math. Monthly 50, 484—487 (1943).

(2) Birkhoff, Garrett: Was ist ein Verband? Gaz. Mat., Lisboa 7, Nr. 27, 1—3 (1946) [Portugiesisch].

(3) Birkhoff, G.: Lattice-ordered groups. Ann. of Math., II. Ser. 43, 298—331 (1942).

(4) Birkhoff, Garrett: Subdirect unions in universal algebra. Bull. Amer. math. Soc. 50, 764—768 (1944).

(5) Birkhoff, George D. and Garrett Birkhoff: Distributive postulates for systems like Boolean algebras. Trans. Amer. math. Soc. 60, 3—11 (1946).

(6) Frink, jr., Orrin: Complemented modular lattices and projective spaces of infinite dimension. Trans. Amer. math. Soc. 60, 452—467 (1946).

(7) Campbell, Alan D.: Set-coordinates for lattices. Bull. Amer. math. Soc. 49, 395—398 (1943).

(8) Day, Mahlon M.: Arithmetic of ordered systems. Trans. Amer. math. Soc. 58, 1—43 (1945).

(9) Krishnan, V. S.: The problem of the last-residue-class in the distributive lattice. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 16, 176—190 (1942).

(10) Krishnan, V. S.: Partially ordered sets and projective geometry. Math. Student 12, 7—14 (1944).

(11) Krishnan, V. S.: Homomorphisms and congruences in general algebra. Math. Student 13, 1—9 (1945).

(12) Krishnan, V. S.: The theory of homomorphisms and congruences for partially ordered sets. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 22, 1—19 (1945).

(13) Vaidyanathaswamy, R.: Partially ordered sets. Math. Student 12, 1—6 (1944).

(14) Pankajam, S.: Group operation in certain distributive lattices. Math. Student 12, 25—29 (1944).

(15) McCoy, Neal H.: Subdirectly irreducible commutative rings. *Duke math. J.* **12**, 381—387 (1945).

(16) Wade, L. I.: Post algebras and rings. *Duke math. J.* **12**, 389—395 (1945).

(17) Chandrasekharan, K.: Partially ordered sets and symbolic logic. *Math. Student* **12**, 14—24 (1944).

(18) Barbilian, D.: Metrisch-konkave Verbände. *Disquisitiones math. phys.* **5**, 1—63 (1946).

(19) Ribeiro, Hugo: Was ist ein Quadriculat? *Gaz. Mat., Lisboa* **7**, Nr. 27, 3—5 (1946) [Portugiesisch].

(20) Cotlar, Mischa: Eine Methode der Konstruktion von Strukturen und ihre Anwendung auf topologische Räume und abstrakte Arithmetik. *Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A* **4**, 105—157 (1944) [Spanisch].

(21) Lorenzen, Paul: Eine Bemerkung zum Schreierschen Verfeinerungssatz. *Math. Z.* **49**, 647—653 (1944).

Der wesentliche Inhalt eines Teils der Arbeiten ist in G. Birkhoff, *Lattice theory* (dies. Zbl. **33**, 101) — zitiert mit „Birkhoff“ — übergegangen. — (1), (2), (10), (11), (13) sind zusammenfassende Berichte. — (3): Vgl. Birkhoff, Kap. 14. — (4): Vgl. Birkhoff, Kap. 6, 6. Kap. 9.5. — Anschließend an (4) zeigt (15), daß ein kommutativer Ring  $R$  dann und nur dann subdirekt irreduzibel ist, wenn die Nullteiler ein Ideal  $D$  bilden und dabei gilt a) für  $D \neq R$ :  $D$  ist maximales Ideal, der Annihilator von  $D$  ist ein Hauptideal ( $j$ ) und zu jedem  $d_1 \in D$ ,  $d_1 \notin (j)$  gibt es ein  $d_2$  mit  $d_1 d_2 = j$ . b) für  $D = R$ : Es gibt eine Primzahl  $p$ , so daß aus  $a \in R$ ,  $aR = 0$  folgt  $p^k a = 0$  ( $k$  von  $a$  abhängig), ferner aus  $a \in R$ ,  $aR = 0 = pa$  folgt  $bc = j$  für geeignetes  $c \in R$ . Enthält ein subdirekt irreduzibles  $R$  einen Nicht-Nullteiler und sind alle absteigenden Idealketten endlich, so sind alle Nullteiler nilpotent. — (16): Gestützt auf (4) und (15) untersucht Wade kommutative Ringe  $R$  mit endlicher Charakteristik, in denen für jeden Primteiler  $p$  der Charakteristik  $x^p - x = p y$  gilt. Diese  $R$  sind Verallgemeinerungen von „Post-Algebren“ im Sinne von Rosenbloom (dies. Zbl. **60**, 67). Eine Post-Algebra  $P_m$  ist die subdirekte Vereinigung von subdirekt irreduziblen Post-Algebren; diese bestehen jeweils nur aus einer Kette von endlich vielen Elementen. — (5): Untersuchung von Systemen doppelter Komposition (nicht notwendig assoziativ), die den Axiomen  $a(b + c) = ab + ac$ ;  $a1 = a$ ;  $a + a' = 1$  und den jeweils 8 Axiomen genügen, die daraus durch Vertauschung von Addition mit Multiplikation und von rechts mit links entstehen. Die so erzeugten 24 Axiome sind nicht unabhängig. Axiomatische Untersuchung dieser Abhängigkeiten. Jedes Element ist eindeutig als Summe eines geraden (additiv idempotenten) und eines ungeraden (additiv nilpotenten) Elements darstellbar. Die geraden Elemente bilden eine Boolesche Algebra [M. H. K. Newman, *J. London math. Soc.* **16**, 256—272 (1941)]. — (6): Vgl. Birkhoff, S. 130—132. Die dort fehlenden Beweise sind in der Originalarbeit durchgeführt. — (7): Vgl. Birkhoff, S. 20. — (8): Vgl. Birkhoff, Kap. 1 u. 2. Systeme  $(R, \preceq)$ , in denen eine nicht notwendig transitive und nicht notwendig antisymmetrische Relation  $\preceq$  definiert ist. Diese können durch „Kontraktion“  $(R, \preceq) \rightarrow c(R, \preceq)$  antisymmetrisch und durch  $(R, \preceq) \rightarrow t(R, \preceq)$  transitiv gemacht werden. Ein System hat den Transitivitätsgrad  $k$ , wenn aus  $x \preceq s_1 \preceq \dots \preceq s_n \preceq y$  die Existenz einer Kette  $x \preceq t_1 \preceq \dots \preceq t_k \preceq y$  folgt. Dieser Begriff ist wichtig für die Addition und Multiplikation nichtantisymmetrischer Systeme. Haben  $(R, \preceq)$  und — für  $r \in R$  —  $(S_r, \preceq)$  die Transitivitätsgrade  $m$  bzw.  $k$ , so ist der Transitivitätsgrad von  $\Sigma(S_r, \preceq)$  höchstens  $\sup(m + 1, k)$ . Ähnliche Sätze für Multiplikation solcher Systeme. S. 8, Z. 11 statt  $r = r'$ , lies  $r \neq r'$ ,  $s \leq s'$ . — (9): In der indischen Literatur werden, im Anschluß an Vorlesungen von R. Vaidyanathaswamy (s. auch dessen *Treatise on set theory*, dies. Zbl. **31**, 416) die Ideale (im Sinne von Birkhoff) als  $\mu$ -Ideale, die dualen Ideale als  $\alpha$ -Ideale



bezeichnet. In einem distributiven Verbands bilden die mod. einem  $\mu$ -Ideale  $M$  ( $\alpha$ -Ideale  $A$ ) zu 1 (zu 0) kongruenten Elemente („last residue class“) ein  $\alpha$ -Ideal  $M^*$  ( $\mu$ -Ideal  $A^\dagger$ ). Es ist  $(M^*)^\dagger \subseteq M$  bzw.  $(A^\dagger)^* \subseteq A$ . Gleichheit gilt in Booleschen Verbänden. Es werden eine Anzahl neuer Begriffe eingeführt, die Sätze über die im Referat mit \* und  $\dagger$  bezeichneten Operationen auszusprechen erlauben. — (12): Untersuchung der Kongruenzen in Systemen, in denen  $\cup$ , aber nicht  $\cap$  definiert ist; vgl. Birkhoff, S. 25, Ex. 4, b. Die Operationen \* und  $\dagger$  werden auf nicht-distributive Verbände ausgedehnt. Zahlreiche neue Begriffe. — (14): Auf endlichen Ketten wird mit verbandstheoretischen Methoden eine Gruppe von Operationen definiert, die sich als die Gruppe der zyklischen Permutationen herausstellt. — (17): Vgl. Birkhoff, Kap. 12. — (18): Betrifft Verbände, die durch eine Distanzfunktion metrisiert sind. — (19): Ein Quadrikulat ist eine Menge von Quadraten, die ein Rechteck einfach und lückenlos überdecken. Jedes solche Schema kann als distributiver Verband aufgefaßt werden, in dem genau 4 Elemente Komplemente besitzen und jedem Elemente höchstens 2 Elemente vorangehen. Diese Bedingungen sind auch hinreichend für die Darstellbarkeit als Quadrikulat. — (20): Methode zur Erweiterung einer teilweise geordneten Menge zu einem vollständigen Verbande. In der Familie  $I$  von Untermengen  $C, D, \dots$  einer Grundmenge  $E$  besteht neben  $\in$  eine zweite binäre Relation  $\rightarrow$ . Wenn für jedes  $a_1 \rightarrow C_1$  auch  $a_1 \rightarrow C$  gilt, so ist  $C \rightarrow C_1$ , und es ist für  $a \rightarrow C_1$  auch  $a \rightarrow C$ . Eine Unterfamilie von  $I$ , die gegen die Operation  $\rightarrow$  abgeschlossen ist, heißt „Anagene“. Für Anagene wird eine Komposition definiert. Durch Komposition und Durchschnittsbildung konstruiert Verf. Anagene höherer Stufe, um schrittweise zur Lösung des eingangs genannten Problems zu gelangen. Die Methode wird auch auf die accessiblen Räume von Fréchet angewandt. — (21): Der Schreiersche Verfeinerungssatz für Gruppen ist keine Folge des entsprechenden Satzes für modulare Verbände. Verf. betrachtet ein Mengenpaar  $R \supseteq S$ , wobei in  $R$  eine assoziative Multiplikation und eine transitive, antisymmetrische, für die Multiplikation invariante Ordnungsrelation  $\leq$  definiert ist, die eine Durchschnittsoperation erzeugt.  $S$  ist gegen Durchschnitt und Multiplikation kommutativer Elemente abgeschlossen. Für  $a, b, c \in S$  gilt  $a \leq ab$ ,  $b \leq ab$  und, wenn  $a \leq c$ ,  $b \leq c$ , so  $ab \leq c$ . Wenn  $a \in S$ ;  $\beta, \gamma \in R$ ;  $\gamma \leq a$ , so  $a \cap \beta \gamma = (a \cap \beta) \gamma$  und  $a \cap \gamma \beta = \gamma (a \cap \beta)$ . In  $S$  werden „normale“ und „fastnormale“ Ketten definiert und es wird bewiesen: Gleichendige normale Ketten haben isomorphe fastnormale Verfeinerungen. Ist  $R$  die Menge aller Untermengen,  $S$  die Menge aller Untergruppen einer Gruppe  $G$ , so erhält man den Schreierschen Verfeinerungssatz. Weitere Anwendungen des Satzes werden angegeben. Vgl. Lorenzen (dies. Zbl. 55, 23). F. W. Levi.

**Schützenberger, Maurice-Paul:** Sur certains axiomes de la théorie des structures. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 218—220 (1945).

Die für Verbände möglichen Gesetze (= Mengen von Gleichungen) bilden einen Verband mit der Implikation als Teilordnungsbeziehung ( $A \supseteq B$  bedeutet: Aus  $A$  folgt  $B$ ). Das Distributivgesetz besitzt in diesem genau zwei untere Nachbarn  $U_1, U_2$ , wobei  $U_1$  aus einer und  $U_2$  aus zwei Gleichungen besteht.  $U_2$  ist z. B. erfüllt für den freien distributiven Verband mit drei Erzeugenden. Zwischen  $U_2$  und dem modularen Gesetz werden Gesetze aufgewiesen, welche den Desargueschen Satz nach sich ziehen, die endlichen projektiven Räume kennzeichnen oder die Dimension beschränken. G. Pickert.

**Grayev (Graev), M.:** Direct sums of cycles in the Dedekind structures. Mat. Sbornik, n. Ser. 19 (61), 439—450 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Nach Kuroš heißt ein vollständiger Verband vollmodular, wenn in ihm für jede Indexmenge aus  $x_i \leq y_k$  (für  $i \neq k$ ) stets  $(\bigcup x_i) \cap \bigcap y_k = \bigcup (x_i \cap y_i)$

folgt. Ist in einem vollmodularen Verband der Quotient  $a/b$ , d. h. die Menge der  $x$  mit  $b \leq x \leq a$  wohlgeordnet, so heißt  $a/b$  ein Zyklus und die durch diese Wohlordnung bestimmte Ordinalzahl die Länge des Zyklus. Wenn das größte Element des Verbandes direkte Vereinigung (im Quotientenverband) von Zyklen ist, so ist das Längenmaximum dieser Zyklen zugleich das Längenmaximum aller Zyklen, und jeder Zyklus maximaler Länge kann in der vorausgesetzten direkten Vereinigung einen gewissen Zyklus ersetzen. Zusätzliche Voraussetzungen: Jedes Element ist direkte Vereinigung von Zyklen; ein Quotient  $a/b$ , der einen oberen Nachbarn von  $b$  enthält, ist ein Zyklus; ein oberer Nachbar des kleinsten Elementes, der enthalten ist in einer Vereinigung von Zyklen, ist bereits in einer Vereinigung von endlich vielen von ihnen enthalten. Dann gilt: Ist das größte Element direkte Vereinigung von Zyklen der Länge  $\tau$ , so ist jeder Zyklus einer Länge  $< \tau$  Unterzyklus eines Zyklus der Länge  $\tau$ . Unter den gleichen Voraussetzungen werden Sätze über Darstellbarkeit von Elementen als direkte Vereinigung von Zyklen gewonnen. Aus einem von ihnen folgt ein bekannter Satz über direkte Zerlegung periodischer unendlicher abelscher Gruppen in primäre zyklische Gruppen. G. Pickert.

**Dilworth, R. P.:** Dependence relations in a semi-modular lattice. Duke math. J. 11, 575—587 (1944).

In einem nach oben halbmodularen Verband endlicher Dimension wird für Punkte  $p$  (d. h.  $\dim p = 1$ ) eine Abhängigkeitsrelation durch  $p < p_1 \vee \dots \vee p_n$  definiert. Auch für Elemente  $q$  mit  $\dim q = m > 1$  läßt sich eine solche Relation definieren, die sich für  $m = 1$  auf die obige reduziert und für jedes  $m$  die üblichen Eigenschaften einer Abhängigkeitsrelation hat. P. Lorenzen.

**Hall, M. and R. P. Dilworth:** The imbedding problem for modular lattices. Ann. of Math., II. Ser. 45, 450—456 (1944).

Während die Erweiterung eines distributiven Verbandes zu einem distributiven komplementären Verband stets möglich ist, gibt es modulare Verbände, die nicht zu modularen, komplementären Verbänden erweiterbar sind. Es werden auch geometrische Beispiele von modularen Verbänden endlicher Dimension gegeben, die sich nicht zu einem modularen komplementären Verband gleicher Dimension erweitern lassen. P. Lorenzen.

**Dilworth, R. P.:** Lattices with unique complements. Trans. Amer. math. Soc. 57, 123—154 (1945).

Zu jeder teilweise geordneten Menge  $M$  wird in mehreren bemerkenswerten Schritten der freie Verband mit eindeutigen Komplementen über  $M$  konstruiert. Es folgt, daß jeder Verband zu einem Verband mit eindeutigen Komplementen erweitert werden kann. Da es demnach Verbände mit eindeutigen Komplementen und nicht-distributiven Unterverbänden gibt, ist die Vermutung widerlegt, daß jeder eindeutig-komplementäre Verband Boolesch ist. P. Lorenzen.

**Ore, Oystein:** Chains in partially ordered sets. Bull. Amer. math. Soc. 49, 558—566 (1943).

**MacLane, Saunders:** A conjecture of Ore on chains in partially ordered sets. Bull. Amer. math. Soc. 49, 567—568 (1943).

**Duffin, R. J. and Robert S. Pate:** An abstract theory of the Jordan-Hölder composition series. Duke math. J. 10, 743—750 (1943).

**Dilworth, R. P.:** Note on the Kurosch-Ore theorem. Bull. Amer. math. Soc. 52, 659—663 (1946).

In einer teilweise geordneten Menge mit Kettenbedingung sind alle maximalen Ketten zwischen zwei Elementen durch „einfache“ Deformationen ineinander überführbar. Einfach ist definiert durch  $a < c_1 < \dots < c_m < b$  und  $a < c'_1 < \dots < c'_n < b$  mit  $c_1 + c'_1 = b$ ,  $c_m + c'_n = a$ . Für modulare Verbände gilt das Kuroš-Ore-Theorem. Dilworth erhält eine gewisse Verschärfung

durch Benutzung des „superdivisor“-Begriffs;  $r$  heißt superdivisor von  $a$ , wenn  $r \wedge x = a \leftrightarrow x = a$  für alle  $x$ . Diese  $r$  bilden ein Dualideal, das  $a$  echt enthält. Eine weitgehende Verallgemeinerung des Jordan-Hölderschen Satzes läßt sich erhalten durch Betrachtung Boolescher Verbände, in denen zusätzlich eine bzgl.  $\vee$  distributive Multiplikation definiert ist (wie für die Untermengen einer Gruppe).

*P. Lorenzen.*

**Ore, Oystein: Theory of equivalence relations.** Duke Math. J. 9, 573—627 (1942).

Die Theorie der Äquivalenzrelation (Ä. R.) in beliebigen Mengen  $S$  wird ausführlich entwickelt. Der vollständige Verband der Ä. R. ist nicht allemal modular, jedes Element hat aber ein „Dedekindsches“ Komplement. Der Verband  $v(s)$  aller Ä. R. wird axiomatisch charakterisiert. Jedes Element ist Disjunktion von Atomelementen (Punkten) und die Disjunktionen  $p_1 \vee p_2$  von Punkten genügen Bedingungen, die geometrischen Axiomen ähneln. Die Automorphismengruppe von  $v(s)$  ist die Permutationsgruppe von  $S$ .  $v(s)$  besitzt außer Isomorphismen keine nicht-trivialen Homomorphismen.

*P. Lorenzen.*

**Ore, Oystein: Some studies on closure relations.** Duke math. J. 10, 761—785 (1943).

**Ore, Oystein: Combinations of closure relations.** Ann. of Math., II. Ser. 44, 514—533 (1943).

**Ore, Oystein: Galois connexions.** Trans. Amer. math. Soc. 55, 493—514 (1944).

**Everett, C. J.: Closure operators and Galois theory in lattices.** Trans. Amer. math. Soc. 55, 514—525 (1944).

Die  $\mathfrak{C}$ -Räume sind definiert durch eine Hüllenoperation mit  $A \subseteq \bar{A}$  und  $A \subseteq B \rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$ . Die topologischen Begriffe werden auf diese Räume ausgedehnt. Es wird ein Kriterium dafür gegeben, daß zwei Hüllenoperationen isomorphe Verbände der abgeschlossenen Mengen liefern. Die Darstellbarkeit der  $\mathfrak{C}$ -Räume als Relativräume wird untersucht. Die Hüllenoperationen einer Menge  $S$  bilden einen vollständigen Verband  $C_S$ .  $C_S$  ist pseudokomplementär und nach oben halbmodular. Die Auto- und Homomorphismen von  $C_S$  werden untersucht. Für beliebige teilweise geordnete Mengen werden Galois-Zuordnungen definiert. Jede Galois-Zuordnung zwischen den Verbänden aller Untermengen von Mengen  $M$  und  $M^*$  wird durch eine zweistellige Relation zwischen  $M$  und  $M^*$  erzeugt. In vielen Fällen (Krullsche Theorie der unendlichen Galois-Gruppen, Banach-Räume, primäre Abelsche Gruppen) wird zu Hüllenoperationen eine Topologie eingeführt, so daß die Abgeschlossenheit bzgl. der Hüllenoperation mit der bzgl. der Topologie zusammenfällt. Das Kriterium für die Existenz einer solchen Topologie ist:  $A \subseteq \bar{A}_1 \cup \dots \cup \bar{A}_n \rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{A}_1 \cup \dots \cup \bar{A}_n$ .

*P. Lorenzen.*

**McKinsey, J. C. C. and A. Tarski: The algebra of topology.** Ann. of Math., II. Ser. 45, 141—191 (1944).

**McKinsey, J. C. C. and Alfred Tarski: On closed elements in closure algebras.** Ann. of Math., II. Ser. 47, 122—162 (1946).

**Tarski, Alfred: A remark on functionally free algebras.** Ann. of Math., II. Ser. 47, 163—165 (1946).

Ein Boolescher Verband (Teilordnungsbeziehung  $\leq$ ;  $a \cup b$  obere,  $a \cap b$  untere Grenze von  $a, b$ ;  $a'$  das Komplement von  $a$ ;  $0$  das kleinste Element) heißt Abschließungsalgebra (A. A.), wenn für ihn eine Abbildung  $C$  in sich mit  $x \leq Cx$ ,  $CCx = Cx$ ,  $C(x \cup y) = Cx \cup Cy$ ,  $C0 = 0$  gegeben ist. Die Teilmengen eines topologischen Raumes bilden eine A. A., die A. A. über diesem Raum. Jede A. A. ist isomorph mit einer Unterstruktur der A. A. über einem gewissen topologischen Raum. Jede endliche A. A. ist isomorph zur A. A. über einer offenen Menge reeller Zahlen. Es werden die abschließungsalgebraischen, d. h. die mit  $\cup, \cap, C, '$  bildbaren Funktionen untersucht. — Ein Verband mit größtem Element  $1$  und einer wei-



teren binären Verknüpfung  $\pm$  heißt Brouwersche Algebra (B. A.) — denn die intuitionistische Logik bildet eine solche —, wenn  $x \pm y \pm z$  und  $x \pm y \cup z$  dasselbe bedeuten. Diese Bedingung kann auch durch  $x \pm y \cup (x \pm y)$ ,  $(x \cup y) \pm y \pm x$ ,  $x \pm z \leq (x \cup y) \pm z$  ersetzt werden, so daß die Klasse der B. A. gleichungsmäßig definierbar ist. Ein Verband mit größtem Element 1 läßt sich genau dann zu einer B. A. machen, wenn zu  $x, y$  die untere Grenze der  $z$  mit  $x \leq y \cup z$  existiert; diese muß dann  $x \pm y$  gesetzt werden. Die durch  $x = 1 \pm (1 \pm x)$  gekennzeichneten regulären Elemente einer B. A. bilden einen Booleschen Verband. In jeder A. A. wird der Verband der abgeschlossenen Elemente (das sind die Fixelemente von  $C$ ) durch  $x \pm y = C(x \cap y')$  zu einer B. A. Jede B. A. kann in diesem Sinne als Menge der abgeschlossenen Elemente einer A. A. aufgefaßt werden, wobei zu jedem  $x$  aus der A. A. Elemente  $y_i$  aus der B. A. mit  $x = \bigcup_{i=1}^n (y_{2i-1} \cap y'_{2i})$  (in der A. A.) vorhanden sind; die A. A. ist dann bis auf

Isomorphie eindeutig bestimmt. So übertragen sich die über Abschließungsalgebren bekannten Sätze auf die Brouwerschen Algebren. Die Brouwer-algebraischen, d. h. die mit  $\cup, \cap, \pm$  bildbaren Funktionen entsprechen gerade denjenigen abschließungsalgebraischen Funktionen, welche für abgeschlossene Argumente abgeschlossene Werte annehmen. Die abschließungsalgebraischen bzw. die Brouwer-algebraischen Funktionen von  $n$  Argumenten bilden eine freie A. A. bzw. B. A. von  $n$  Erzeugenden. Die B. A. der abgeschlossenen Elemente einer freien A. A. von  $n$  Erzeugenden besitzt eine freie B. A. von  $n$  Erzeugenden als Unterstruktur. — Eine algebraische Struktur  $F$  einer Klasse  $\mathfrak{K}$  algebraischer Strukturen heißt funktional frei, wenn für jede mit den Verknüpfungen der Klasse gebildete Gleichung aus der identischen Erfüllung in  $F$  die identische Erfüllung in jeder Struktur aus  $\mathfrak{K}$  folgt. Ist  $\mathfrak{K}$  gleichungsmäßig definierbar, so gehören zu  $\mathfrak{K}$  genau die homomorphen Bilder von Unterstrukturen direkter Potenzen von  $F$ . Die abgeschlossenen Elemente einer funktional freien A. A. bilden eine funktional freie B. A. Die A. A. über einem Euklidischen Raum (allgemeiner: über einem normalen, in sich dichten topologischen Raum mit abzählbarer Basis) ist funktional frei. Eine funktional freie B. A. enthält unendlich viele reguläre Elemente.

G. Pickert.

Everett, C. J.: Sequence completion of lattice moduls. Duke math. J. 11, 109—119 (1944).

Für kommutative Verbandsgruppen  $\mathfrak{G}$  führt die Cantorsche Kompletzierung  $\mathfrak{G}'$  bzgl. der  $o$ -Konvergenz ( $a_n$  konvergent, wenn  $|a_n - a|$  monoton gegen 0) nicht allemal zu einer  $o$ -vollständigen Verbandsgruppe. Die Erweiterung von  $\mathfrak{G}$  zu einer vollständigen Verbandsgruppe  $\mathfrak{M}$  kann aber durch Dedekindsche Schnitte (McNeille) geschehen.  $\mathfrak{M}$  ist  $o$ -vollständig.

P. Lorenzen.

Bernstein, B. A.: Postulate sets for Boolean rings. Trans. Amer. math. Soc. 55, 393—400 (1944).

Byrne, Lee: Two brief formulations of Boolean algebra. Bull. Amer. math. Soc. 52, 269—272 (1946).

Newman, M. H. A.: Axioms for algebras of Boolean type. J. London math. Soc. 19, 28—31 (1944).

Newman, M. H. A.: A characterization of Boolean lattices and rings. J. London math. Soc. 16, 256—272 (1941).

Newman, M. H. A.: Relatively complemented algebras. J. London math. Soc. 17, 34—47 (1942).

Everett, C. J. and S. Ulam: Projective algebra. I. Amer. J. Math. 68, 77—88 (1946).

Es werden unabhängige Axiomensysteme für Boolesche Ringe aufgestellt. Es genügen (1)  $x \wedge y' = z \wedge z' \leftrightarrow x \wedge y = x$  und (2)  $x \wedge (y \wedge z) = (y \wedge x) \wedge z$ . Eine Menge mit zwei Verknüpfungen  $a \cup b$  und  $a \cdot b$  heißt distributiv, wenn  $c(a \cup b) = c a \cup c b$  und  $(a \cup b) c = a c \cup b c$ .  $a$  heißt linke Null, wenn  $a \cup b = b$  für alle  $b$ . 0 und 1 heißen ein extremes Paar, wenn für alle  $a$  ein  $x$  mit  $x \cup a = 1$  und  $x \cdot a = 0$  existiert.  $M$  ist genau dann direkte Summe eines nichtassoziativen Booleschen Ringes mit Einselement und eines Booleschen Verbandes, wenn  $M$  distributiv ist, eine linke Null besitzt und ein extremes Paar 0, 1, so daß 1 eine linke Eins ist.  $M$  heißt relativ-komplementär, wenn  $M$  ein Element 0 besitzt, so daß für alle  $a$  und  $b$  mit  $a \cdot b = a$  ein  $x$  existiert mit  $a \cup x = b$  und  $a \cdot x = 0$ . Die Untermengen eines direkten Produktes  $x \times y$  von Mengen bilden einen Booleschen Verband, in dem für  $A \subseteq X \times Y$  die Projektionen  $A_x$  und  $A_y$  [ $A_x$  ist die Menge der  $x$  mit  $(x, y) \in A$  für ein  $y$ ] existieren und für  $A \subseteq X$  und  $B \subseteq Y$  ein direktes Produkt  $A \times B$ . Diese „projektiven“ Booleschen Verbände (p. B. V.) werden axiomatisch charakterisiert. Jeder p. B. V. läßt sich vervollständigen. Die atomaren p. B. V. sind isomorph zum Verband aller Untermengen eines geeigneten direkten Mengenproduktes.

P. Lorenzen.

**Wilcox, L. R.:** Modularity in Birkhoff lattices. Bull. Amer. math. Soc. 50, 135—138 (1944).

**Wilcox, L. R.:** A note on complementation in lattices. Bull. Amer. math. Soc. 48, 453—458 (1942).

Für endlich-dimensionale Verbände ist (1) die obere Halbmodularität äquivalent mit (2) der  $M$ -Symmetrie [d. h. die durch „ $b M c \leftrightarrow$  für alle  $a$  mit  $a \leq c$  gilt  $(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$ “ definierte Relation ist symmetrisch] für beliebige Verbände gilt nur (1)  $\rightarrow$  (2). (2) empfiehlt sich als Verallgemeinerung von (1) für beliebige Verbände.  $b_1$  heißt linkes  $M$ -Komplement von  $a$  (bzgl.  $b$ ), wenn  $b_1 \leq b$ ,  $a \vee b_1 = a \vee b$ ,  $a \wedge b_1 = 0$  und  $b_1 M a$ . Jede affine Geometrie ist links-komplementär.

P. Lorenzen.

**Wilcox, L. R. and M. F. Smiley:** Correction: Metric lattices. Ann. of Math., II. Ser. 47, 831 (1946).

Berichtigung zu der in dies. Zbl. 21, 108 besprochenen Arbeit.

**Smiley, Malcolm F.:** A remark on metric Boolean rings. Bull. Amer. math. Soc. 51, 378—380 (1945).

Ein Ring mit 1 und einer reellen Funktion  $\mu$  mit (1)  $a \neq 0 \rightarrow \mu(a) > 0$ , (2)  $\mu(a + b) + 2\mu(ab) = \mu(a) + \mu(b)$  ist ein metrischer Boolescher Ring.

P. Lorenzen.

**Smiley, M. F. and W. R. Transue:** Applications of transitivity of betweenness in lattice theory. Bull. Amer. math. Soc. 49, 280—287 (1943).

**Smiley, M. F.:** A comparison of algebraic, metric, and lattice betweenness. Bull. Amer. math. Soc. 49, 246—252 (1943).

**Transue, W. R.:** Remarks on transitivity of betweenness. Bull. Amer. math. Soc. 50, 108—109 (1944).

In Verbänden wird  $a b c$  gesetzt, wenn  $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$ . Die Gültigkeit von Transitivitäten wie  $a b c$ ,  $d a b$ ,  $x c d$ ,  $a \neq b \rightarrow a c x$  wird untersucht, insbesondere die Charakterisierung von geordneten, metrischen oder modularen Verbänden durch solche Transitivitäten. Es werden Bedingungen für das Zusammenfallen der verbandstheoretischen Zwischenrelation  $a b c$  mit der metrischen  $\delta(a, b) + \delta(b, c) = \delta(a, c)$  oder der affinen  $b = \lambda a + (1 - \lambda) c$  mit  $0 \leq \lambda \leq 1$  aufgestellt.

P. Lorenzen.

**Pitcher, E. and M. F. Smiley:** Transitivity of betweenness. Trans. Amer. math. Soc. 52, 95—114 (1942).

$a b c$  bezeichne das Bestehen einer ternären Relation zwischen den Elementen  $a, b, c$  einer Menge.  $\alpha$  bedeutet: „Wenn  $a b c$ , so  $c b a$ “, und  $\beta$ : „ $a b c$  und  $a c b$ “.

genau dann, wenn  $b = c$ . Unter den Voraussetzungen  $\alpha$  und  $\beta$  werden nun diejenigen nichttrivialen, als Transitivitäten bezeichneten Implikationen mit vier oder fünf Variablen und Hintergliedern der Form  $x y z$  aufgestellt, deren Vorderglieder Konjunktionen von zwei oder drei Gliedern der Form  $x y z$  und gegebenenfalls von Ungleichungen sind (kein Konjunktionsglied soll überflüssig sein), und richtig sind, wenn die ternäre Relation die Zwischenbeziehung einer linearen Ordnung bedeutet; z. B.  $(t_1)$  wenn  $a b c, a d b$ , so  $d b c$ ;  $(t_2)$  wenn  $a b c, a d b$ , so  $a d c$ ;  $(t_3)$  wenn  $a b c, b e d, b \neq c$ , so  $a b d$ ;  $(T_5)$  wenn  $a b c, a d c, b x d$ , so  $a x c$ ;  $(T_6)$  wenn  $a b c, a d b, a c x$ , so  $d c x$ . Die zwischen diesen Transitivitäten unter den Voraussetzungen  $\alpha, \beta$  bestehenden logischen Beziehungen werden hergeleitet; z. B.: wenn  $t_1, t_2$ , so  $T_6$ ; wenn  $T_6$ , so  $t_1$ . Bedeutet in einem Verband  $a b c$  die Gleichungen  $(a \cap b) \cup (b \cap c) = b = (a \cup b) \cap (b \cup c)$  (vgl. Glivenko, dies. Zbl. 15, 243 und 17, 339), so sind  $\alpha, \beta, t_1$  und  $T_6$  erfüllt;  $t_2$  bedeutet die Modularität des Verbandes,  $T_5$  die Distributivität und  $t_3$ , daß der Verband linear geordnet ist. Weitere Aussagen dieser Art (mit hier nicht angeführten Transitivitäten) werden hergeleitet. In einem metrischen Raum mit der Abstandsfunktion  $\delta$  sind  $\alpha$  und  $\beta$  erfüllt, wenn  $a b c$  die Gleichung  $\delta(a, b) + \delta(b, c) = \delta(a, c)$  bedeutet. Ist der Raum ptolemäisch, d. h. gilt  $\delta(a, b) \delta(c, d) \leq \delta(a, c) \delta(b, d) + \delta(a, d) \delta(b, c)$ , so gilt  $T_5$ , dagegen nicht immer  $T_6$ . G. Pickert.

Stabler, E. R.: Boolean representation theory. Amer. math. Monthly 51, 129—132 (1944).

Dunford, Nelson and M. H. Stone: On the representation theorem for Boolean algebras. Revista Ci. 43, 447—453 (1941).

Vereinfachter Beweis der Darstellung von Booleschen Verbänden durch Mengenverbände. Verallgemeinerung dieser Darstellung für Halbverbände und teilweise geordnete Mengen. P. Lorenzen.

Stabler, E. R.: Boolean algebra as an introduction to postulational methods. Amer. math. Monthly 50, 106—110 (1943).

Marinescu, Gh.: Structure et nombres caractéristiques. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 46, 113—119 (1944).

Erläuterungen zur axiomatischen Methode und zum Strukturbegriff.

P. Lorenzen.

Whitman, Philip M.: Lattices, equivalence relations and subgroups. Bull. Amer. math. Soc. 52, 507—522 (1946).

Jeder Verband läßt sich als Verband von Äquivalenzrelationen in einer geeigneten Menge darstellen. Der interessante Beweis ist keineswegs trivial.

P. Lorenzen.

Richardson, M.: On weakly ordered systems. Bull. Amer. math. Soc. 52, 113—116 (1946).

„Weakly ordered“ heißt eine Menge  $D$  mit einer irreflexiven, asymmetrischen Relation  $<$ . Für die „theory of games“ interessiert die Existenz einer Unter-  
menge  $V \subseteq D$  mit  $x \in V, y \in V \rightarrow x \nless y; x \notin V \rightarrow x < y$  für ein  $y \in V$ . Es wird eine hinreichende Bedingung aufgestellt. P. Lorenzen.

Whitman, Philip M.: Splittings of a lattice. Amer. J. Math. 65, 179—196 (1943).

„Splitting“ ist eine Zerlegung eines Verbandes in ein Ideal und ein Dualideal. Die Existenz von splittings wird für Verbände mit endlich vielen Erzeugenden untersucht, insbesondere die Zusammenhänge mit Modularität und Distributivität. Es werden Bedingungen dafür angegeben, daß zwei Verbände die Teile (splinters) eines splitting bilden. P. Lorenzen.

Pospisil, Bedrich: Wesentliche Primideale in vollständigen Ringen. Fundamenta Math. 33, 66—74 (1945).



Im Anschluß an topologische Untersuchungen von Čech wird die Anzahl gewisser Primideale im Verband aller Untermengen einer Menge bestimmt.

*P. Lorenzen.*

Foster, Alfred L. and B. A. Bernstein: Symmetric approach to cominutative rings, with duality theorem: Boolean duality as special case. *Duke math. J.* 11, 603—616 (1944).

Foster, Alfred L. and B. A. Bernstein: A dual-symmetric definition of field. *Amer. J. Math.* 67, 329—349 (1945).

Foster, Alfred L.: The idempotent elements of a commutative ring form a Boolean algebra; ring-duality and transformation theory. *Duke math. J.* 12, 143—152 (1945).

Foster, Alfred L.: Maximal idempotent sets in a ring with unit. *Duke math. J.* 13, 247—258 (1946).

Foster, Alfred L.: The theory of Boolean-like rings. *Trans. Amer. math. Soc.* 59, 166—187 (1946).

Die Involution  $a^* = 1 - a$  liefert in jedem Ring ( $+$  Addition,  $\times$  Multiplikation) die Operationen  $a \oplus b = (a^* + b^*)^* = a + b - 1$  und  $a \otimes b = (a^* \times b^*)^* = a + b - a \times b$ . Die dadurch entstehende Dualität reduziert sich im Falle eines Booleschen Ringes auf die verbandstheoretische Dualität. In einem Körper ist die Addition mit Hilfe von  $\times$  und  $\otimes$  definierbar. Gilt nämlich  $a \times a' = 1$  und  $a \otimes a^0 = 0$ , dann folgt  $a^* = a'^0 = a^{0'0}$  und  $a + b = a \otimes (a'^0 \times b)$ . Für  $\times$  und  $\otimes$  wird ein vollständiges selbstduales Axiomensystem aufgestellt. In einem kommutativen Ring ist die Menge der idempotenten Elemente abgeschlossen bzgl.  $\times$  und  $*$  wegen  $(a \times b) \times (a \times b) = a \times b$  und  $(1 - a) \times (1 - a) = 1 - a$  für  $a \times a = a$  und  $b \times b = b$ . Also bilden sie einen Booleschen Verband bzgl.  $\times$ ,  $\otimes$  und  $*$ . Hierzu gehört eine neue Addition  $a \dot{+} b = (a \times b) \times (a \times b)^* = a + b - 2(a \times b)$ . In nichtkommutativen Ringen gibt es manchmal mehrere maximale Boolesche Ringe bzgl. dieser Addition. In den vollen Matrixringen über Körpern sind alle maximalen Booleschen Ringe isomorph. Es werden auch „Boolean-like“ Ringe untersucht, die durch Kommutativität, Charakteristik 2 und  $a b (a + b + a b) = a b$  definiert sind.

*P. Lorenzen.*

● Menger, Karl: Algebra of Analysis. *Notre Dame Mathematical Lectures*, Nr. 3. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame 1944. 50 p.; \$ 1,00.

Menger, Karl: Tri-operational algebra. *Rep. math. Colloquium*, II. Ser. 5—6, 3—10 (1944).

Brown, Ferdinand L.: Remarks concerning tri-operational algebra. *Rep. math. Colloquium*, II. Ser. 5—6, 11—15 (1944).

Menger, Karl: General algebra of analysis. *Rep. math. Colloquium*, II. Ser. 7, 46—60 (1946).

Brown, Ferdinand L.: The accessory postulates of tri-operational algebra. *Rep. math. Colloquium*, II. Ser. 7, 61—64 (1946).

Burke, John C.: Remarks concerning tri-operational algebra. *Rep. math. Colloquium*, II. Ser. 7, 68—72 (1946).

Mannos, Murray: Ideals in tri-operational algebras. I. *Rep. math. Colloquium*, II. Ser. 7, 73—79 (1946).

Unter einer trioperationalen Algebra (t. A.) versteht Menger einen Ring ( $a \cdot b$  als Produkt) mit Einselement 1 ( $\neq 0$ ) und einer dritten assoziativen Verknüpfung ( $a b$  als Ergebnis), die den Gesetzen  $(a + b) c = a c + b c$ ,  $(a \cdot b) c = (a c) \cdot (b c)$  genügt und ein neutrales Element  $j \neq 0$  und  $\neq 1$  besitzt (also  $a j = j a = a$  für alle  $a$ ). Brown untersucht die Axiomatik der t. A. näher, vor allem die Forderung der Existenz von 1 und  $j$  (welche Menger in seiner dritten Arbeit nicht mehr in die Definition der t. A. aufnimmt), und zeigt, daß es keine t. A. mit nur

drei Elementen und genau zwei nichtisomorphe t. A. mit genau vier Elementen gibt. — Die durch  $c \cdot 0 = c$  (und damit  $c \cdot x = c$  für alle  $x$ ) definierten Konstanten  $c$  einer t. A. bilden einen Unterring  $C$ . Die Abbildung  $x \rightarrow f_x$ , wobei die Abbildung  $f_x$  von  $C$  in sich durch  $f_x(c) = x \cdot c$  erklärt wird, ist ein Homomorphismus, wenn  $(f_x f_y)(c) = f_x(f_y(c))$  gesetzt wird. Eine Abbildung  $D$  der t. A. in sich wird als Ableitung bezeichnet, wenn  $D(a \cdot b) = D a \cdot b + a \cdot D b$ ,  $D(a \cdot b) = a \cdot D b + b \cdot D a$ ,  $D(ab) = (D(a)b) \cdot D b$  gilt. In Nachbildung der Integration wird die Existenz einer Abbildung  $S$  mit  $D(S a) = a$  vorausgesetzt, für welche mit einer Äquivalenzrelation  $\sim$  die Beziehung  $S(D a) \sim a$  gilt. — Die Elemente der Form  $c_0 + c_1 \cdot j + \dots + c_n \cdot j^n$  ( $c_i \in C$ ) bilden einen gegenüber der dritten Verknüpfung abgeschlossenen Unterring. Enthält  $C$  das Element 1 und ist der von diesem erzeugte Unterring der Primkörper  $P_p$  der Charakteristik  $p$ , so gibt es genau ein Polynom  $f(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n$  ( $c_i \in P_p$ ) mit  $f(j) = 0$ , und es ist  $n \leq p$ . Dann heißt  $f(x)$  das Fundamentalpolynom (F. P.) der t. A. Menger gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein Polynom, über  $P_p$  F. P. einer t. A. ist. Ist  $C$  ein Körper der Charakteristik  $p$ , so liefert nach Burke die Übertragung der üblichen Ableitung in  $C[x]$  mittels des durch  $x \rightarrow j$ ,  $c \rightarrow c$  (für  $c \in C$ ) bestimmten Homomorphismus auf  $C[j]$  genau dann eine eindeutige Abbildung der t. A. in sich und damit eine Ableitung der t. A., wenn das F. P. der t. A. eine  $p$ -te Potenz ist. — Mannos bezeichnet ein Ringideal der t. A., welches mit jedem  $a$  auch  $a \cdot b$  und  $b(a \cdot c) = b \cdot c$  für alle  $b, c$  enthält, als  $t$ -Ideal, so daß diese genau die Kerne der Homomorphismen der t. A. sind. Einige Ergebnisse der Theorie der Ringideale übertragen sich auf  $t$ -Ideale. Die  $t$ -Ideale der t. A. bilden einen modularen Verband. Ist  $C$  ein Körper der Charakteristik 0, so sind nur Einheitsideal und Nullideal  $t$ -Ideale. Ist  $C$  ein endlicher Körper, so lassen sich die  $t$ -Ideale in einfacher Weise mittels des F. P. bestimmen. — Menger dehnt den Begriff der t. A. weiter aus, um damit auch Ringe von Funktionen beliebiger Argumentanzahl beschreiben zu können. Der Argumentanzahl 2 entspricht so eine ternäre Verknüpfung [mit dem Ergebnis  $a(b, c)$ ], die der Bedingung  $(a(b, c))(d, e) = a(b(d, e), c(d, e))$  genügt und die zwei „neutralen Elemente“  $j_1, j_2$  mit  $a(j_1, j_2) = a$ ,  $j_1(a, b) = a$ ,  $j_2(a, b) = b$  für alle  $a, b$  besitzt. Der allgemeinste in diesem Zusammenhang behandelte Strukturbegriff besteht aus einem Ring  $R$ , einer t. A.  $T$ , einer Abbildung von  $R \times T$  in  $R$  und einer eindeutigen Abbildung von  $R$  in  $T$ .

G. Pickert.

Rosenbloom, Paul C.: Post algebras. I. Postulates and general theory. Amer. J. Math. 64, 167—188 (1942).

Für eine natürliche Zahl  $n$  ( $\geq 2$ ) wird als Post-Algebra [nach E. L. Post, Amer. J. Math. 43, 163—185 (1921)] vom Typ  $n$  bezeichnet jede mit einer kommutativen assoziativen binären Verknüpfung  $+$  und einer Abbildung  $'$  in sich versehene Menge, welche mindestens zwei Elemente enthält und den Bedingungen genügt:  $x + x = x$ ,  $1(x) = 1(x)^n$ ,  $x + yz = (x + y)(x + z)$ ,  $\sum_{m=0}^{n-1} x y^m = x$ ,

$$x = x^* + \sum_{i=2}^n i(x) \cdot (x^{n-i+1})^* = \sum_{i=3}^{n-3} (i-1)(x) \cdot (x^{n-i+1})^*, \quad \left[ \sum_{i=0}^{n-1} x_i (x^i)^* \right]' = \sum_{i=0}^{n-1} x'_i (x^i)^*$$

$$\text{für alle } x, x_0, \dots, x_{n-1}; \text{ dabei ist definiert: } x^0 = x, x^{m+1} = (x^m)', m(x) = \left( \sum_{i=0}^{n-1} x^i \right)^{m-1},$$

$$x^* = \left( \sum_{i=1}^{n-1} x^i \right)^{n-1}, -x = x'^* + \sum_{m=2}^{n-1} \{ [x^m + 2(x^m)]^{n-1} + x^{2m} \}^{n-1}, xy = ((-x) + (-y)).$$

Da  $1(x) = 1(y)$  für alle  $x, y$  gilt, darf  $1(x) = 1$  und  $n(x) = 0$  gesetzt werden. Für die mit  $+$  und  $'$  aufgebauten Funktionen  $f$  wird eine Entwicklung angegeben, welche bei  $n = 2$  zu  $f(x) = f(1) + f(0) x'$  wird. Eine endliche Post-Algebra vom Typ  $n$  hat eine Potenz  $n^k$  als Elementanzahl und ist isomorph zu

der Post-Algebra der  $k$ -tupel von Zahlen  $0, 1, \dots, n-1$ , in welcher  $(a_1, \dots, a_k) + (b_1, \dots, b_k) = (c_1, \dots, c_k)$  und  $(a_1, \dots, a_k)' = (d_1, \dots, d_k)$  durch  $c_i = \text{Min}(a_i, b_i)$ ,  $d_i \equiv a_i + 1 \pmod{n}$  erklärt sind. *G. Pickert.*

● **Goncalves Miranda, Manuel:** Assoziative und modulare Vektormultiplikationen. I. Centro Estudos Mat. Fac. Ci. Pôrto, Publ. Nr. 11, XIX, 160 p. (1945). [Portugiesisch mit französischen Zusammenfassungen.]

**Birkhoff, Garrett:** Universal algebra. Proc. First Canadian Math. Congr., Montreal 1945, 310—326. Toronto: University of Toronto Press 1946. \$ 3,25.

● **Levi, F. W.:** Algebra. Vol. I. Calcutta: University of Calcutta 1942. XII. 305 p.

**Levi, F. W.:** Modern algebra. Bull. Calcutta math. Soc. 35, 1—6 (1943).

**Brauer, Richard:** On some developments of modern algebra. Proc. First Canadian Math. Congr., Montreal 1945, 183—205. Toronto: University of Toronto Press 1946. \$ 3,25.

**MacLane, Saunders:** Einige neue Fortschritte in der Algebra. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 6, 191—216 (1946) [Spanisch].

**Sagastume Berra, A. E.:** Moderne Algebra und ihre Probleme. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. 7, 201—218 (1946).

● **Bourbaki, N.:** Éléments de mathématique. Part I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II. Algèbre. Chapitre I. Structures algébriques. Actual Sci. Ind., 934. Paris: Hermann et Cie. 1942. IV, 165 p.

● **Dubreil, Paul:** Algèbre. Tome I. Equivalences, opérations, groupes, anneaux, corps. Paris: Gauthier-Villars 1946. X, 305 p.

Lehrbuch; bemerkenswert durch sehr ausführliche Behandlung allgemeiner Begriffe. *G. Pickert.*

**Bell, E. T.:** Polynomials on a finite discrete range. Duke Math. J. 10, 33—47 (1943).

Für die in der Menge  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  erklärten Funktionen endlich vieler Argumente (mit Funktionswerten aus dieser Menge) werden gewisse Polynome als Normalformen angegeben, in Verallgemeinerung der Normalformen des Aussagenkalküls. *G. Pickert.*

**Levi, Howard:** A characterization of polynomial rings by means of order relations. Amer. J. Math. 65, 221—234 (1943).

The polynomial ring  $R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , over an integrity domain  $R$  with unit element and ascending chain condition for its ideals, can be wholly characterized as a commutative ring in terms of the order function  $\mu$  of the polynomial ring in the totally- (even well-) ordered set consisting of  $n$ -tuples of integers lexicographically ordered together with a zero element; among these again polynomial rings over fields can also be distinguished in terms of the order function.

*V. S. Krishnan.*

**Walfisz, Arnold:** Über primäre Ideale. Soobšćenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 2, 383—388 (1941) [mit russ. u. georg. Zusammenfassungen].

**Matusita, Kameo:** Über ein bewertungstheoretisches Axiomensystem für die Dedekind-Noethersche Idealtheorie. Japanese J. Math. 19, 97—110 (1944).

In einem Integritätsbereich  $\mathfrak{o}$  mit Einselement 1 läßt sich jedes echte Ideal genau dann eindeutig als Produkt von maximalen Primidealen darstellen, wenn (1)  $\mathfrak{o}$  der Durchschnitt von diskreten Bewertungsringen ist, (2) jedes Element von  $\mathfrak{o}$  sich nur in einer endlichen Anzahl von diesen Bewertungsringen als Nicht-einheit erweist, (3) für je zwei Bewertungsringe  $A$  und  $B$  ein Element  $e \in \mathfrak{o}$  existiert, so daß  $e$  bzw.  $1 - e$  in  $A$  bzw.  $B$  Nicht-einheit ist. Auch verschiedene bekannte Resultate werden von neuem gewonnen. *L. Fuchs.*

**Grundy, P. M.:** A generalization of additive ideal theory. Proc. Cambridge philos. Soc. 38, 241—279 (1942).



**Dubreil, Paul:** L'indépendance linéaire dans un module sur un anneau non nécessairement commutatif. *Bull. Sci. math.*, II. Ser. 67, 84—100 (1943).

**Everett, C. J.:** The basis theorem for vector spaces over rings. *Bull. Amer. math. Soc.* 51, 531—532 (1945).

**Johnson, R. E.:** On structures of infinite modules. *Trans. Amer. math. Soc.* 53, 469—489 (1943).

**Harrison, Gerald:** The structure of algebraic moduls. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 28, 310—413 (1942).

$M$  étant un  $A$ -module à droite sur un anneau  $A$  avec élément unité, l'étude d'une base et la recherche des bases unitaires et des bases directes pour  $M$  et ses sous-modules fait l'objet des trois premiers mémoires, chacun étant relatif à un cas particulier. Dans le premier,  $A$  est anneau régulier à droite sans diviseurs de zéro, et il est montré que, si  $M$  possède lui-même une base unitaire finie de  $m$  éléments,  $m$  est le nombre maximum d'éléments indépendants, et ce nombre est un invariant de toutes les bases unitaires. Dans le deuxième, on caractérise les modules à base unitaire finie ayant  $m$  éléments, tels que tout sous-module admette une base unitaire finie de  $m$  éléments au plus;  $A$  est alors un anneau sans diviseurs de zéro, à idéaux à droite principaux. Dans le troisième,  $A$  est encore plus particulier: anneau d'intégrité commutatif à idéaux principaux, mais les modules considérés sont propres ou impropres. On y montre que tout module ayant une base finie admet une base directe („proper base“) finie, ainsi que tout sous-module. L'existence d'une base directe infinie ou non est également assurée pour les sous-modules de  $M$  dans certains cas particuliers où la base directe de  $M$  est infinie dénombrable. Application à l'algèbre des matrices infinies sur un corps. Dans le quatrième,  $A$  est l'anneau d'intégrité des entiers relatifs et  $M$  est un module algébrique à base unitaire finie. Un théorème exprime le treillis  $T$  des sous-modules comme produit direct de sous-treillis  $T_{p_i}$  déterminés par les nombres premiers  $p_i$ . Un autre est relatif à la structure multiplicative de  $T$  lorsque  $M = (1, \omega)$ , où  $\omega$  est un entier quadratique. L. Lesieur.

**Brauer, Richard:** On the nilpotency of the radical of a ring. *Bull. Amer. math. Soc.* 48, 752—758 (1942).

Démonstration simple du théorème de Hopkins dans un anneau d'Artin  $A$ , et application à la structure de  $A$ . On montre aussi qu'il suffit de supposer la condition de chaîne descendante pour les idéaux bilatères nilpotents alors que le résultat classique utilise les idéaux à gauche. L. Lesieur.

**Vinograd, Bernard:** Cleff rings. *Trans. Amer. math. Soc.* 56, 494—507 (1944).

Soit  $A$  un anneau satisfaisant à la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche,  $R$  le radical nilpotent de  $A$ . On dit que  $A$  est clivé (cleff) si  $A$  possède un sous-anneau  $A^*$  tel que  $A = A^* \dot{+} R$  (somme directe des groupes abéliens  $A^*$  et  $R$ ). Exemple:  $A$  est une algèbre sur un corps de caractéristique nulle (théorème de Wedderburn). Résultat: Pour que  $A$  soit clivé il faut et il suffit que soient clivés les anneaux  $C_{ij} = e_{ij} A e_{ij}$  engendrés par chaque élément  $e_{ij}$  d'un ensemble maximal d'éléments primitifs idempotents orthogonaux. Applications. L. Lesieur.

**Chevalley, Claude:** On the notion of the ring of quotients of a prime ideal. *Bull. Amer. math. Soc.* 50, 93—97 (1944).

**Chevalley, Claude:** On the theory of local rings. *Ann. of Math.*, II. Ser. 44, 690—708 (1943).

**Chevalley, Claude:** Some properties of ideals in rings of power series. *Trans. Amer. math. Soc.* 55, 68—84 (1944).

La notion d'anneau de quotients d'un idéal premier, qui est précisée dans la première note, est utilisée au début du mémoire sur les anneaux locaux, qui constitue un travail préparatoire à la définition des multiplicités d'intersection

des variétés algébriques et algébroïdes. Un anneau  $A$  (commutatif, noetherien, possédant un élément unité) est semi-local s'il ne possède qu'un nombre fini d'idéaux premiers  $\mathfrak{p}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ). En posant  $\mathfrak{a} = \prod_{i=1, \dots, h} \mathfrak{p}_i$ , l'A. définit une

topologie dans  $A$  par les voisinages fondamentaux  $V(x) = x + \mathfrak{a}^n$ , et il obtient par complétion un anneau semi-local complet. Cas particulier: anneau local, c'est-à-dire anneau dans lequel les éléments non inversibles forment un idéal  $\mathfrak{m}$ . L'A. astreint ses anneaux locaux à vérifier en outre la condition:  $A$  contient un corps infini  $K$  tel que  $A/\mathfrak{m}$  soit un  $K$ -module fini. La dimension de  $A$  est le nombre minimum  $r$  de générateurs  $x_1, x_2, \dots, x_r$  d'un idéal qui soit primaire pour  $\mathfrak{m}$ . La multiplicité de  $A$  pour ce système de „paramètres“  $x_1, \dots, x_r$  est l'entier  $e$  défini par:  $[A:K((x_1, \dots, x_r))] = e \cdot [A/\mathfrak{m}:K]$ . L'existence et les propriétés de  $e$  sont établies lorsque  $A$  est un domaine d'intégrité local complet. — Dans le mémoire sur les idéaux dans les anneaux de séries formelles, l'A. résout un problème important en géométrie algébrique et algébroïde:  $\mathfrak{p}$  étant un idéal premier dans  $K((x_1, \dots, x_n))$ ,  $Z$  une extension du corps  $K$ , pour que l'idéal engendré par  $\mathfrak{p}$  dans  $Z((x_1, \dots, x_n))$  soit premier quel que soit  $Z$ , il faut et il suffit que  $K$  soit algébriquement clos dans le corps  $Q$  des quotients de  $K((x_1, \dots, x_n))/\mathfrak{p}$ , et que  $Q$  soit „séparablement engendré“ sur  $K$  (au sens de l'A., c'est-à-dire,  $p \neq 0$  étant la caractéristique de  $K$ , des éléments  $\in Q$  linéairement indépendants sur  $K$  ont des puissances  $p^{\text{èmes}}$  linéairement indépendantes sur  $K$ ). Le cas plus simple de l'anneau de polynômes  $K[x_1, \dots, x_n]$  est également traité; il rejoint la notion „d'extension régulière“ donnée par A. Weil dans „Foundations of algebraic geometry“ (New York 1946).

L. Lesieur.

**Cohen, I. S.: On the structure and ideal theory of complete local rings.** Trans. Amer. math. Soc. 59, 54—106 (1946).

Contribution importante à l'étude des anneaux locaux, à la suite des travaux de W. Krull (ce Zbl. 19, 289) et C. Chevalley (v. récitation précédente, 2<sup>me</sup> mémoire). L'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  d'un anneau local  $R$  permet de définir une topologie dans  $R$  en prenant comme voisinages de 0 les idéaux  $\mathfrak{m}^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Cette topologie donne la notion d'anneau local complet.  $R$  est dit régulier si les idéaux  $(u_1, u_2, \dots, u_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sont premiers, l'ensemble  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  constituant une base minimale de  $\mathfrak{m}$ . Le résultat principal est la démonstration d'une conjecture due à W. Krull: tout anneau local complet est une image homomorphe d'un anneau local régulier complet.

L. Lesieur.

**Cohen, I. S. and Irving Kaplansky: Rings with a finite number of primes. I.** Trans. Amer. math. Soc. 60, 468—477 (1946).

An integral domain  $R$  with a finite number of non-associated prime elements and factorization of its elements into prime elements is a Noetherian ring with a finite number of prime (and maximal) ideals. The multiplicative structure of  $R$  is reducible then to that of local rings of the same type. If  $M$  is the ideal of non-units of the local ring  $R$ ,  $R/M$  is a finite field with a finite number ( $N$ ) of elements; if  $k$  is the dimension of the vector  $M/M^2$  over  $R/M$ , then  $(N^k - 1)/(N - 1) \leq n$  the number of distinct primes in  $R$ . When  $n$  is a prime number the multiplicative structure of  $R$  can be uniquely determined, and  $R$  itself can be uniquely determined if further it is complete and not of characteristic 0. Such local rings  $R$  exist when  $N$  is a prime power and  $k \geq 2$ , with  $n = (N^k - 1)/(N - 1)$  and every element of  $M^2$  divisible by all the primes.

V. S. Krishnan.

**Cohen, I. S. and A. Seidenberg: Prime ideals and integral dependence.** Bull. Amer. math. Soc. 52, 252—261 (1946).

$R$  et  $S$  sont deux anneaux commutatifs avec élément unité commun, tels que  $R \subset S$ . Soient  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p}'$  deux idéaux premiers dans  $R$ , avec  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ . Théorème:



Si  $S$  est intégralement dépendant de  $R$ , il existe, pour tout idéal premier  $P$  de  $S$  vérifiant  $P \cap R = \mathfrak{p}$ , un idéal premier  $P'$  de  $S$  vérifiant  $P' \cap R = \mathfrak{p}'$  &  $P \subset P'$ .  
*L. Lesieur.*

**Seidenberg, A.:** Valuation ideals in polynomial rings. Trans. Amer. math. Soc. 57, 387—425 (1945).

$K$  désigne un corps algébriquement fermé,  $\Omega = K[x, y]$  l'anneau des polynômes à deux variables,  $\Sigma$  son corps des quotients,  $v$  une valuation de  $\Sigma$  sur  $K$ , telle que  $v(x) > 0$ ,  $v(y) > 0$ . On appelle  $v$ -idéal dans  $\Omega$  un idéal  $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} \cap \Omega$ , où  $\mathfrak{a}$  est un idéal dans l'anneau de valuation  $B$ . Ces  $v$ -idéaux forment une chaîne multiplicative dont l'étude, déjà faite par O. Zariski dans le cas où la caractéristique de  $K$  est nulle, est reprise ici par une méthode directe applicable à une caractéristique quelconque. Cette méthode caractérise en particulier les éléments indécomposables de la chaîne, ou  $v$ -idéaux simples.  
*L. Lesieur.*

**Jennings, S. A.:** Central chains of ideals in an associative ring. Duke math. J. 9, 341—355 (1942).

L'idéal commutateur  $A \circ B$  des idéaux  $A$  et  $B$  de l'anneau associatif  $R$  est engendré par les éléments  $ab - ba$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Une chaîne d'idéaux  $R = M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_m \supset M_{m+1} = 0$  est centrale si  $R \circ M_i \subseteq M_{i+1}$ , et centrale inférieure si  $R \circ M_i = M_{i+1}$ . Dans ce dernier cas,  $R$  est dit de classe finie  $m$ . Si  $R_{i+1}$  est l'idéal engendré dans  $R_i$  par les commutateurs de  $R_i$ , et si la chaîne  $R_0 = R \supset \dots \supset R_i \supset \dots$  se termine à 0, l'anneau  $R$  est dit résoluble. Résultats: l'anneau dérivé  $R \circ R$  est nilpotent, 1° si  $R$  est de classe finie; 2° si  $R$  est résoluble. Les autres résultats concernent les propriétés relatives de  $R$  et de son anneau de Lie associé, ainsi que celles des nil-anneaux engendrés par un nombre fini d'éléments.  
*L. Lesieur.*

**Baer, Reinhold:** Inverses and zero-divisors. Bull. Amer. math. Soc. 48, 630—638 (1942).

Let  $R$  be a ring. Let (I), (II) and (III) stand for the minimal condition for „principal left ideals“ of form  $Ra$ , the minimal condition for „zero-dividing left ideals“ (i. e. left annihilators of single elements) and the maximal condition for zero-dividing left ideals. Under (I) an element  $z$  of  $R$  is a right-inverse, if and only if  $z$  is not a right zero-divisor, an element  $z$  being said to be a right-inverse when there is an element  $w$  such that  $wz$  is a left-unit for  $z$  and a right-unit for  $R$ . Under (I), (II)  $z$  is a right-inverse if and only if  $R = Rz$ . Under (III)  $R$  possesses a right-unit if and only if there exists  $z$  with  $R = Rz$ . A ring  $R$  satisfying the left minimal condition possesses a left-unit if and only if  $Rx = 0$  implies  $x = 0$  and  $P^i Rx = xP = 0$  implies  $P^i x = 0$ ,  $P$  being the radical of  $R$ . For another, and important, result concerning the relationship of left and right inverses, we refer to Jacobson (this Zbl. 37, 159) where a refinement is given.

*T. Nakayama.*

**Baer, Reinhold:** Radical ideals. Amer. J. Math. 65, 537—568 (1943).

An ideal  $I$  in a ring  $R$  is called a radical ideal if it is a nilideal and  $R/I$  has no non-zero nilpotent ideals. There are always a largest and a smallest radical ideal,  $U$  and  $L$ , called the upper and the lower radical of  $R$ . If  $U = L$ , it is called the radical of  $R$ .  $U$  is Fitting's radical and  $L$  turns out to be the intersection of all prime ideals in  $R$  (cf. Levitzki, this Zbl. 42, 33; Nagata, this Zbl. 45, 160). Let (A) and (B) stand for the conditions that  $x \in xR$  for every  $x \in R$  and that every non-zero right-ideal should contain a minimal right-ideal. Firstly two theorems are proved which may be summed into that if  $T$  is a radical ideal and if (B) holds in  $R/T$  then  $T$  coincides with  $U$  as well as what is now called the Jacobson radical (cf. below) of  $R$ . The sum  $M$  of all the minimal right-ideals, called the anti-radical of  $R$ , coincides with the set of left annihilators of  $U$  if (A)



holds and  $R/U$  is a sum of minimal right-ideals. For any right-ideal  $J \subseteq M$  we have  $J^3 = J^2$ . A theorem is proved which generalizes Hall's (this Zbl. 25, 391) theorem on bounded algebras. Together with transfinite powers  $J^k$  of an ideal  $J$ , the transfinite ascending Loewy series  $M_k$  (with  $M_1 = M$ ) is considered, and a ring  $R$  with  $R = M_m$  for some ordinal  $m$  is studied.  $L$  is nilpotent if the maximal condition holds for nilpotent ideals in  $R$ . The existence of right-identity is derived from certain conditions, and the relationship between maximal and minimal conditions is studied; cf. Hopkins (this Zbl. 20, 1) and Asano (this Zbl. 22, 303). Some of the results may be given finer formulations by replacing nilideals with quasi-regular ideals studied in the last section of the paper, and in fact the paper has, the reviewer understands, paved way for Jacobson (this Zbl. 60, 73, last review).  
T. Nakayama.

**Baer, Reinhold:** Rings with duals. Amer. J. Math. 65, 569—584 (1943).

A ring  $R'$  is a right-dual of a ring  $R$  if the lattices of right-ideals in  $R$ ,  $R'$  are dual. If  $x \in xR$  for every  $x \in R$  and if every residue-ring of  $R$  possesses a right-dual with a left-identity, then  $R$  satisfies chain conditions for right-ideals and possesses a right-identity; if moreover  $R$  has an identity then  $R$  is uni-serial in the sense that any minimal non-nilpotent right-ideal has a unique composition-series. (The chain conditions and the existence of identity being assumed) uni-seriality and primarity are preserved under duality. If  $E$  is a completely primary uni-serial ring and  $E_n$  is the matrix ring of degree  $n > 1$  over  $E$ , then i)  $E_n$  possesses a right-dual if and only if every left-ideal in  $E$  is a right-ideal, and ii) the right-dual of  $E_n$  is anti-isomorphic to  $E_n$  provided  $n > 2$ .  
T. Nakayama.

**Lesieur, L.:** Anneaux réguliers, avec ou sans diviseurs de zéro. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 1083—1085 (1946).

Ore (this Zbl. 1, 266) called, in connection of linear equations in non-commutative domains, a ring „regular“ when it has no zero-divisors and any two elements in it have a common right multiple. The author gives a modified definition of regularity, so as a metric ring over a regular ring becomes regular, and applies it to linear equations in rings.  
T. Nakayama.

**Dieudonné, Jean:** Sur le socle d'un anneau et les anneaux simple infinis. Bull. Soc. math. France 70, 46—75 (1942).

The sum  $A$  of all minimal left-ideals in a ring  $A$  isomorphic to a fixed one is a two-sided ideal of  $A$ , a „pied“ of the „socle“ of  $A$ . If  $a \in A$ ,  $A$  is called (left-) quasi-simple. A simple ring is quasi-simple if and only if it has a minimal left-ideal, and a quasi-simple ring has a unit if and only if it satisfies the minimum condition. If  $A$  is quasi-simple with a minimal left-ideal  $I$  and if  $K$  is the  $A$ -endomorphisms-field of  $I$ , then  $A$  is inverse-isomorphic to a ring  $\widehat{\mathfrak{F}}(E, E')$  of linear transformations of a certain vector space  $E$  over  $K$  such that for each  $u \in \widehat{\mathfrak{F}}(E, E')$   $u(E)$  is finite-dimensional and  $u^{-1}(0)$  is the intersection of a finite number of hyperplanes  $x'_i{}^{-1}(0)$  where  $x'_i$  are in a subspace  $E'$  of the dual space of  $E$ , the dimensionality of  $E$  being the number of components in a direct decomposition of  $A$  into minimal left-ideals. Here  $A$  is simple if and only if the intersection of all  $x'^{-1}(0)$  ( $x' \in E'$ ) is 0. (The Wedderburn theorem is an immediate corollary.) If  $\widehat{\mathfrak{F}}(E, E')$  is simple, it is inverse-isomorphic to  $\widehat{\mathfrak{F}}(E', E)$ . Let  $\sigma$  be the weak topology on  $E$  with respect to  $E'$ , and  $T$  be the uniform convergence topology on  $\widehat{\mathfrak{F}}(E, E')$  with respect to the topology  $\sigma$  of  $E$ . The simpleness of  $\widehat{\mathfrak{F}}(E, E')$  being assumed, every left-ideal in  $\widehat{\mathfrak{F}}(E, E')$  is closed in  $T$  and the closure in  $T$  of a right-ideal in  $\widehat{\mathfrak{F}}(E, E')$  is the right-annihilator of its left-annihilator. The completion of  $\widehat{\mathfrak{F}}(E, E')$  with respect to  $T$  is discussed. Any isomorphism between simple  $\widehat{\mathfrak{F}}(E, E')$  and  $\widehat{\mathfrak{F}}(E, E')$  is derived from a semi-linear automorphism of  $E$ . [For further developments cf. Jacobson (this Zbl. 60, 74, first review) and the references in its review.]  
T. Nakayama.

**Ballieu, Robert:** Anneaux complets de matrices rectangulaires et anneaux quasisimples. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **31**, 122—131 (1946).

A special case, with minimum condition, of a result in Dieudonné (s. the preceding review) is given.

*T. Nakayama.*

● **Jacobson, Nathan:** The theory of Rings. American Mathematical Society, Mathematical Survey, vol. 1. New York: American Mathematical Society 1943. VI, 150 p.; \$ 2,25.

The book gives an elegant and clear exposition of the theory of rings satisfying, mostly, maximum and minimum conditions. The central method is the use of endomorphism rings. Main contents: Groups and endomorphisms (Jordan-Hölder-Schreier and Krull-Schmidt theorems, Fitting's lemma), Vector spaces (Commuting rings of endomorphisms, isomorphisms of matrix rings, semi-linear transformation). Non-commutative principal ideal rings (Their ideal and elementary divisor theories, of Ore, Teichmüller, the author and the reviewer), Structure of rings of endomorphisms and of abstract rings (Wedderburn-Artin structure theory for rings with minimum condition, due to Hopkins, Baer and Asano, the author's Galois theory for division rings), Algebras over a field (Albert-Brauer-Noether theory of simple algebras, Brauer group), Multiplicative ideal theory (Axiomatic treatment, due to Asano, of Brandt's theory).

*T. Nakayama.*

**Jacobson, N.:** Construction of central simple associative algebras. Ann. of Math., II. Ser. **45**, 658—666 (1944).

The theory of crossed products is generalized to the case of a maximal subfield  $P$  of a central simple algebra  $\mathfrak{A}$  which is not necessarily galoisian over the ground field  $\Phi$ .  $\mathfrak{A}$  is a double-module over  $P$  and defines a regular self-representation  $E$  of  $P$  [Jacobson, Amer. J. Math. **66**, 1—29 (1944)]. If  $x_1, \dots, x_n$  form a right-basis of  $\mathfrak{A}$  over  $P$  and  $x_i x_j = \sum x_k \sigma_{kij}$  ( $\sigma_{kij} \in P$ ), the system  $\sigma_{kij}$  satisfies certain „associativity relations“ involving  $E$  and is called a „factor set“. Conversely, a system of separable extension  $P/\Phi$ , its regular self-representation  $E$  and a factor set  $\sigma$  gives rise to a „crossed product“ algebra, which is central provided it has a unit element. The condition for it to be simple (resp.  $\sim \Phi$ ) is given in terms of its  $P$ -two-sided submodules (resp.  $\sigma$ ). A generalized principal genus theorem is given.

*T. Nakayama.*

**Jacobson, N.:** The equation  $x' \equiv x d - d x = b$ . Bull. Amer. math. Soc. **50**, 902—905 (1944).

Let  $d$  be an algebraic element of an associative algebra  $A$  over a field  $\Phi$ . A necessary condition for  $b = x d - d x$  to be solvable in  $A$  ( $b$  being an element of  $A$ ) is given in terms of the minimal equation  $\mu(\lambda)$  of  $d$ . The condition is also sufficient, either if 1)  $\mu(\lambda)$  is prime to  $\mu'(\lambda)$ , or 2)  $A$  is a simple algebra with minimum condition and  $\mu(\lambda)$  is a product of distinct irreducible polynomials on  $\Phi$ , or 3)  $A = \Phi_n$  and  $d$  is non-derogatory.

*T. Nakayama.*

**Jacobson, N.:** The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945).

Satisfactory generalization to arbitrary rings of Wedderburn-Artin structure is developed. If for an element  $z$  in an (associative) ring  $\mathfrak{A}$  there exists in  $\mathfrak{A}$  an element  $z'$  such that  $z + z' + z z' = 0$ ,  $z$  is called right quasi-regular and  $z'$  is called a right quasi-inverse of  $z$ ; if  $z$  possesses both right and (similarly defined) left quasi-inverses, they coincide and are the unique quasi-inverse of  $z$ . A right-ideal is called quasi-regular if its elements are all right quasi-regular. The join  $\mathfrak{R}$  of all the quasi-regular right-ideals in  $\mathfrak{A}$  is itself a quasi-regular right-ideal, is at the same time the largest quasi-regular left-ideal in  $\mathfrak{A}$ , and is defined to be the radical of  $\mathfrak{A}$ .  $\mathfrak{R}$  contains the intersection of all the maximal right-ideals of  $\mathfrak{A}$  (cf. Kaplansky, this Zbl. **34**, 166 for a refinement) while  $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$  is contained

in that intersection. The radical of the matrix  $\mathfrak{A}_n$  is  $\mathfrak{R}_n$ , while the radical of a two-sided ideal  $\mathfrak{A}_1$  of  $\mathfrak{A}$  is  $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{R}$ . If  $\mathfrak{R}$  is a finitely generated right-ideal (or module)  $\neq 0$  then  $\mathfrak{R} \mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}$ . A ring is called semi-simple if its radical is 0. The residue-ring of a ring modulo its radical is always semi-simple. A ring is semi-simple if and only if it is a subdirect sum of primitive rings; a ring is called primitive if it possesses a faithful irreducible right-module. If the ring satisfies the minimum condition, the notions of radical and semi-simplicity coincide with the classical ones. The same is the case with commutative normed rings, of Gelfand; also a characterization of the radical for non-commutative normed rings is given. *T. Nakayama.*

**Jacobson, N.: Structure theory of simple rings without finiteness assumptions.** Trans. Amer. math. Soc. **57**, 228—245 (1945).

Let  $\mathfrak{A}$  be an irreducible ring of endomorphisms of a commutative group  $\mathfrak{R}$  (i. e.  $\mathfrak{R}$  be a faithful irreducible module of  $\mathfrak{A}$ ) and  $\mathfrak{D}$  be the  $\mathfrak{A}$ -endomorphism division ring of  $\mathfrak{R}$ . It is proved that  $\mathfrak{A}$  is dense in  $\mathfrak{R}$  over  $\mathfrak{D}$ , in the sense that for any  $\mathfrak{D}$ -linear transformation  $T$  of  $\mathfrak{R}$  and for any finite set of elements in  $\mathfrak{R}$  there exists an element in  $\mathfrak{A}$  which coincides with  $T$  at those elements. This theorem, which is a far reaching generalization of Wedderburn's theorem (and gives a simple proof to it), has been discovered independently by Chevalley too (cf. the reviewer's note cited below). If  $\mathfrak{A}$  is such a dense ring of linear transformations and if  $\mathfrak{A}$  contains a non-zero finite-(dimensionally) valued linear transformation, then  $\mathfrak{A}$  possesses minimal right-ideals and the sum of all the minimal right-ideals is the unique smallest two-sided ideal  $\neq 0$  in  $\mathfrak{A}$ . Simple (non-nil) rings possessing minimal right-ideals are characterized as dense rings of finite valued linear transformations and the uniqueness (up to isomorphisms) of acted vector spaces is proved; cf. for a closely related result Dieudonné (this Zbl. **60**, 72) and for further developements Jacobson (this Zbl. **29**, 106) and Azumaya-Nakayama (this Zbl. **29**, 106). The above main theorem is applied to non-associative simple rings, to yield the infinite-dimensional extension of the author's earlier work (this Zbl. **18**, 50); the same has been done independently also by the reviewer [Proc. Imp. Acad. Tokyo **20**, 61—66 (1944)]. *T. Nakayama.*

**Jacobson, N.: A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring.** Proc. nat. Acad. Sci. USA **31**, 333—338 (1945).

An ideal  $\mathfrak{J}$  of a ring  $\mathfrak{A}$  is called primitive if the residue-ring  $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$  is a primitive ring (i. e. possesses a faithful irreducible right-module). Into the set  $S$  of all primitive ideals of  $\mathfrak{A}$  a topology is introduced by defining the closure of a subset  $X$  of  $S$  to be the set of primitive ideals containing the intersection of all primitive ideals belonging to  $X$ , similarly as in Boolean and normed ring cases of Stone and Gelfand-Silov. The „structure space“  $S$  of  $\mathfrak{A}$  thus defined is a  $T_0$ -space, while its subspace of maximal ideals is a  $T_1$ -space.  $S$  is homeomorphic to the structure space of the residue-ring of  $\mathfrak{A}$  modulo the radical  $\mathfrak{R}$ . It is compact if and only if  $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$  has a unit element, and then it is connected if and only if  $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$  is two-sided directly indecomposable. If  $S'$  is a compact totally disconnected space and  $\mathfrak{A}$  is a separating ring of finite decomposition functions on  $S'$  with values from a division ring, then the space of maximal ideals of  $\mathfrak{A}$  is homeomorphic to  $S'$ . *T. Nakayama.*

**Kaplansky, Irving: On a problem of Kurosch and Jacobson.** Bull. Amer. math. Soc. **52**, 496—500 (1946).

**Levitzki, J.: On a problem of A. Kurosch.** Bull. Amer. math. Soc. **52**, 1033—1035 (1946).

The problem refers to Kurosch, Bull. Acad. Sci. URSS., Sér. math. **5**, 233—240 (1941). Jacobson (cf. preced. review) solved the problem affirmatively for semi-simple algebraic algebras of bounded degree, Kaplansky's paper settles



the case of nilalgebras of bounded index,  $n$ , over a ground field containing at least  $n$  elements and Levitzki's one settles the case of nilalgebras of bounded index generally, thus solving the problem, affirmatively, for arbitrary algebraic algebras of bounded degree. Levitzki shows in fact that any nilring of bounded index is semi-nilpotent. Cf. for further developments Kaplansky (this Zbl. **32**, 7; **35**, 303).  
T. Nakayama.

Jacobson, N.: Structure theory of algebras of bounded degree. Ann. of Math., II. Ser. **46**, 695—707 (1945).

An algebra  $\mathfrak{A}$  over a field  $\Phi$  is called algebraic (of bounded degree) if every element of  $\mathfrak{A}$  satisfies a polynomial equation (of bounded degree) over  $\Phi$ , while it is said to be of bounded index if there exists a natural number  $n$  such that  $x^n = 0$  for every nilpotent element  $x$  in  $\mathfrak{A}$ . It is shown that every semi-simple algebraic algebra of bounded index is a subdirect sum of matrix rings of bounded dimension over division algebras and every semi-simple algebraic algebra of bounded degree is a subdirect sum of simple algebras finite-dimensional over their center; for generalizations cf. Kaplansky (this Zbl. **32**, 7; **35**, 303); Amitsur (this Zbl. **46**, 31). Any algebraic algebra without non zero nilpotent elements over a finite field is commutative; cf. Kaplansky (this Zbl. **43**, 37). A ring  $\mathfrak{R}$  is commutative if each element  $a$  in  $\mathfrak{R}$  satisfies an equation of a form  $a^{n(a)} = a$ ,  $n(a) > 1$ . It is shown further that if  $\mathfrak{B}$  is an ideal in  $\mathfrak{A}$  and if both  $\mathfrak{B}$  and the residue algebra  $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$  are locally finite (i. e. any finite subset generates a subalgebra finite-dimensional over  $\Phi$ ) then  $\mathfrak{A}$  is locally finite. A semi-simple algebraic algebra of bounded degree is shown to be locally finite; cf. Levitzki (preceding review  
T. Nakayama.

Levitzki, Jacob: On the radical of a general ring. Bull. Amer. math. Soc. **49**, 462—466 (1943).

Levitzki, Jacob: Semi-nilpotent ideals. Duke math. J. **10**, 553—556 (1943).

Levitzki, Jacob: A characteristic condition for semi-primary rings. Duke math. J. **11**, 367—368 (1944).

Levitzki, Jacob: Solution of a problem of G. Koethe. Amer. J. Math. **67**, 437—442 (1945).

An ideal (or subring)  $A$  of a ring  $S$  is called semi-nilpotent if every finite subset of  $A$  generates a nilpotent subring of  $S$ , and the union  $N$  of all semi-nilpotent ideals of  $S$  is called the „radical“ of  $S$ . It is shown that  $N$  is semi-nilpotent and contains all semi-nilpotent left (or right) ideals, that the radical of the residue-ring  $S/N$  is zero, and that an element  $a$  of  $S$  belongs to  $N$  if (and only if)  $a S \subseteq N$ . Further, if the minimal condition holds for semi-nilpotent ideals of  $S$ , then the radical  $N$  is nilpotent. On the other hand, if  $N_0$  denotes the union of all nilpotent ideals in  $S$ , and if there is no infinite descending chain of the form  $A_1 \supset A_1 A_2 \supset A_1 A_2 A_3 \supset \dots$ , where  $A_i$  are ideals of  $S$  contained in  $N_0$ , then  $N_0$  is nilpotent. If the maximal condition holds for right-ideals containing  $N$  and those contained in  $N$ , then any nilideal, left or right, in  $S$  is nilpotent; this settles a problem of Köthe [Math. Z. **32**, 161—186 (1930)]. If the maximal condition holds for both left and right-ideals, then any nil-subring is nilpotent.  
T. Nakayama.

Levitzki, J.: On three problems concerning nil-rings. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 913—919 (1945).

The three propositions in question are (1) Every ring has a radical in the sense of Köthe [Math. Z. **32**, 161—186 (1930)]; (2) A nil-ring with a finite number of generators is nilpotent; (3) In a ring with distinct upper and lower radicals there exists an ideal between them that is not a radical ideal, in the terminologies of Baer (this Zbl. **60**, 71, last review). It is shown that (2) implies (1), (3), and the validity of (3) is conjectured.  
T. Nakayama.

Everett, C. J., jr.: An extension theory for rings. *Amer. J. Math.* **64**, 363—370 (1942).

Ring analogy of Schreier's extension theory for groups is considered. „Factor sets“ and their equivalence classes are introduced. The existence of „splitting rings“ is established; it is simpler than Artin's case of the existence of abelian splitting groups for extensions with abelian invariant subgroup. Rings with unit are the analogy of closed groups. „Left holomorph“ is defined under certain hypothesis. Factor sets over a null ideal  $N(N^2 = 0)$  with respect to fixed systems of left and right operations form a group. Finally the extensions process is applied to prove the existence of rings of arbitrarily given left and right type, in the sense of the author's previous paper (this Zbl. **21**, 387). *T. Nakayama.*

Nesbitt, C. J. and R. M. Thrall: Some ring theorems with applications to modular representations. *Ann. of Math.*, II. Ser. **47**, 551—567 (1946).

Firstly the theory of blocks is given for the setting of rings rather than groups. It is shown that if  $I$  is an integral domain in an  $k_p$ -algebra with unit element then any two-sided ideal direct component of the residue-ring  $I \bmod pI$  is itself a residue-ring. Next a theorem is given which implies as a particular case that a faithful representation of a quasi-Frobenius algebra is the commutator of its commutator (in the full matrix ring). Finally two proofs are given to the orthogonality relations for the coefficients in the representation of a Frobenius algebra due to Nesbitt and the reviewer; for this cf. also R. Brauer (this Zbl. **60**, 78—79).

*T. Nakayama.*

Almeida Costa, A.: Über halbprimäre Ringe. *Centro Estudos Mat. Fac. Ci. Pôrto*, Publ. **14**, 38 p. (1945) = *Anais Fac. Ci. Pôrto* **29**, Nr. 4 [Portugiesisch mit deutscher Zusammenfassg.].

The paper studies the structure of rings putting emphasis on the topics as the nilpotence of the radical, the structure relative to the radical, the existence of Köthe's radical, and idempotent elements, relying mainly on the papers by Artin [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **5**, 251—260 (1927)], Noether [Math. Z. **30**, 641—692 (1929)], Köthe [Math. Z. **32**, 161—186 (1930)], Hopkins (this Zbl. **22**, 106), Asano (this Zbl. **22**, 303), Dieudonné (this Zbl. **27**, 10), Levitzki [Duke math. J. **11**, 367—368 (1944); this Zbl. **60**, 75] and others. *T. Nakayama.*

Goldman, Oscar: A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition. *Bull. Amer. math. Soc.* **52**, 1021—1027 (1946).

It is shown that a ring  $A$  is a semi-simple ring with minimum condition if, and only if, every  $A$ -left-module is a direct sum of a completely reducible  $A$ -submodule and a submodule annihilated by  $A$ . *T. Nakayama.*

Goldman, Oscar: Semi-simple extensions of rings. *Bull. Amer. math. Soc.* **52**, 1028—1032 (1946).

A ring  $A$  can be embedded in a semi-simple ring (in the sense of Chevalley and Jacobson) if and only if  $T \cap (\cap pA) = 0$ , where  $T$  is the set of all elements of finite (additive) order in  $A$  and  $p$  runs over all primes. *T. Nakayama.*

Helmer, O.: The elementary divisor theorem for certain rings without chain condition. *Bull. Amer. math. Soc.* **49**, 225—236 (1943).

Besides unique factorization rings there are also rings without chain conditions which are „adequate rings“ — i. e., integrity domains in which finite-based ideals are principal, and for any  $a, b$  with  $a \neq 0$  there exists a divisor  $a_1$  of  $a$  prime to  $b$  such that no non-unit divisor of  $a_1$  is prime to  $b$ . Matrices over adequate rings are reducible to norm form by unimodular multipliers on the two sides.

*V. S. Krishnan.*

Artin, Emil and George Whaples: The theory of simple rings. *Amer. J. Math.* **65**, 87—107 (1943).

Theory of (non-nil) simple rings (with minimum condition) is given. Besides new approaches to known theorems, the following are examples of the new

results, formerly known only for (finite-dimensional) algebras: 1) Simple subalgebras of a simple ring  $R$  over the center  $k$  of  $R$  are in 1-1 commutator correspondence with certain simple subrings of  $R$  over which  $R$  is finite-dimensional; 2) an isomorphism between two simple subalgebras of  $R$  over  $k$  can be extended to an inner automorphism of  $R$ ; 3) an automorphism of  $R$  leaving the commutator of a simple subalgebra is inner. Effectively used are mappings of the form  $x \rightarrow \sum a_i x b_i$  ( $a_i, b_i \in R$ ) and a theorem which may be regarded as a special case of a theorem of Chevalley and Jacobson [cf. Nakayama, Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 61—66 (1944)]. For a closely related but different approach cf. Azumaya [Proc. imp. Acad. Tokyo **22**, 325—331 (1946)]. [Most of the results have later been extended to rings without minimum condition and some have been refined; cf. Jacobson (this Zbl. **60**, 74, first review); Dieudonné (this Zbl. **41**, 163); Azumaya-Nakayama (this Zbl. **29**, 106); Nakayama (this Zbl. **47**, 33)].

*T. Nakayama.*

● Artin, Emil, Cecil J. Nesbitt and Robert M. Thrall: Rings with minimum condition. University of Michigan Publications in Mathematics, 1. Ann Arbor, Mich.: University of Michigan Press 1944. X, 123 p.; \$1.50.

The book deals with the Wedderburn-Artin structure of rings with minimum condition. The existence of non-zero idempotent elements in non-nilpotent left-ideals in a ring with minimum condition is given by Brauer's [Bull. Amer. math. Soc. **48**, 752—758 (1942)] method. Theory of simple rings is given by the method of Artin-Whaples (see the preceding review) using „analytic linear transformations“. Crossed products are treated by a new method. The Brauer-Nesbitt relation of ordinary and modular representations is given.

*T. Nakayama.*

Brown, Bailey and Neal H. McCoy: Rings with unit element which contain a given ring. Duke math. J. **13**, 9—20 (1946).

In the family  $\mathfrak{R}$  of all extension rings with unit of a given ring  $R$  there is a „complete“ subfamily — i. e., a subfamily containing for each ring  $S$  in  $\mathfrak{R}$  an isomorph over  $R$  of a subring of  $S$ . A minimal extension of  $R$ , forming a one-element complete subfamily, exists if and only if the „mode“ of  $R$  is 0 or 1; the mode being the non-negative generator of the ideal of those integers  $\alpha$  for which there exists some  $a$  in  $R$  such that  $ax = xa = \alpha x$  for all  $x$  in  $R$ . Similar questions are also studied in the family of extensions of  $R$  having the same characteristic as  $R$ .

*V. S. Krishnan.*

(1) McCoy, N. H.: Remarks on divisors of zero. Amer. math. Monthly **49**, 286—295 (1942).

(2) Forsythe, Alexandra: Divisors of zero in polynomial rings. Amer. math. Monthly **50**, 7—8 (1943).

(1) proves a special case, and (2) gives an induction proof, of the theorem „In a polynomial ring  $R[x]$ , over a commutative ring  $R$  with unit, any divisor of zero is annihilated by an element of  $R$  itself“.

*V. S. Krishnan.*

Forsythe, Alexandra and Neal H. McCoy: On the commutativity of certain rings. Bull. Amer. math. Soc. **52**, 523—526 (1946).

It is shown that a regular ring is isomorphic to a subdirect sum of division rings if and only if it has no non-zero nilpotent elements (cf. for a more general result Kaplansky (this Zbl. **35**, 303)). This provides a simpler „reduction to division rings“ for Jacobson's theorem that a ring  $R$  is commutative if there exists an integer  $n(a) > 1$  for each  $a \in R$  with  $a^{n(a)} = a$ . An elementary proof is given to the special case  $a^p = a$ ,  $pa = 0$  ( $p$  prime) of the last theorem.

*T. Nakayama.*

Dyer-Bennet, John: A note on finite regular rings. Bull. Amer. math. Soc. **47**, 784—787 (1941).



**Tihomirov (Tichomirov), A.:** A new proof of a theorem concerning simple rings. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 8, 139—142 (1944) [Russisch mit englischer Zusammenfassg.].

**Theorem 1.** Let  $A$  and  $B$  be algebras, in general non-commutative, over a field  $K$ . We suppose that  $K$  is the centrum of  $A$  and is contained in the centrum of  $B$ . Then every two-sided ideal of the algebra  $A \times B$  over  $K$  is of form  $A \times b$  where  $b$  is a two-sided ideal of the algebra  $B$ . Hence follows Theorem 2. Let  $A$  and  $B$  be simple rings, non-commutative in general. If the centrum of the ring  $A$  is different from zero, the centrum of  $B$  contains  $K$  so that  $1_K = 1_B$  and any three elements of  $A$  or of  $B$ , at least one of which belongs to  $K$ , follow the associativity law, then both  $A$  and  $B$  are algebras over  $K$  and the direct product  $A \times B$  over  $K$  is a simple ring. Autoreferat.

**Sperling, M.:** Ringe, von denen jeder Unterring ein Ideal ist. *Mat. Sbornik, n. Ser.* 17 (59), 371—384 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

A complete enumeration of rings generated by single elements in which every subring is an ideal; in the summary correct „ $a_1 0$ “ to „ $a_1^2 0$ “.

V. S. Krishnan.

**Kurosh, A.:** Direct decompositions of simple rings. *Mat. Sbornik, n. Ser.* 11 (53), 245—264 (1942) [Englisch mit russ. Zusammenfassg.].

This is a study of simple rings, or simple algebras of possibly infinite order. The simple normal rings form a type closed for forming direct products, and they are further characterized as rings which are direct factors in all containing rings. The „fundamental rings“ generalize rings of matrices; a simple normal ring  $R$  is a fundamental ring if its centre is isomorphic to the quotient  $A^*/A$  by a proper left ideal  $A$  of the maximal subring  $A^*$  of  $R$  in which  $A$  is a two-sided ideal. A direct product of fundamental rings is fundamental; the direct product of a normal simple ring with the ring inversely isomorphic with it is fundamental.

V. S. Krishnan.

**Maleev, A.:** On the representations of infinite algebras. *Mat. Sbornik, n. Ser.* 13 (55), 263—286 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Representable algebras, i. e. algebras possessing isomorphic matrix representations (of finite degree) (in an extension of the ground field) are studied, by a method similar to the author's former work on group representations (this Zbl. 25, 8). An algebra is representable if (and only if) its finitely generated subalgebras have all isomorphic representations of bounded degree, and a finitely generated algebra has an isomorphic representation of degree  $n$  if (and only if) it possesses a separating system of representations of degree  $n$ . A finitely generated representable algebra possesses an isomorphic representation in a purely transcendental extension of the ground field, and is isomorphic to none of its proper residue-algebras. Direct sums, direct and free products are studied; it is shown e. g. that the direct product of a representable algebra and a finitely generated representable algebra is representable, and a non-trivial free product cannot be representable. The main result for periodic (i. e. algebraic) representable algebras is that a such is of finite rank when it is finitely generated [which settles a problem of Kuroš [Bull. Acad. Sci. URSS, Ser. math. 5, 233—240 (1941)] in case of representable algebras; for a more general result cf. a later paper by Kaplansky (this Zbl. 35, 303)].

T. Nakayama.

**Nakayama, Tadasi:** On Frobeniusean algebras. III. *Japanese J. Math.* 18, 49—65 (1942).

**MacDuffee, C. C.:** Products and norms of ideals. *Amer. J. Math.* 64, 646—652 (1942).

**Brauer, Richard:** On Hypercomplex arithmetic and a theorem of Speiser. *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. A. Speiser*, 233—245. Zürich: Füssli 1945.

Pour la partie II du travail de Nakayama voir ce Zbl. 26, 58. Nakayama complète sa caractérisation structurelle des algèbres de Frobenius (Frobenius and quasi-Frobenius algebras) au moyen de propriétés simples des idéaux minimaux à gauche et à droite (voir ce Zbl. 21, 294; 26, 58). Mac Duffee continue ses recherches sur les idéaux dans une algèbre de Frobenius (ce Zbl. 22, 107). R. Brauer considère des algèbres des Frobenius sur corps de nombres algébriques pour donner, avec d'autres résultats, une généralisation d'un théorème de Speiser sur la représentation des groupes finis (Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Berlin 1923).

G. Ancochea.

Nakayama, Tadasï und Yozô Matsushima: Über die multiplikative Gruppe einer  $p$ -adischen Divisionsalgebra. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 622—628 (1943).

Caractérisation des éléments de norme réduite 1 comme produits de commutateurs. Extension aux algèbres sur corps  $p$ -adiques.

G. Ancochea.

Hull, Ralph: A theorem on the unit groups of simple algebras. Bull. Amer. math. Soc. 50, 405—411 (1944).

Scott, Winston M.: A remark on algebras of matrices. Bull. Amer. math. Soc. 49, 444—446 (1943).

Wagner, R. W.: Differentials and analytic continuation in non-commutative algebras. Duke math. J. 9, 677—691 (1942).

MacLane, S. and O. F. G. Schilling: Groups of algebras over an algebraic number field. Amer. J. Math. 65, 299—308 (1943).

Soient  $F$  un corps de nombres algébriques;  $K$ ,  $K'$  et  $K''$  des extensions normales de  $F$  telles que  $K = K' \cup K''$ ;  $S$ ,  $S'$  et  $S''$  des algèbres sur  $F$  ayant respectivement  $K$ ,  $K'$  et  $K''$  comme corps de décomposition. Condition, en termes des groupes de Galois de  $K/F$ ,  $K'/F$ ,  $K''/F$ , pour qu'il soit possible d'exprimer  $S$  sous la forme  $S = S' \times S''$ .

G. Ancochea.

Birkhoff, Garrett: Drei Bemerkungen zur linearen Algebra. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 5, 147—151 (1946) [Spanisch].

Notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Matrix als arithmetischen Mittelwert von Permutationen und dafür, daß eine Algebra  $A$  direkter Summand jeder  $A$  als Ideal enthaltenden Algebra  $B$  ist. Ferner eine allgemeine Bemerkung über die Koeffizientenerweiterung von Algebren.

K. Shoda.

Kemmer, N.: The algebra of meson matrices. Proc. Cambridge philos. Soc. 39, 189—196 (1943).

Darstellungen der Algebra, die durch  $s$  Matrizen  $\beta_p$  mit den Bedingungen  $\beta_\lambda \beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu \beta_\lambda = \beta_\lambda \delta_{\mu\nu} + \beta_\nu \delta_{\mu\lambda}$  definiert ist.

K. Shoda.

Rutherford, D. E.: On substitutional equations. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 62, 117—126 (1944).

Die Linearkombinationen (mit Zahlen als Koeffizienten) der Permutationen von  $n$  Elementen bilden ein hyperkomplexes System, dessen Elemente mit Großbuchstaben bezeichnet werden mögen. Die Lösung einer Gleichung (1)  $LX = 0$  hat schon A. Young gegeben und auch über die Lösung von (2)  $LX = R$  gewisse Resultate erzielt. Hier wird die Bedeutung der idempotenten Elemente ( $L^2 = L$ ) für diese Probleme aufgezeigt und ihre allgemeine Lösung gegeben. Ist  $L^2 = L$  und  $a$  der Koeffizient der identischen Permutation  $I$  in  $L$ , so hat (1)  $n!(1 - a)$  linear unabhängige Lösungen und  $X = (I - L)Y$ ,  $Y$  beliebig, ist die allgemeinste Lösung. Eine Methode, ein volles System linear unabhängiger Lösungen anzugeben, wird nur für einige bedeutungsvolle spezielle  $L$  gefunden. Ist  $L^2 \neq L$ , so betrachte man das Polynom niedrigsten Grades  $\Phi_L(x)$ , für das  $\Phi_L(L) = 0$  ist. Ist  $\Phi_L(0) \neq 0$ , so ist  $X = 0$  die einzige Lösung von (1). Hat  $\Phi_L$  den Faktor  $x^i$  mit  $i > 1$ , so kann man ein  $A$  so bestimmen, daß  $AL = M$  gesetzt,  $MX = 0$  dieselben Lösungen wie (1) hat und  $\Phi_M(x) = x\psi(x) = x(1 - x\vartheta(x))$  ist.  $\psi(M)$  ist

dann idempotent und  $X = \varphi(M) Y$  ist die allgemeinste Lösung von (1). Der Übergang zu  $M$  ist nicht überflüssig, denn i. A. gibt es kein Polynom  $\chi$ , so daß die allgemeinste Lösung von (1) die Form  $\chi(L) Y$  hätte. Die Lösung von (2) wird jetzt zurückgeführt auf die Lösung von  $MX = AR = S$ . Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit ist  $\varphi(S) = 0$ . Ist sie erfüllt, so ist die allgemeinste Lösung  $X = \vartheta(M) S + \varphi(M) Y$ . — Es wird auch gezeigt, wie die Fälle, wo  $X$  mehreren Gleichungen der Form (1) oder (2) genügen soll, gelöst werden können.

*G. Lochs.*

**Colthurst, H. Riversdale:** The icosian calculus. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 50, 112—121 (1945).

Bericht über Hamiltons Untersuchungen (nach Briefen und Notizen) des Kalküls mit drei Symbolen  $\iota, \kappa, \lambda$ , für welche  $\iota^2 = \kappa^3 = \lambda^5 = 1$ ,  $\lambda = \iota\kappa \neq \kappa\iota$  gilt.

*G. Pickert.*

**Niven, Ivan:** Equations in quaternions. Amer. math. Monthly 48, 654—661 (1941).

In einem nichtkommutativen Schiefkörper endlichen Ranges über seinem Zentrum hat genau dann jede Gleichung der Form  $x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0$  eine Lösung  $x$ , wenn es sich um den Quaternionenschiefkörper über einem reell-abgeschlossenen Körper handelt; beim Beweis der Notwendigkeit dieser Bedingung braucht man nur die Auflösbarkeit der Gleichungen mit Koeffizienten aus dem Zentrum vorauszusetzen. Eine Gleichung der angegebenen Form kann unendlich viele Wurzeln haben; ist aber die Wurzelanzahl endlich, so ist sie  $\leq (2m - 1)^2$ .

*G. Pickert.*

**Tschebotarow, N.:** Notice on the theory of algebras. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 3, 405—412 (1942).

**Malcev, A.:** On the representation of an algebra as a direct sum of the radical and a semi-simple subalgebra. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 36, 42—45 (1942).

**Sagastume Berra, A. E.:** Darstellung von Matrixalgebren als gekreuzte Produkte. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., Revista 2, 365—381 (1943) [Spanisch].

**Sagastume Berra, A. E.:** Dihedrale Algebren. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., Revista 2, 383—393 (1943) [Spanisch].

**Gomes, Ruy Luis:** Beispiel von Algebren, die einen partikulären Typus von Involution zulassen. Gaz. mat., Lisboa 6, Nr. 23, 1—3 (1945) [Portugiesisch].

**Mira Fernandes, A. de:** Algebren in Involution. Gaz. Mat., Lisboa 6, Nr. 24, 1 (1945) [Portugiesisch].

**Schafer, R. D.:** On a construction for division algebras of order 16. Bull. Amer. math. Soc. 51, 532—534 (1945).

**Schafer, R. D.:** Equivalence in a class of division algebras of order 16. Bull. Amer. math. Soc. 52, 874—881 (1946).

**Lee H. C.:** On Clifford's algebra. J. London math. Soc. 20, 27—32 (1945).

**Etherington, I. M. H.:** Transposed algebras. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 7, 104—121 (1945).

**Bruck, Richard H.:** Generalized Fischer groups and algebras. Bull. Amer. math. Soc. 48, 618—626 (1942).

Tschebotarow, donne des nouvelles démonstrations simplifiées de résultats connus de la théorie des algèbres. Malcev établit un théorème d'unicité pour le théorème de structure de Wedderburn des algèbres associatives, ainsi qu'un théorème analogue pour les groupes de Lie connexes. Sagastume Berra traite les produits croisés pour le cas de groupes quelconques, en particulier pour le groupe diédral (v. d. Waerden, Algebra, II, 1940, § 133). Les algèbres considérées par Gomes et par de Mira Fernandes admettent une involution pour laquelle tous les éléments invariants sont de la forme  $\alpha u$ , où  $\alpha$  appartient au corps de base



et  $u$  est le 1 de l'algèbre. Schafer s'occupe d'algèbres obtenues à partir de celle de Cayley-Dickson (algèbre alternée d'ordre 8 avec division). Lee donne une démonstration du fait connu que toute algèbre de Clifford est semi-simple. E. H. Therington considère les transposées d'une algèbre linéaire  $\mathfrak{A}$ ; ce sont des algèbres obtenues au moyen de permutations des indices des coefficients  $c_{ijk}$  de la table de multiplication de  $\mathfrak{A}$ . Bruck étudie des représentations de ceux qu'il appelle les ensembles généralisés de Fischer: ensembles  $\mathfrak{E}$  de matrices tels que, pour chaque matrice  $M \in \mathfrak{E}$ , la matrice  $M^* = M^{\varphi}$ , où  $\varphi$  est un automorphisme du corps de base, appartient aussi à  $\mathfrak{E}$ .

G. Ancochea.

Barsotti, L.: Studi sopra le algebre senza base finita. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 1187—1189 (1946).

Chevalley, Claude and Hsio-Fu Tuan: On algebraic Lie algebras. Proc. nat. Acad. Sci. USA 31, 195—196 (1945).

Hillman, A. P.: A note on differential polynomials. Bull. Amer. math. Soc. 49, 711—712 (1943).

Sätze über Differentialpolynome und ihre Idealtheorie: (1) Es seien  $F \neq 0$ ,  $C_0, \dots, C_s$  Differentialpolynome in Unbestimmten  $y_1, \dots, y_n$  mit Koeffizienten aus einem differenzierbaren Körper. Es sei  $C_0 F + C_1 F' + \dots + C_s F^{(s)} \equiv 0$ , wobei  $F^{(i)}$  die  $i$ -te Ableitung von  $F$  bedeutet. Dann liegen alle  $C_i$  in dem durch  $F$  erzeugten perfekten differenzierbaren Ideal. (2) Es sei  $C_1 P_1 + \dots + C_s P_s \equiv 0$ , wobei die  $P_i$  verschiedene Potenzprodukte von einem festen Grad in dem Differentialpolynom  $F \neq 0$  und seinen Ableitungen sind. Dann liegen wiederum alle  $C_i$  in dem durch  $F$  erzeugten perfekten differenzierbaren Ideal. H.-J. Kowalsky.

Riblet, Henry J.: Factorization of differential ideals. Bull. Amer. math. Soc. 48, 575—577 (1942).

Zerlegungstheorie differenzierbarer Ideale in einem differenzierbaren Ring  $\mathfrak{R}$  mit folgenden Eigenschaften: (1) In  $\mathfrak{R}$  gilt die aufsteigende Kettenbedingung für differenzierbare Ideale. (2) Jedes differenzierbare Primideal ist teilerlos. (3) Jedes differenzierbare Primideal enthält ein differenzierbares Hauptideal. (4)  $\mathfrak{R}$  ist integral-abgeschlossen. Dann ist jedes differenzierbare Ideal in  $\mathfrak{R}$  Produkt endlich vieler differenzierbarer Primideale. Ist  $a \equiv 0$  (b), so tritt jeder Primfaktor von  $a$  mit mindestens derselben Vielfachheit als Primfaktor von  $b$  auf. H.-J. Kowalsky.

Kolehin, E. R.: Extensions of differential fields. I. II. Ann. of Math., II. Ser. 43, 724—729 (1942); 45, 358—361 (1944).

Satz vom primitiven Element für differenzierbare Körpererweiterungen der Charakteristik Null. Eine unmittelbare Übertragung des algebraischen Sachverhaltes ist nicht möglich, wie an Beispielen gezeigt wird.  $\mathfrak{G}$  sei eine Erweiterung des (partiell) differenzierbaren Körpers  $\mathfrak{F}$ . Ein Element  $\gamma \in \mathfrak{G}$  liegt genau dann schon in  $\mathfrak{F}$ , wenn jeder Isomorphismus von  $\mathfrak{G}$  über  $\mathfrak{F}$  das Element  $\gamma$  fest läßt.  $\gamma$  ist genau dann primitives Element von  $\mathfrak{G}$  über  $\mathfrak{F}$ , wenn es nur vom identischen Isomorphismus fest gelassen wird.  $\mathfrak{F}$  enthalte Elemente mit nicht verschwindender Jacobischer Determinante. Ist  $\mathfrak{F} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  ein differenzierbarer Erweiterungskörper, wobei jedes  $\alpha_i$  Lösung eines Differentialpolynoms über  $\mathfrak{F}$  ist, so gibt es ein primitives Element dieser Erweiterung. Es sei  $\mathfrak{F}$  ein gewöhnlich differenzierbarer Körper,  $y$  eine Unbestimmte und für den gewöhnlich differenzierbaren Körper  $\mathfrak{G}$  gelte  $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} \langle y \rangle$ . Dann gibt es ein primitives Element von  $\mathfrak{G}$  über  $\mathfrak{F}$ . Sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  zwei solche primitiven Elemente, so gilt  $\omega_2 = (a\omega_1 + b)/(c\omega_1 + d)$  mit  $a, b, c, d \in \mathfrak{F}$ . Der letzte Satz stellt eine Verallgemeinerung und Vereinfachung des entsprechenden Rittschen Ergebnisses dar.

H.-J. Kowalsky.

Eaton, J. E.: A Galois theory for differential fields. Duke math. J. 10, 751—760 (1943).

$\Gamma$  sei ein partiell differenzierbarer Körper der Charakteristik Null und  $\Gamma\langle\xi_1\rangle$  eine einfache Erweiterung von  $\Gamma$ . Für die Zwischenkörper zwischen  $\Gamma$  und  $\Gamma\langle\xi_1\rangle$  wird eine Galoiszuordnung zu den Untergruppen der Galois multigruppe von  $\Gamma\langle\xi_1\rangle$  über  $\Gamma$  angegeben, für die die üblichen Beziehungen gelten. Eine Multigruppe ist dabei eine Menge von Elementen, in der je zwei Elementen als Produkt eine Teilmenge so zugeordnet ist, daß gewisse, den Gruppenaxiomen korrespondierende Forderungen erfüllt sind. Als Elemente der Galois multigruppe werden Klassen von Isomorphismen definiert. Grundlage aller Resultate ist ein Satz über den Zerfall perfekter differenzierbarer Primideale aus  $\Gamma[x]$  bei Erweiterung des Grundkörpers.

H.-J. Kowalsky.

Scott, Winston M.: On matrix algebras over an algebraically closed field. Ann. of Math., II. Ser. 43, 147—160 (1942).

Nesbitt, C. and W. M. Scott: Some remarks on algebras over an algebraically closed field. Ann. of Math., II. Ser. 44, 534—553 (1943).

Un anneau  $\mathfrak{o}$  est dit semi-primitif quand  $\mathfrak{o}/\mathfrak{R}$  ( $\mathfrak{R}$  radical) est une somme directe d'anneaux à division. Tout anneau avec condition de minimum pour les idéaux à gauche peut être caractérisé au moyen d'un anneau semi-primitif, anneau de base (basic ring), et d'un ensemble d'entiers positifs. Les AA. appliquent la considération de l'anneau de base à l'étude de la structure des algèbres sur corps algébriquement fermés.

G. Ancochea.

Loonstra, F.: La structure des pseudo-évaluations d'un anneau élémentaire. Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 899—904 = Indagationes math. S., 558—563 (1946).

Mit der von K. Mahler (dies. Zbl. 13, 51) eingeführten Beziehung  $\subset$  bilden die Äquivalenzklassen der Pseudobewertungen (s. Mahler, l. c.) eines Ringes einen Verband, wenn noch die durch  $f(x) = 0$  erklärte Funktion  $f$  auch als Pseudobewertung bezeichnet wird und vorausgesetzt wird, daß es zu jeder Pseudobewertung  $w$  nur endlich viele nichtäquivalente Pseudobewertungen  $\subset w$  gibt. Der Beweis für die behauptete Distributivität dieses Verbandes ist unverständlich.

G. Pickert.

Diendonné, Jean: Sur les fonctions continues  $p$ -adiques. Bull. Sci. math., II. Sér. 68, 79—95 (1944).

Eine Reihe von Eigenschaften, die bekannten Eigenschaften der reellen stetigen Funktionen entsprechen, wird für  $p$ -adische Werte annehmende stetige Funktionen bewiesen.

L. Fuchs.

Sagastume Berra, A. E.: Bemerkung über  $p$ -adische Zahlen und Topologie. An. Soc. ci. Argentina 133, 218—221 (1942) [Spanisch].

Thurston, H. S.: The solution of  $p$ -adic equations. Amer. math. Monthly 50, 142—148 (1943).

Pétrasco, Julien: Sur le problème inverse à la théorie de Galois dans les corps finis. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 45, 113—123 (1943).

Levit, Robert J.: Fields in terms of a single operation. Trans. Amer. math. Soc. 57, 426—440 (1945).

Ein Körper läßt sich kennzeichnen als Menge von mindestens zwei Elementen mit einer in der gesamten Menge definierten binären Verknüpfung  $\triangle$ , welche die folgenden Eigenschaften besitzt:  $(a \triangle b) \triangle c = (a \triangle c) \triangle b$ ; wenn  $a \triangle b = a$ , so  $b \triangle a = b$ ; wenn nicht  $a$  das einzige rechtsneutrale Element (d. h.  $x \triangle a = x$  für alle  $x$ ) ist, so gibt es zu  $a$ ,  $b$  ein  $x$  mit  $a \triangle x = b$ ; ist  $x \triangle d$  für jedes  $x$  das einzige rechtsneutrale Element, so ist  $d \triangle (a \triangle (b \triangle c)) = b$  symmetrisch in  $a$ ,  $b$ . Der Zusammenhang mit der Wienerschen Körperdefinition [Trans. Amer. math. Soc. 21, 237—246 (1920)] wird untersucht und diese modifiziert. Die allgemeinste rationale binäre Verknüpfung  $\wedge$ , welche den obigen Forderungen genügt, wird mit festen, aber bis auf  $s \neq t$  beliebigen Parametern  $s$ ,  $t$  durch  $a \triangle b = (sa + tb -$



$a \circ b = t^2$ )  $(s - t)^{-1}$  gegeben und das allgemeinste Paar rationaler binärer Verknüpfungen  $+$ ,  $\circ$ , welche die üblichen Eigenschaften der Addition und Multiplikation in einem Körper haben, in derselben Weise durch  $a \oplus b = a + b - t$ ,  $a \circ b = (a \circ b - t(a + b) + s t) (s - t)^{-1}$ .  
G. Pickert.

**Chevalley, Claude:** On the composition of fields. Bull. Amer. math. Soc. 48, 482—487 (1942).

Seien  $K$  und  $K'$  zwei Erweiterungskörper des Grundkörpers  $k$ . Dann heißt  $\mathfrak{K}$  eine zusammengesetzte (composite) Erweiterung von  $K$  und  $K'$ , wenn es in  $\mathfrak{K}$  zwei zu  $K$  und  $K'$  isomorphe Unterkörper  $K^\tau$  bzw.  $K'^{\tau'}$  gibt (wobei mit  $\tau$  bzw.  $\tau'$  die Isomorphismen als Operationen bezeichnet werden), die den Körper  $\mathfrak{K}$  erzeugen, und wenn für zwei über  $k$  algebraisch unabhängige Teilmengen  $A$  und  $A'$  von  $K$  bzw.  $K'$  die Vereinigungsmenge von  $A^\tau$  und  $A'^{\tau'}$  über  $k$  algebraisch unabhängig ist. Für irgend zwei Erweiterungen gibt es wenigstens eine Zusammengesetzte.  $k$  heißt quasi-algebraisch geschlossen in  $K$ , wenn jedes über  $k$  algebraische Element  $a \in K$  die einzige Wurzel einer Gleichung mit Koeffizienten in  $k$  ist. Beweis einiger Sätze über solche zusammengesetzte Erweiterungen.

H. Schwerdtfeger.

- (1) Artin, E. and G. Whaples: Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations. Bull. Amer. math. Soc. 51, 469—492 (1945).  
(2) Artin, E. and G. Whaples: A note on axiomatic characterization of fields. Bull. Amer. math. Soc. 52, 245—247 (1946).

In den absolut-algebraischen Zahlkörpern, sowie in den algebraischen Erweiterungen des Funktionenkörpers einer Veränderlichen über einem Konstantenkörper gibt es eine Menge  $\mathfrak{M}$  von nicht-trivialen und nicht-äquivalenten Bewertungen  $\alpha_p$  (äquivalent = die eine ist eine Potenz der anderen; dabei ist jede positive Potenz einer Bewertung auch als Bewertung zu betrachten), so daß [1] für jedes Element  $\alpha \neq 0$  des Körpers,  $|\alpha|_p \neq 1$  nur für eine endliche Anzahl von  $p \in \mathfrak{M}$  gilt und außerdem  $\prod_{p \in \mathfrak{M}} |\alpha_p| = 1$  besteht. Umgekehrt, gebe es eine

Menge  $\mathfrak{M}$  von nicht-äquivalenten Bewertungen  $p$  irgendeines Körpers  $k$  mit den Eigenschaften [1] und [2]:  $\mathfrak{M}$  enthält mindestens eine Bewertung  $p$ , die entweder diskret mit einem Restklassenkörper von endlicher Ordnung oder archimedisch ist mit einem perfekten Körper, welcher mit dem reellen oder komplexen Körper gleich ist. Dann fällt  $k$  mit einem der obengenannten zwei Typen von Körpern zusammen. In (2) wird [1] durch die weniger fordernde, aber ebenfalls zum Ziele führende Bedingung ersetzt, daß für jedes  $\alpha \neq 0$  in  $k$  das Produkt der Bewertungen gegen 1 absolut konvergiert. Die aufgestellte Theorie wird auf einige Fragen der Klassenkörpertheorie angewendet.

L. Fuchs.

**Gaeta, Federico:** Note. — Eine Anwendung der linearen Algebra zur Theorie der einfachen algebraischen Erweiterungen eines Körpers. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 5, 251—254 (1945) [Spanisch].

**Almeida Costa, A.:** Über kommutative Körper. Centro Estudos Mat. Fac. Ci. Pôrto, Publ. Nr. 17 = Anais Fac. Ci. Pôrto 31, 20 p. (1946) [Portugiesisch].

**Robinson, Abraham:** On a certain variation of the distributive law for a commutative algebraic field. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 61, 93—101 (1941).

## Zahlentheorie:

● **Vinogradov, I. M.:** Grundlagen der Zahlentheorie. 4. Aufl. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1944. 142 S. [Russisch].

Besprechung der 5. Aufl. in dies. Zbl. 35, 22.

**Levi, B.:** Einige elementare Begriffe der Zahlentheorie. Math. Notae 4, 65—79 (1944) [Spanisch].



Thébault, V.: Curiosités arithmétiques. *Mathesis* 54, 5—8 (1940).

Schuh, F.: Über Wurzeln aus  $a + \sqrt{b}$ . *Mathematica*, Zutphen, A, 12, 113—122 (1943) [Holländisch].

Pipping, Nils: Eine Regel der Teilbarkeit durch 7 und durch 13. *Acta Acad. Aboensis, Math. Phys.* 15, Nr. 7, 4 S. (1946).

Gloden, A.: Sur la congruence  $x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* 12, 390—392 (1943).

Gloden, A.: Table des solutions de la congruence  $x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  pour  $2 \cdot 10^5 < p < 3 \cdot 10^5$ . *Mathematica*, Timisoara 21, 45—65 (1945).

Gloden, A.: Faktorisierung von Zahlen der Gestalt  $x^4 + 1$ . *Euclides*, Madrid 5, 620—621 (1945) [Spanisch].

Gloden, A.: Table de factorisation des nombres  $x^4 + 1$  dans l'intervalle  $1000 < x \leq 3000$ . *Inst. grand-ducal Luxembourg, Sect. Sci. natur. phys. math.; Arch.*, n. Sér. 16, 71—88 (1946).

Delfeld, Albert: Table des solutions de la congruence  $x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  pour  $300000 < p < 350000$ . *Inst. grand-ducal Luxembourg, Sect. Sci. natur. phys. math.; Arch.*, n. Sér. 16, 65—70 (1946).

● Malengreau, Julien: Contributions à la théorie des nombres. II. Étude sur les nombres de la forme  $B^m \pm 1$ . I. Montreux: Ganguin & Laubscher 1945. 43 p.

Kulakoff, A. A.: Sur les nombres de la forme  $a^m + b^m$ . *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. 40, 43—45 (1943) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Pajares Diaz, E.: Über die Summe der Zahlen, die sich aus gegebenen Ziffern bilden lassen. *Euclides*, Madrid 3, 333—338 (1943) [Spanisch].

● Glaisher, J. W. L.: Number-divisor tables. (British Association for the Advancement of Science, Mathematical Tables, vol. 8). Cambridge: Cambridge University Press 1940. X, 100 p. s. 15.

Beeger, N. G. W. H.: A list of errors in a table of numbers  $D$  for which  $x^2 - Dy^2 = -1$  has solutions in integers. *Nieuw Arch. Wiskunde*, II. R. 21, 194—196 (1943).

Beeger, N. G. W. H.: Note sur la factorisation de quelques grands nombres. *Inst. grand-ducal Luxembourg, Sect. Sci. natur. phys. math.; Arch.*, n. Sér. 16, 93—95 (1946).

Ginsburg, Jekuthiel: Iterated exponentials. *Scripta math.* 11, 340—353 (1945).

Williams, G. T.: Numbers generated by the function  $e^{e^x} - 1$ . *Amer. math. Monthly* 52, 323—327 (1945).

Mohr, Ernst: Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen bzw. Polynome. *Deutsche Math.* 7, 593—597 (1944).

Ranga, Charian V.: On certain sequences of integers no one of which is divisible by any other. *Patna Univ. J.* 1, 22—29 (1944).

Zahlen, Jean Pierre: Sur un genre nouveau de critères de primalité. *Euclides*, Madrid 6, 380—387 (1946).

Menon, P. Kesava: A generalization of Wilson's theorem. *J. Indian math. Soc.*, n. Sér. 9, 79—88 (1945).

Aubert, Karl E.: Bemerkung über den mittleren Binomialkoeffizienten. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* 17, Nr. 4, 13—16 (1944) [Norwegisch].

Jacobsthal, Ernst: Zahlentheoretische Eigenschaften der Binomialkoeffizienten. *Norske Vid. Selsk. Skr.* 1942, Nr. 4, 28 S. (1945) [Norwegisch mit französ. Zusammenfassg.].

Es sei  $p$  eine Primzahl,  $D_p = \binom{p^{r+1}}{p^r} - \binom{p^r}{p^{r-1}}$ . Verf. beweist in Verallgemeinerung der Resultate von V. Brun (dies. Zbl. 25, 1). J. E. Fjeldstad (dies. Zbl. 26, 201) und W. Ljunggren (dies. Zbl. 26, 201)  $D_2 \equiv 2^{3r} \pmod{2^{3r+3}}$ ,  $r \geq 2$ ,

$D_3 \equiv 3^{r+1} \pmod{3^{r+3}}$ ,  $r \geq 1$ ,  $D_p \equiv 1_p p^{r+2} \pmod{p^{r+3}}$ ,  $p \geq 5$ ,  $r \geq 2$ , wo  $1_p$  eine nur von  $p$  abhängige ganze Zahl bezeichnet. *H.-E. Richert.*

● Robinson, Raphael M.: Stencils for solving  $x^2 \equiv a \pmod{m}$ . Berkeley, Calif.: University of California Press 1940. 14 p., 274 stencils. \$ 2,00.

Sagastume Berra, A. E.: Über die Gruppe der Reste modulo  $n$ . An. Soc. ci. Argentina 139, 49—64 (1945) [Spanisch].

Bambah, R. P.: On complete primitive residue sets. Bull. Calcutta math. Soc. 38, 113—116 (1946).

Konstruktion zweier reduzierter Restsysteme  $r_i, s_i \pmod{2^m}$ ,  $m \geq 3$ ,  $i = 1, \dots, 2^{m-1}$ , so daß  $r_i, s_i$  wieder ein reduziertes Restsystem  $\pmod{2^m}$  bilden. *H.-J. Kanold.*

Tambs Lyche, R.: Eine Eigenschaft der symmetrischen Funktionen der ersten  $n$  ungeraden Zahlen. Norsk mat. Tidsskr. 26, 96—103 (1944) [Norwegisch].

Tambs Lyche, R.: Une propriété des fonctions symétriques des  $n$  premiers nombres impairs. Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I 1944, Nr. 9, 29 p. (1945).

Ljunggren, Wilhelm: On a theorem of R. Tambs Lyche. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 17, Nr. 28, 110—113 (1944).

Ljunggren, W.: Eine Eigenschaft der symmetrischen Funktionen von gewissen ganzen Zahlen. Norsk mat. Tidsskr. 27, 101—106 (1945) [Norwegisch].

Ljunggren, Wilhelm: A theorem on the elementary symmetric functions of the  $n$  first odd numbers. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 19, Nr. 5, 14—17 (1946).

$e_p(x)$  bezeichne die höchste Potenz der Primzahl  $p$ , die in der natürlichen Zahl  $x$  aufsteht,  $s_k^n$  sei die  $k$ -te elementarsymmetrische Funktion der ersten  $(p-1)n$  nicht durch  $p$  teilbaren natürlichen Zahlen. R. Tambs Lyche beweist  $e_2(2s_k^n) = e_2(n \binom{n}{k})$  für  $e_2(k) = 0$  und  $e_2(2s_k^n) = e_2(\binom{n}{k})$  für  $e_2(k) > 0$ . W. Ljunggren gibt einen vereinfachten Beweis dieses Satzes und beweist mit Hilfe eines Frobeniusschen Satzes über die Bernoullischen Zahlen  $B_t$  die symbolische Kongruenz

$$\frac{2^{2k} s_{2k}^n}{\binom{n}{2k}} \equiv \frac{2^{2k+1} s_{2k+1}^n}{n^2 \binom{n-1}{2k}} \equiv (1 + 4\beta)^{2k} \pmod{2^r},$$

wobei  $r = e_2(n)$ ,  $\beta^t = \beta_t$ ,  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta_{2t} = (-1)^{t-1} B_t$ ,  $\beta_{2t+1} = 0$ ,  $t \geq 1$ , und ferner  $e_3(3s_k^n) = e_3(3n \binom{n}{k-1/2})$  für  $e_2(k) = 0$  und  $e_3(3s_k^n) = e_3(\binom{n}{k/2})$  für  $e_2(k) > 0$ . *H.-E. Richert.*

Turnbull, H. W.: On certain modular determinants. Edinburgh math. Notes Nr. 32, 23—30 (1941).

Für ungerade Primzahlen  $p$  sei  $A(p)$  die  $\frac{1}{2}(p-1)$ -reihige Determinante  $a_{rs}$ , wobei  $a_r$  die kleinste natürliche Zahl bedeutet, die der Kongruenz  $ra_r \equiv s \pmod{p}$  genügt. Verf. bemerkt, daß die von Malo geäußerte Vermutung  $A(p) = (-p)^{(p-1)/2}$  unzutreffend ist. Es ist in dieser Formel noch ein ganzzahliger Faktor  $q$  hinzuzufügen, der sich als Determinante aus lauter Nullen und Einsen darstellen läßt und für dessen Bestimmung Verf. in Spezialfällen ein Verfahren entwickelt, ohne jedoch zu einem allgemeinen Resultat zu gelangen. Anschließend wird ein anderer Typ von Determinanten behandelt, der zu den  $A(p)$  in enger Beziehung steht. *H.-J. Kowalsky.*

Pocklington, H. C.: Quadratic and higher reciprocity of modular polynomials. Proc. Cambridge philos. Soc. 40, 212—214 (1944).

Jarden, Dov: Eine Tafel von Fibonacciischen Zahlen. Riveon Lematematika 1, 35—37 (1946) [Hebräisch].

Jarden (Juzuk), Dov: Two theorems on Fibonacci's sequence. Amer. math. Monthly 53, 425—427 (1946).

Jarden, Dov: Tafel der Auftrittsordnung in der Fibonacciischen Folge. Riveon Lematematika 1, 54 (1946) [Hebräisch].

Sei  $u_1 = u_2 = 1$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . Es ist  $u_m u_n | u_{mn}$  dann und nur dann, wenn  $(m, n) = 1, 2$  oder  $5$ .  $\alpha = \alpha(p)$  sei die kleinste Zahl mit  $p | u_\alpha$ ; ( $p = \text{Primzahl}$ ). Dann ist  $\left[ p - \left( \frac{5}{p} \right) \right] / \alpha(p)$  eine unbegrenzte ganzzahlige Funktion von  $p$ . Tafel der  $\alpha$  für  $p \leq 1511$ . H.-J. Kanold.

**Täcklind, Sven:** Über die Periodizität der Lösungen von Differenzenkongruenzen. Ark. Mat. Astr. Fys. 30A, Nr. 22, 9 p. (1944).

$a_1, \dots, a_m, k$  seien gegebene ganze Zahlen. Die Folge  $\{x_n\}$  sei definiert durch  $x_{n+m} + a_1 x_{n+m-1} + \dots + a_m x_n = 0$ . Die  $x_n$  sind periodisch mod  $k$  bei beliebigen  $x_1, \dots, x_m$ . Die Periodenlänge  $l$  wird bestimmt. H.-J. Kanold.

**Uspensky, J. V.:** Über ein Problem von John Bernoulli. I. II. III. IV. Revista Un. mat. Argentina 11, 141—154, 165—183, 239—255; 12, 10—19 (1946) [Spanisch].

Gegeben:  $0 < x < 1$ ;  $b$  beliebig reell. Untersucht wird die Folge  $[nx + b]$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  und die nur aus den Zahlen 0 und 1 bestehende Folge  $(x, b)$  der Differenzen  $[(n+1)x + b] - [nx + b]$ . H.-J. Kanold.

**Overholtzer, Gordon:** A new application of the Schur derivate. Bull. Amer. math. Soc. 51, 313—324 (1945).

$p$  sei Primzahl. Die „Schur-Ableitung“ einer Folge  $\{a_n\}$  von rationalen Zahlen bezüglich  $p$  ist die Folge  $\{(a_{n+1} - a_n) p^{-(n+1)}\}$ . Es werden Folgen  $\{S[n, x^k]\}$  betrachtet, wobei  $\sum_{\substack{(x, p)=1 \\ x < p^n}} x^k = S[n, x^k] \cdot p^n$ ;  $k$  ist eine beliebige feste ganze Zahl  $\geq 0$ . H.-J. Kanold.

**Porges, Arthur:** A set of eight numbers. Amer. math. Monthly 52, 379—382 (1945).

Sei  $x > 0$ , ganz;  $G(x)$  = Summe der Quadrate der Ziffern von  $x$  (im dekadischen System);  $G^{n+1}(x)$  sei die  $n$ -fach iterierte Funktion. Die Folge  $\{G^n(x)\}$  endet entweder in Einsen oder in einer Periode der Länge 8. H.-J. Kanold.

**Apéry, Roger:** Un théorème d'arithmétique. C. r. Acad. Sci., Paris 219, 404—405 (1944).

Es seien  $a_i$  ganz;  $P = \prod a_i$ ;  $S = \sum a_i^2$ ; ( $i = 1, \dots, n$ ). Für  $n \geq 3$  können die  $a_i$  auf unendlich viele Arten so gewählt werden, daß  $(a_i, a_j) = 1$  für  $i \neq j$  und  $S/P$  ganz,  $\leq n$ . H.-J. Kanold.

**Fueter, Rud.:** Über primitive Wurzeln von Primzahlen. Commentarii math. Helvet. 18, 217—223 (1946).

$p, q$  seien Primzahlen. 5, 7 sind primitive Wurzeln für  $p = 1 + 2^{2n} \cdot 3^{2m+3}$ ; 3, 5, 7 für  $p = 1 + 6q \neq 13$ ; 2 für  $p = 1 + 12q$ . H.-J. Kanold.

**Rédei, L.:** Kurze Darstellung des fünften Gaußschen Beweises für den quadratischen Reziprozitätssatz. Commentarii math. Helvet. 16, 264—265 (1944).

**Kostandi, G.:** Une propriété des équations irréductibles de la division du cercle. (Bul. Politechn. București) 14, 10—18 (1943).

**Lintes, I.:** Der Indikator einer Summe. Gaz. mat., București, 49, 593—594 (1943) [Rumänisch].

**Lintes, I.:** Ungleichungen mit Indikatoren höherer Ordnung. Gaz. mat., București 48, 536—539 (1943) [Rumänisch].

Für die Eulersche  $q$ -Funktion und ihre Iterierten  $q_r$  beweist Verf. die Ungleichung  $q_x(N^x) q_y(N^y) \geq q_{x+y}(N^{x+y})$  bei beliebigen nichtnegativen ganzen Zahlen  $x, y, N$ . Ausgeführt ist der Beweis allerdings nur für den Fall, daß in  $N$  höchstens zwei verschiedene Primzahlen aufgehen. H. Geppert.

**Popoviciu, Tiberiu:** Über Indikatoren. Gaz. mat., București 51, 306—313 (1946) [Rumänisch].

**Ghermanescu, M.:** Indikatoren, die Potenzen ganzer Zahlen sind. Gaz. mat., București 49, 325—329 (1943) [Rumänisch].



Ljunggren, W.: Arithmetische Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen. Norsk. mat. Tidsskr. 28, 33—37 (1946) [Norwegisch].

Bericht mit Beweisen einiger Sätze über Bernoullische Zahlen.

*H.-E. Richert.*

Uhler, H. S.: First proof that the Mersenne number  $M_{157}$  is composite. Proc. nat. Acad. Sci. USA 30, 314—316 (1944).

Uhler, H. S.: Note on the Mersenne numbers  $M_{157}$  and  $M_{167}$ . Bull. Amer. math. Soc. 52, 178 (1946).

Uhler, Horace S.: A new result concerning a Mersenne number. Math. Tables Aids Comput. 2, 94 (1946).

Kaplansky, Irving: Lucas's tests for Mersenne numbers. Amer. math. Monthly 52, 188—190 (1945).

Barker, Charles B.: Proof that the Mersenne number  $M_{167}$  is composite. Bull. Amer. math. Soc. 51, 389 (1945).

Keine der Zahlen  $2^{157} - 1$ ,  $2^{167} - 1$ ,  $2^{229} - 1$  ist Primzahl. *H.-J. Kanold.*

Poulet, P.: Neue mehrfach-vollständige und befreundete Zahlen. Gaz. mat., București 49, 654—660 (1943) [Rumänisch].

Escott, Edward Brind: Amicable numbers. Scripta math. 12, 61—72 (1946). Angabe von 390 Paaren befreundeter Zahlen. 233 stammen vom Verf.

*H.-J. Kanold.*

Brauer, Alfred: On the non-existence of odd perfect numbers of form  $p^2 q_1^2 q_2^2 \cdots q_{t-1}^2 q_t^4$ . Bull. Amer. math. Soc. 49, 712—718 (1943).

Brauer, Alfred: Note on the non-existence of odd perfect numbers of form  $p^a q_1^2 q_2^2 \cdots q_{t-1}^2 q_t^4$ . Bull. Amer. math. Soc. 49, 937 (1943).

● Candy, Albert L.: Pandiagonal magic squares of composite order. Lincoln, Neb.: Published by the author 1941. X, 155 p. \$ 1,00.

● Candy, Albert L.: Supplement to pandiagonal magic squares of prime order. Lincoln, Neb.: Published by the author 1942. III, 30 p.

Fitting, F.: Carrés panmagiques de  $n^4$  cases pour toute valeur de  $n$  impair. Sphinx 9, 116—118 (1939).

Pizá, Pedro A.: Kubische und quintische Dreiecke. Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 2, 92—97 (1946) [Spanisch].

Pizá, P. A.: Elliptic fermagoric triangles. Amer. math. Monthly 53, 317—323 (1946).

● Pizá, Pedro A.: Fermagoric triangles. San Germán, P. R.: Polytechnic Institute of Puerto Rico 1945. VIII, 155 p.

Finan, E. J.: Magic rectangles modulo  $p$ . Amer. math. Monthly 52, 502—506 (1945).

Verf. bildet „magische Rechtecke mod  $p$ “ mit  $a$  Zeilen und  $b$  Spalten auf folgende Art: Ist  $p$  eine ungerade Primzahl,  $p - 1 = ab$ ,  $(a, b) = 1$ , und gehören  $\alpha, \beta \bmod p$  zu den Exponenten  $a, b$ , so besteht die Matrix  $\alpha^i \beta^k \bmod p$  aus lauter verschiedenen Gliedern, und die Summe jeder Reihe ist teilbar durch  $p$ . Beweise für weitere Eigenschaften dieser Matrix.

*R. Sprague.*

R. Heath, V.: A magic cube with  $6n^3$  cells. Amer. math. Monthly 50, 288—291 (1943).

Als magischer Würfel der Ordnung  $n (> 3)$  wird eine dreidimensionale Matrix von  $n^3$  paarweis verschiedenen natürlichen Zahlen definiert, die in jeder Zeile, Spalte und Diagonale jeder horizontalen Schicht, sowie in jeder Vertikalreihe und den vier Raundiagonalen dieselbe Summe ergibt. Denkt man sich die Zahlen auf den Oberseiten von  $n^3$  kleinen Würfeln angebracht, so erhebt sich die weitere Frage, ob die Zahlen von 1 bis  $6n^3$  so auf die  $6n^3$  Seitenflächen der Würfel ver-

teilt werden können, daß immer ein magischer Würfel mit derselben Summe entsteht, welche seiner 6 Seitenflächen auch Oberseite sei. Da die Summe dann den Wert  $(6n^3 + 1)n/2$  hat, muß  $n$  gerade sein. Angabe eines Beispiels für  $n = 4$ .

*R. Sprague.*

Gloden, A.: Un nouveau théorème sur les multigrades. Euclides, Madrid 6, 377—379 (1946).

Gloden, A.: Über multigrade diophantische Gleichungen. Euclides, Madrid 4, 431—436, 514—519 (1944) [Spanisch].

Ghermanescu, M.: Die Gleichung  $x^2 + y^2 = az^n$  in ganzen Zahlen. Revista mat. Timişoara 23, 113—114 (1943) [Rumänisch].

Die Gleichung  $x^2 + y^2 = az^k$  ist genau dann lösbar, wenn  $a = \alpha^2 + \beta^2$  die Summe der Quadrate zweier ganzer Zahlen ist. Dann erhält man Lösungssätze durch  $x = \alpha A \pm \beta B$ ,  $y = \alpha B \mp \beta A$ ,  $z = \lambda^2 + \mu^2$ , wo  $\lambda, \mu$  willkürlich ganz und

$$A = (\lambda^2 + \mu^2)^k \cdot \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-2k}{2}\right]} (-1)^r \binom{n-2k}{2r} \lambda^{n-2k-2r} \mu^{2r},$$

$$B = (\lambda^2 + \mu^2)^k \cdot \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1-2k}{2}\right]} (-1)^r \binom{n-2k}{2r+1} \lambda^{n-2k-2r-1} \mu^{2r+1}$$

ist. Darin sind viele früher im Schrifttum behandelte Sonderfälle enthalten.

*H. Geppert.*

Ghermănescu, M.: Die Gleichung  $x^2 + axy + by^2 = z^k$  in ganzen Zahlen. Revista mat. Timişoara 23, 135—137 (1943) [Rumänisch].

Karanikolov, Chr.: Über eine Klasse von unbestimmten Gleichungen. Spisanie Bulgar. Akad. Nauk 65, 291—293 (1942) [Bulgarisch].

Whitlock, W. P., jr.: Rational right triangles with equal areas. Scripta math. 9, 155—161, 265—267 (1943).

Bronkhorst, P.: Über die Anzahl der Lösungen des diophantischen Gleichungssystems  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 = n$ ,  $x_1 + x_2 + \dots + x_s = m$  für  $s = 6$  und  $s = 8$ . Diss. Groningen. Amsterdam: Noord-Hollandsche Uitgevers-Maatschappij 1943 [Holländisch].

Nagell, Trygve: Eine elementare Methode zur Bestimmung der Gitterpunkte auf einer Hyperbel. Norsk. mat. Tidsskr. 26, 60—65 (1944) [Norwegisch].

See this Zbl. 36, 303.

*W. Ljunggren.*

Candido, Giacomo: Le equazioni di Fermat  $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ . Boll. Mat., IV. Ser. 1, 85—91 (1940).

Cornacchia, Giuseppe: Sulla legge di formazione e sulle proprietà dei quozienti incompleti dello sviluppo di  $\frac{1}{q}$  in frazione continua in dipendenza dei valori  $h$  assunti dalla forma  $x^2 - qy^2$  per i termini delle ridotte. Applicazione alla risoluzione dell'equazione  $x^2 \pm hy^2 = q$ . Atti II. Congr. Un. mat. Ital., Bologna 1940, 999—1004.

Wachs, Sylvain: Sur une extension du théorème de Gauss à un système de nombres premiers dans leur ensemble. Bull. Sci. math., II. Sér. 69, 46—52 (1945).

Analogon zum Satz der linearen Darstellbarkeit des größten gemeinsamen Teilers:  $a_1, \dots, a_n$  seien ganze Zahlen mit größtem gemeinsamen Teiler 1. Dann kann man die Zeile der  $a_r$  durch ganze Zahlen so zu einer quadratischen Matrix ergänzen, daß deren Determinante gleich 1 ist. Zum Beweis werden verschiedene Hilfssätze über Diophantische Gleichungen hergeleitet.

*H.-J. Kowalsky.*

Ko, Chao: Some new proofs of Smith's theorem. *Sci. Record* **1**, 308—312 (1945).

Haben die  $r$ -reihigen Unterdeterminanten der ganzzahligen  $(r, n)$ -Matrix  $A$ , wo  $r < n$ , den größten gemeinsamen Teiler  $d$ , so kann  $A$  zu einer ganzzahligen  $(n, n)$ -Matrix mit der Determinante  $d$  ergänzt werden. Verf. gibt hierfür drei Induktionsbeweise; der erste erscheint dem Ref. unvollständig (S. 309, Z. 5), der dritte ist von A. Bloch [*Bull. Soc. math. France* **50**, 101 (1922)] veröffentlicht worden.

H. Wielandt.

Griffiths, L. W.: A note on linear homogeneous diophantine equations. *Bull. Amer. math. Soc.* **52**, 734—736 (1946).

The complete solution of the Diophantine system  $(1) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , where  $a_{ij}$  are given rational integers and all letters denote integers, is well known if the rank  $r = m = n - 1$ . By induction the author proves a conjecture of E. T. Bell, that if  $r = m < n - 1$ , then the solution is similarly obtained from the system (1) and the equations  $\sum_{j=1}^n \xi_{ij} x_j = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - m - 1$ , where the  $\xi_{ij}$  are arbitrary integer parameters.

W. Ljunggren.

Kuroda, Sigeakatu: Über die Pellsche Gleichung. *Proc. imp. Acad. Tokyo* **19**, 611—612 (1943).

Sei  $D > 0$  die Diskriminante des reellen quadratischen Zahlkörpers  $\Omega$  und  $k_0$  die größte ungerade oder gerade Zahl  $\leq |D|$ , je nachdem  $D = 1$  oder  $\equiv 0 \pmod{4}$ . Ist die Norm der Grundeinheit  $E_0$  von  $\Omega$  gleich  $\pm 1$ , so ist bekanntlich die Gliederzahl  $n$  der Periode des regulären Kettenbruchs von  $\Theta = (k_0 + \sqrt{D})/2$  gerade. Sei  $n = 2l$ ,  $\Theta = k_0 + \frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{|k_{l-1}|} + \frac{1}{\eta}$ ,  $\eta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{p\Theta + p'}{q\Theta + q'}$  ( $a > 0$ ). Verf. bemerkt, daß  $\sqrt[n]{E_0}$  durch die Halbperiode der Kettenbruchentwicklung von  $\Theta$  berechnet werden kann, nämlich  $\sqrt[n]{E_0} = (q\Theta + q')/\sqrt[n]{a}$ ,  $q = [k_{l-1}, \dots, k_1]$ ,  $q' = [k_{l-1}, \dots, k_2]$ , und daß die Zahl  $a$  der Norm des von 1 verschiedenen primitiven ambigen Hauptideals  $[a, a\eta]$  von  $\Omega$  gleich ist, das in  $E_0 + 1$  oder  $E_0 - 1$  aufgeht, je nachdem  $l$  gerade oder ungerade ist.

Autoreferat.

Niven, Ivan: Quadratic diophantine equations in the rational and quadratic fields. *Trans. Amer. math. Soc.* **52**, 1—11 (1942).

Niven, Ivan: The Pell equation in quadratic fields. *Bull. Amer. math. Soc.* **49**, 413—416 (1943).

It is shown that the equation  $(1) \xi^2 - \gamma \eta^2 = 1$ , where  $\gamma$  is an integer of a quadratic number field  $K$ , has an infinite number of integral solutions  $(\xi, \eta)$  in  $K$  if and only if  $\gamma$  is not the square of an integer of  $K$  when  $K$  is imaginary, and  $\gamma$  is not totally negative when  $K$  is real. The solutions  $(\xi, \eta)$  may be represented in the form  $\xi + \eta \sqrt{\gamma} = (\xi_1 + \eta_1 \sqrt{\gamma})^n$ , where  $(\xi_1, \eta_1)$  is, in a sense, a minimal solution, whenever (1) has an infinite number of solutions if and only if  $\gamma$  is not a totally positive nonsquare of  $K$ . The number of solutions of the general quadratic equation  $a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0$ , with integral coefficients from the field of rational numbers or from some quadratic field, are discussed. In the proof a theorem of Hilbert on the existence of relative units of norm 1 in a field over  $K$  is used. Aside from this the methods employed throughout the paper are elementary.

W. Ljunggren.

Skolem, Th.: On certain exponential equations. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **18**, Nr. 18, 71—74 (1945).

Skolem, Th.: On the prime divisors of the values of certain functions. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **18**, Nr. 19, 75—78 (1945).



Skolem, Th.: Eine Methode der Lösung der Exponentialgleichung  $A_1^{x_1} \dots A_m^{x_m} - B_1^{y_1} \dots B_n^{y_n} = C$ . Norsk. mat. Tidsskr. 27, 37—51 (1945) [Norwegisch].

Skolem, Th.: A theorem on the equation  $\xi^2 - d\eta^2 = 1$  where  $d, \xi, \eta$  are integers in an imaginary quadratic field. Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I 1945, Nr. 1, 13 p. (1945).

Skolem, Th.: A remark on the equation  $\xi^2 - d\eta^2 = 1, d > 0, d', d'', \dots < 0$ , where  $d, \xi, \eta$  belong to a total real number field. Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I 1945, Nr. 12, 15 p. (1945).

Skolem, Th.: Verallgemeinerung zweier Sätze von Störmer. Norsk. mat. Tidsskr. 26, 85—95 (1944) [Norwegisch].

Let  $D$  be a positive rational integer, not a square. C. Störmer has proved that the equation  $x^2 - Dy^2 = 1$ , has at most one solution in such rational integers  $x, y$  that every prime divisor of  $y$  also divides  $D$ . The author gives various extensions of this theorem. Let  $k$  be a total real number field of degree  $n$  which contains a totally real element  $\delta$  such that  $\delta > 0, \delta^i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). The equation  $\xi^2 - \delta\eta^2 = 1$  has only a finite number of integral solutions  $\xi, \eta$  in  $k$ , such that every prime ideal divisor of  $\eta$  also divides  $\delta$ . An upper bound to the number of these solutions may always be found. If  $k$  is a quadratic or a cyclic cubic field all solutions can be effectively obtained. A similar theorem is valid if  $k$  is a cubic number field with negative discriminant,  $\delta \in k$  and  $< 0$ . In the case that  $k$  is an imaginary quadratic number field, different from  $R(\sqrt{-1})$  and  $R(\sqrt{-3})$ , and  $\delta$  any integer in  $k$  not having any of the forms  $\tau^2, -\tau^2$  and  $-3\tau^2$  for  $\tau$  in  $k$ , there are at most two essentially different solutions. Let  $\alpha + \beta\sqrt{\delta}$  be a fundamental unit for the group of all units in the field  $k(\sqrt{\delta})$  having the relative norm  $+1$ . If there is only one solution, this is  $\alpha, \beta$ . If there are two solutions, they are  $\alpha, \beta$  and  $\alpha_3, \beta_3$ , determined by  $\alpha_3 - \beta_3\sqrt{\delta} = (\alpha - \beta\sqrt{\delta})^3$ . By means of his theorem Störmer proved that it is possible to find all integral rational solutions  $x_i, y_j$  of the exponential equation (1)  $A \prod_{i=1}^m A_i^{x_i} - B \prod_{j=1}^n B_j^{y_j} = C$ , where  $A, B, A_i, B_j$  are given rational integers and  $C = \pm 1$  or  $\pm 2$ . The author generalizes this theorem for  $C = 1$ , using the results mentioned above. Further he proves the following theorem, making use of another method: Let  $\alpha, \alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) be algebraic integers,  $|\alpha| > 1$ , no  $\alpha_i$  a unit. Then the exponential equation  $\alpha^x - 1 = \alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \dots \alpha_n^{x_n}$  has only a finite number of solutions in rational integers  $x, x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . All these solutions can be found effectively. The author gives also a method for solving (1) in the case  $|C| \geq 3, A, A_i, B, B_j$  given rational integers. In most of the proofs use is made of the theory of  $p$ -adic numbers. As a generalization in another direction the following equation is considered:  $f(x) = k p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_m^{x_m}$ , where  $f(x)$  attains rational integral values for all rational integers  $x$  and  $p_1, p_2, \dots, p_m$  are given primes. W. Ljunggren.

Skolem, Th.: Solutions of the equation  $axy + bx + cy + d = 0$  in algebraic integers. Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I 1946: Nr. 3, 8 p. (1947).

Let  $K, K_n, K$  denote respectively an algebraic number field of finite degree, an algebraic extension field of degree  $n$  relative to  $K$ , the field of all algebraic numbers. The ring of all integers in  $K, K_n, K$  is denoted by  $R, R_n, \bar{R}$  respectively.  $R^{(m)}$  is the ring of all remainders mod  $m, m$  an ideal in  $R$ . The author proves seven theorems concerning the solutions in  $R^{(m)}, R, R_n$  and  $\bar{R}$  of the equation (1)  $axy + bx + cy + d = 0$ , where  $a, b, c$  belong to  $R, (a, b, c) = 1$  and  $D = ad - bc \neq 0, a \neq 0$ . (1) is always solvable in  $R^{(m)}$ ; if the number  $E$  of units in  $R$  is

finite, the number  $N$  of solutions of (1) is finite, possibly zero; if  $E$  is infinite, is  $N$  infinite or zero; if  $(a, c) = 1$ , (1) has a solution in  $R$  when and only when  $D$  has a divisor  $\equiv c \pmod{a}$ ; if  $(a, c) \neq 1$ , the necessary and sufficient condition for the existence of a ring  $R_n$  such that (1) is solvable in  $R_n$  is that  $D^n$  contains a divisor  $D_1 \equiv c^n \pmod{a}$  in  $R$ ; there exists always a ring  $R_n$  such that (1) has a solution  $x, y$  in  $R_n$  and an upper bound for the least value of  $n$  may be found.

W. Ljunggren.

(1) Ljunggren, Wilhelm: Sur la solution de quelques équations diophantiennes biquadratiques à deux inconnues. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 16, Nr. 28, 103—105 (1944).

(2) Ljunggren, Wilhelm: Über die Darstellung von ganzen Zahlen durch binäre biquadratische Formen einer speziellen Klasse. Norsk mat. Tidsskr. 26, 51—59 (1944) [Norwegisch].

(3) Ljunggren, Wilhelm: Solution complète de quelques équations du sixième degré à deux indéterminées. Arch. Math. Naturvid. 48, Nr. 7, 35 p. (1946).

(4) Ljunggren, Wilhelm: Einige Bemerkungen über die Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit positiver Diskriminante. Acta math. 75, 1—21 (1943).

(5) Reitan, L.: Über die Lösungen der zahlentheoretischen Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = t$  für gegebenes  $t$ . Norsk mat. Tidsskr. 28, 21—23 (1946) [Norwegisch].

(6) Ljunggren, Wilhelm: On the diophantine equation  $x^2 + p^2 = y^n$ . Norske Vid. Selsk. Forhdl. 16, Nr. 8, 27—30 (1943).

(7) Ljunggren, Wilhelm: On the diophantine equation  $x^2 + D = y^n$ . Norske Vid. Selsk. Forhdl. 17, Nr. 23, 93—96 (1944).

(8) Ljunggren, Wilhelm: On a diophantine equation. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 18, Nr. 32, 125—128 (1945).

(9) Mebius, C. A.: Zahlentheoretische Untersuchungen. III. Die diophantische Gleichung  $A^3 + B^3 - C^3 - D^3 = E$ . Göteborgs Kungl. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhälles Handlingar, VI. Ser. B 3, Nr. 6, 21 S. (1945).

(10) Ljunggren, Wilhelm: Sur une généralisation d'un théorème de C. Størmer. Arch. Math. Naturvid. 48, Nr. 11, 145—152 (1944).

(11) Ljunggren, Wilhelm: Sur la résolution de quelques équations diophantiennes cubiques dans certains corps quadratiques. Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I 1943, Nr. 14, 23 p. (1944).

(1)–(4): Mit Hilfe der  $p$ -adischen Methode von Skolem (dies. Zbl. 11, 392) beweist Verf. die Existenz oberer Schranken für die Anzahl der ganzzahligen Lösungen  $x, y$  der Gleichungen  $(ax^2 + bx + c)^2 - Dy^2 = -N$ ,  $x^2 - D(ay^2 + by + c)^2 = N$ ,  $a > 0$ ,  $N > 0$ ,  $D > 1$ , und den Satz:

$$F(x, y) = x^4 - px^3y + qx^2y^2 - pxy^3 + y^4 = \pm 1,$$

wo  $F(t, -1) = 0$  genau zwei reelle Lösungen besitzt, hat höchstens 4 nicht-triviale Lösungen in ganzrationalen  $x, y$ . Verf. betrachtet weiter die Gleichung [1]  $Ax^6 - By^6 = C$ ,  $A, B > 0$ ,  $(AB, C) = 1$ ,  $AB$  kein Quadrat, kein Kubus, nicht durch die 6. Potenz einer Primzahl teilbar, und nennt zwei Gleichungen der Gestalt [1] mit den Koeffiziententripeln  $(A, B, C)$  und  $(A_1, B_1, C_1)$  zu derselben Familie gehörig, wenn die Körper  $K(\sqrt[6]{-27AB^{-1}})$  und  $K(\sqrt[6]{-27A_1B_1^{-1}})$  identisch sind. Er beweist: Ist  $C$  ein Teiler von 12, so ist höchstens eine Gleichung einer Familie lösbar; ist  $C$  ein echter Teiler von 12, so hat [1] höchstens eine Lösung in natürlichen Zahlen  $x, y$ . Die Methoden ergeben auch eine einfache Behandlung der von Nagell [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 4, 209–270 (1925)] untersuchten Gleichung  $Ax^3 + By^3 = C$ . Ferner gibt er sämtliche (sechs) Lö-

sungen von  $x^3 - 3xy^2 - y^3 = 1$  an und erhält damit auf Grund eines Satzes von Nagell [Norske Vid. Selsk. Forhdl. I, 2 (1921)] sämtliche Lösungen  $(x, y, n)$  von  $x^2 + x + 1 = y^n$ . Hierbei wird auch die allgemeinere Gleichung  $x^3 - ax^2y - (a+3)xy^2 - y^3 = 1$  untersucht. (5) diskutiert die Lösungsquadrupel  $(x, y, z, v)$  der Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = t$ . (6)–(8) zeigt für eine Primzahl  $p$ , wo  $p^2 - 1$  genau durch eine ungerade Potenz von 2 teilbar ist, daß die Gleichung  $x^2 + p^2 = y^n$ ,  $n > 1$  nur endlich viele Lösungen in  $x, y, n$  besitzt. Die Gleichung  $[2]Cx^2 + D = y^n$ ,  $C, D, n$  ungerade natürliche Zahlen,  $C$  und  $D$  quadratfrei, Klassenzahl von  $K(\sqrt{-CD})$  nicht durch  $n$  teilbar, ist, falls  $D + (-1)^{(D+1)/2}$  genau durch eine ungerade Potenz von 2 teilbar ist, für  $CD \equiv 1 \pmod{4}$  oder  $CD \equiv 3 \pmod{8}$  mit  $3 \nmid n$  in ganzen Zahlen  $x, y$  nicht lösbar. Ist  $D + (-1)^{(D+1)/2}$  genau durch eine gerade Potenz von 2 teilbar, so hat  $[2]$  keine Lösung für  $CD \equiv 7 \pmod{8}$  und  $n = q > 3$ ,  $q$  prim,  $q \nmid CD \pmod{8}$ . (9) enthält neue Beweise für eine Reihe klassischer Sätze aus einer Identität, z. B. jede Zahl der Form  $3n$  ist als Summe von vier Kuben darstellbar und jede Zahl, die als Summe von vier Kuben geschrieben werden kann, besitzt unendlich viele solcher Darstellungen. (10): Verallgemeinerung eines Satzes von Störmer [SKR Vid. Selsk. Christiania I, 11 (1895)], sämtliche (acht) nichttrivialen Lösungen von  $m \arctg(1/x\sqrt{D}) + n \arctg(1/y\sqrt{D}) = k\pi/2$ ,  $D > 1$ , quadratfrei, in ganzen Zahlen  $m, n, x, y, k, D$  (vgl. dies. Zbl. 28, 109–110). Es sei  $D$  eine natürliche, quadratfreie Zahl  $> 1$  und  $\nmid 3$ .  $E > 1$  sei die Grundeinheit von  $K(\sqrt{D})$ . Sind dann die Klassenzahlen von  $K(\sqrt{D})$  und  $K(\sqrt{-D})$  beide nicht durch 3 teilbar, so haben die Gleichungen  $\eta^2 \dots 1 = 4E^s \xi^3$ ,  $\xi \nmid 0 \pmod{2}$ ,  $\eta^2 + 1 = 2E^s \xi^3$ ,  $\xi \nmid 0 \pmod{2}$  und  $\eta^2 + 1 = 4E^s \xi^3$ ,  $s = 0$  oder 1, nur endlich viele ganze Lösungen in  $\xi, \eta \in K(\sqrt{D})$ . Für die Lösungsanzahlen können obere Schranken angegeben werden.

H.-E. Richert.

Schmid, F.: Über die Gleichung  $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ . S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa 152, 7–14 (1944).

A proof of the impossibility of the cubic Fermat equation, based on the theorem that the discriminant of a cubic algebraic number field is different from  $\pm 1$ .

W. Ljunggren.

Sispánov, Sergio: Ein Problem Diophantischer Analysis. Revista Un. mat. Argentina 9, 41–48 (1943) [Spanisch].

The general solution of the diophantine equation  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = kt^3$ , depending upon four parameters, is given.

W. Ljunggren.

Mordell, L. J.: Rational points on cubic curves and surfaces. Amer. math. Monthly 51, 332–339 (1944).

Prasad, Sarveshwar and V. R. Chariar: On certain diophantine equations. Patna Univ. J. 2, 66–71 (1946).

Elaboration of L. J. Mordell (this Zbl. 28, 345).

J. W. S. Cassels.

Segre, B.: A note on arithmetical properties of cubic surfaces. J. London math. Soc. 18, 24–31 (1943).

Preliminary announcement of many far-reaching results about rational points on cubic surfaces. See B. Segre (this Zbl. 43, 275).

J. W. S. Cassels.

(1) Segre, B.: On a parametric solution of the equation  $x^3 + y^3 + az^3 = b$ , and on ternary forms representing every rational number. J. London math. Soc. 18, 31–34 (1943).

(2) Segre, B.: A complete parametric solution of certain homogeneous diophantine equations, of degree  $n$  in  $n+1$  variables. J. London math. Soc. 19, 46–55 (1944).

(3) Segre, B.: On arithmetical properties of singular cubic surfaces. J. London math. Soc. 19, 84–91 (1944).



Criteria for the existence of rational points on cubic surfaces. (2) considers a rather more general situation.

*J. W. S. Cassels.*

Segre, B.: On ternary non-homogeneous cubic equations with more than one rational solution. *J. London math. Soc.* 18, 88—100 (1943).

Mordell, L. J.: Segre's indeterminate non-homogeneous cubic equations in three variables. *J. London math. Soc.* 18, 43—46 (1943).

Segre, B.: A parametric solution of the indeterminate cubic equation  $z^2 = f(x, y)$ . *J. London math. Soc.* 18, 226—233 (1943).

Mordell, L. J.: A rational parametric solution of  $z^2 - k = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ . *J. London math. Soc.* 18, 222—226 (1943).

Whitehead, R. F.: A rational parametric solution of the cubic indeterminate equation  $z^2 = f(x, y)$ . *J. London math. Soc.* 19, 68—71 (1944).

Segre had shown [ibid. 18, 24—31 (1943) review preced. page] that a cubic surface with rational coefficients and one rational point has infinitely many, except in two special cases. These papers are devoted to showing that explicit parametric solutions can be given for these cases and generalizations of them.

*J. W. S. Cassels.*

Richmond, H. W.: On the diophantine equation  $F \equiv ax^4 + by^4 + cz^4 + d w^4 = 0$ , the product  $abcd$  being a square number. *J. London math. Soc.* 19, 193—194 (1944).

Segre, B.: On arithmetical properties of quadric and quartic surfaces. *J. London math. Soc.* 19, 195—200 (1944).

Investigation of rational points on quartic tetrahedral surfaces.

*J. W. S. Cassels.*

Podsypanin, V.: On the equation  $ax^4 + bx^2y^2 - cy^4 = 1$ . *Mat. Sbornik*, n. Ser. 18 (60), 105—114 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Verf. zeigt, daß die angegebene Gleichung, in der  $a, b, c$  ganz und  $a, c$  positive Zahlen sind, höchstens eine Lösung in positiven ganzen Zahlen besitzt. *J. Heinhold.*

Ward, Morgan: Euler's three biquadrate problem. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 31, 125—127 (1945).

See: Ward, this Zbl. 31, 201.

*W. Ljunggren.*

Patterson, J. O.: A note on the diophantine problem of finding four biquadrates whose sum is a biquadrate. *Bull. Amer. math. Soc.* 48, 736—737 (1942).

Euler conjectured the existence of 4 biquadrates whose sum is a biquadrate. Norrie discovered that  $30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4$ . The author gives the second example:  $240^4 + 340^4 + 430^4 + 599^4 = 651^4$ .

*W. Ljunggren.*

Rosenthal, E.: diophantine equations reducible in biquadratic fields. *Duke math. J.* 10, 463—470 (1943).

Rosenthal, E.: On some cubic diophantine equations. *Amer. J. Math.* 65, 663—672 (1943).

Rosenthal, E.: On some special diophantine equations. *Bull. Amer. math. Soc.* 50, 753—758 (1944).

Let  $K$  be an algebraic number field. Then all solutions of  $\xi\eta = \zeta\vartheta$  in integers of  $K$  are given by  $\xi = \kappa\lambda e^{-1}$ ,  $\eta = \mu\nu e^{-1}$ ,  $\zeta = \kappa\nu e^{-1}$ ,  $\vartheta = \lambda\mu e^{-1}$ , where  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$  are arbitrary integers in  $K$  and  $e$  takes only the finite set of rational integers each equal to the norm of a representative ideal from each class. This generalizes a theorem of E. T. Bell (this Zbl. 6, 155). Using this lemma the author obtains the complete solution in rational integers of various diophantine equations, for example  $x^n + y^n = u^2 - v^2$ ,  $n = 2$  or 3 and  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw$ . These equations are written in multiplicative form, here using fields with class-number 1. Another result is: Let  $R$  be an arbitrary quadratic number field,  $X$  an integer of  $R$ , and  $\bar{X}$  the conjugate of  $X$ . Then all solutions

of (1)  $X\bar{X} = z^{2n+1}$  ( $z$  rational integer) are given by  $E^{2n+1} X = \pm H_1^{2n+1} H_2^{2n} \bar{H}_2 \dots H_{n+1}^{n+1} \bar{H}_{n+1}$ ,  $E^2 z = H_1 \bar{H}_1 H_2 \bar{H}_2 \dots H_{n+1} \bar{H}_{n+1}$ , where  $H_i$  are integers in  $R$  and  $E = e_1^{n+1} e_2^n \dots e_n^2$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  each being equal to the norm of a representative ideal from each class. *W. Ljunggren.*

**Correnti, Salvatore:** Problemi inversi in analisi combinatoria. *Matematiche* **1**, 72—80 (1946).

**Størmer, Carl:** Sur un problème curieux de la théorie des nombres concernant les fonctions elliptiques. *Arch. Math. Naturvid.* **47**, 83—85 (1943).

A special case of the diophantine equation  $m f(x) + n f(y) = k\omega$ , where  $f(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$ , and  $2\omega$  is the real period of the corresponding Weierstrass  $p$ -function, is studied. The complete solution in integers  $x, y, m, n, k$  is not obtained. *W. Ljunggren.*

**Størmer, Carl:** Ein zahlentheoretisches Problem. *Norsk mat. Tidsskr.* **26**, 109—115 (1944) [Norwegisch].

Let  $f(x)$  be a polynomial in  $x$ , which takes integral values for every integral value of  $x$ . The problem of finding all solutions of the equation  $f(x_0) = \prod_{i=1}^n f(x_i)^{k_i}$  in positive integers  $x_i, k_i$ , is solved in the special case  $f(x) = x^2 + (x+1)^2$ ,  $n=1$ . *W. Ljunggren.*

**Niedermeier, Franz:** Zwei Erweiterungen eines Kummersehen Kriteriums für die Fermatsche Gleichung. *Deutsche Math.* **7**, 518—519 (1944).

The author gives two extensions of a theorem of E. E. Kummer [*J. reine angew. Math.* **17**, 203—209 (1837)]. The equation  $x^{2p} - y^{2p} = z^{2p}$ ,  $p$  odd prime, has no solution in rational integers  $x, y, z$  for which none of  $x, y, z$  is divisible by  $3p$  if  $p \equiv 1 \pmod{3}$  and by  $5p$  if  $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ . *W. Ljunggren.*

**Răclîș, N.:** Théorème pour les nombres de Fermat. *Bul. Politechn. București* **14**, 3—9 (1943).

**Răclîș, N.:** Lemmes pour le théorème de Fermat. *Bul. Politechn. București* **14**, 145—156 (1943).

**Răclîș, N.:** Démonstration du grand théorème de Fermat pour des grandes valeurs de l'exposant. *Bul. Politechn. București* **15**, 3—21 (1944).

**Răclîș, Nicolas:** Recherches sur le grand théorème de Fermat. *Ann. Roumaines Math.* **5**, 61 p. (1944).

**Pierre, Charles:** Sur le théorème de Fermat  $a^n + b^n = c^n$ . *C. r. Acad. Sci., Paris* **217**, 37—39 (1943).

**Pierre, Charles:** Remarques arithmétiques en connexion avec le dernier théorème de Fermat. *C. r. Acad. Sci., Paris* **218**, 23—25 (1944).

**Sispánov, Sergio:** Über die unbestimmte Gleichung  $a x^n + b y^n + c z^n = 0$ . *Boll. Mat.* **16**, 71—73 (1943) [Spanisch].

**Jonah, Harold F. S.:** Congruences connected with the solution of a certain diophantine equation. *Bull. Amer. math. Soc.* **51**, 137—147 (1945).

From a functional equation transformations of the Mirimanoff and Vandiver congruences connected with Fermat's last theorem are obtained. *W. Ljunggren.*

**Bell, E. T.:** Compound multiplicative diophantine systems. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **26**, 462—466 (1940).

Author considers the system of Diophantine equations with indeterminates  $x_{11}, \dots, x_{nm}, y_1, \dots, y_s$ :  $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_{ij} Y_{ij} = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ), where the  $a_{ij}$  are given

constants and  $Y_{11}, \dots, Y_{nm}$  are monomials in some of the variables  $y_1, \dots, y_s$ . It is proved that this system can be reduced to a multiplicative system and a number of linear equations, whose solutions are known. — Some applications are indicated.

W. Verdenius.

**Bell, E. T.:** Selective equations. *Ann. of Math.*, II. Ser. **42**, 1029—1036 (1941).

The simple selective operators  $(a_1, \dots, a_n)'$  and  $[a_1, \dots, a_n]'$  denote the min. and the max. of  $a_1, \dots, a_n$ . Let  $f_{ij}$  denote compound selective operators of some of the variables  $y_1, \dots, y_s$ , e.g.  $[y_1, (y_2, y_3)', y_6]'$ . The author considers the system  $\sum_{i=1}^n a_{ij} f_{ij} = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ), where the  $a_{ij}$  denote integers. It is shown

that all the positive integer solutions  $y_1, \dots, y_s$  can be found. The solution is in terms of a number of independent positive integer parameters. — Such a system is dual with the system obtained by replacing  $()'$ ,  $[]'$  by the G. C. D., L. C. M. and addition by multiplication. This dual system — which is multiplicative — can be solved, whereby the parameters are subject to certain G. C. D. conditions, which can also be solved.

W. Verdenius.

(1) **Bell, E. T.:** Separable diophantine equations. *Trans. Amer. math. Soc.* **57**, 86—101 (1945).

(2) **Bell, E. T.:** Parametric solutions of certain diophantine equations. *Duke math. J.* **9**, 431—435 (1942).

(3) **Bell, E. T.:** Mahavira's diophantine system. *Bull. Calcutta math. Soc.* **38**, 121—122 (1946).

(1) A monomial  $X = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ , where  $\lambda_i$  are positive integers, is said to be elementary, if at least one  $\lambda_i = 1$ . An equation of the type  $m_1 X_1 + \dots + m_n X_n = 0$  ( $n > 2$ ,  $\text{if } m_i \neq 0$ ), where the  $m_i$  are fixed integers and the  $X_i$  are elementary monomials, is called an extended equation. A system  $a_i X_i = b_i Y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) is called simple, if for  $i = 1, \dots, n$  the  $a_i$  and  $b_i$  are positive integers and  $X_i$  and  $Y_i$  are monomials, which have no variables in common. A system  $S$  of Diophantine equations is said to be separable if a resolution of  $S$  is equivalent to that of one or more of: (A) independent extended equations, (B) simple systems, (C) linear Diophantine equations. — It is proved, that type (A) is equivalent to a certain system (C'). Therefore separable systems are solvable. — The author makes many applications. The most general is:  $Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 Y_1 + \dots + b_s Y_s$  is separable, where  $Q$  is a quadratic form with integer coefficients and for  $i = 1, \dots, n$  the  $b_i$  are integers and  $Y_i$  are elementary monomials, with no variables in common. In only a few cases the parametric solutions can be written in explicit formulas, for example  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + \dots + y_s^2$  with  $s = 1$  or  $s = n - 1$ . Special cases of these equations are developed by means of the same method in (2) and (3).

W. Verdenius.

**Bell, E. T.:** Note on a conjecture due to Euler. *Bull. Amer. math. Soc.* **49**, 393—394 (1943).

Author states solutions in algebraic numbers of  $x_1^n + \dots + x_t^n = x^n$ , where  $n > 3$  and  $t > 1$ .

W. Verdenius.

**Bell, E. T.:** A method in rational diophantine analysis. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **30**, 355—359 (1944).

From Mordell's equation (dies. Zbl. **28**, 345) (1)  $(\xi + \eta + \zeta)^3 - d\xi\eta\zeta = m$ , where  $d$  and  $m$  are given rational numbers is a partial rational solution involving one parameter obtained. At first  $d\eta\zeta(\xi + \zeta) = u^3$  is solved. From these solutions are those selected for which  $d\eta\zeta^2 = m$  and  $\xi + \eta + \zeta = u$ . The given values therefore also satisfy (1). — This method — by means of rational auxiliary equations the given system is reduced to a multiplicative system — is also explained for  $(x + y)(y + z)(z + x) - dx y z = m$ .

W. Verdenius.



Bell, E. T.: Algebraic identities in the theory of numbers. Amer. math. Monthly 50, 535—541 (1943).

The author solves  $x^{n-1}y$  from the identities

$$\sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} a_i^{n-r} b_i^r x^{n-r} y^r = (a_i x + b_i y)^n - a_i^n x^n - b_i^n y^n \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

where  $n > 1$ , the  $a$ 's and  $b$ 's are integer parameters, while the determinant of the system differs from zero. He states that  $ncx^{n-1}y = c_1u_1^n + \dots + c_{n+1}u_{n+1}^n$ , where  $u_i = a_i x + b_i y$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ),  $u_n = x^n$  and  $u_{n+1} = y^n$ , while the  $c$ 's are polynomials in the  $a$ 's and  $b$ 's with integer coefficients, none identical zero. — Other identities are derived by differentiation and otherwise. — The case  $x = 1$  is of special interest, because it includes many identities which have been used and are still used in Diophantine analysis (Cf. Dickson, History of the theory of numbers Vol. II, New York 1934). Example:  $60y = 8(y-1)^5 + 8(y+1)^5 - (2y-1)^5 - (2y+1)^5 + 48y^5$ , from which it is easily deduced, that every integer can be written as  $x^5 + y^5 + z^5 + w^5 + 2w^5 + 8w^5 + 8w^5 + 48t^5$ . [Ref. replaces 64 by 48 to rectify a mistake.] In the applications the author states parametric solutions of remarkable Diophantine equations. Example: From  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^{6n-1} + x_4^{6n-1} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^{6n-1} + y_4^{6n-1}$  ( $n > 0$ ) a solution involving three parameters is obtained.

W. Verdenius.

Bell, E. T.: A representation of certain integer powers. Nat. Math. Mag. 20, 3—4 (1945).

Main result: If  $a, b$  and  $n$  are positive integers,  $(a, b) = 1$ ,  $F_{rt}(x, y, z) = x^r y^t + y^r z^t + z^r x^t$ , then  $n^{as} F_{b, 3a+2b}(x, y, z) = F_{3a+2b, 3a+b}(x, y, z)$  is solvable in integers  $s, x, y, z$ .

W. Verdenius.

Bell, E. T.: Interpolated denumerants and Lambert series. Amer. J. Math. 65, 382—386 (1943).

Let  $D(n) = D(n|a_1, \dots, a_r)$ , the denumerant of the non-negative integer  $n$  with respect to the positive integers  $a_1, \dots, a_r$ , denote the number of non-negative integer solutions  $(x_1, \dots, x_r)$  of  $a_1 x_1 + \dots + a_r x_r = n$ . In an elementary way it is proved that  $D(am + b)$  is a polynomial in  $m$  of degree  $r - 1$ , where  $a$  is the L. C. M. of  $a_1, \dots, a_r$  and  $b$  any constant. — An application is made on the power series of a special generalized Lambert series.

W. Verdenius.

Bell, E. T.: Universal rational functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 31, 317—319 (1945).

A function  $f$  is called universal (for the set  $C$ ), if all the numbers (of  $C$ ) can be represented by  $f$  for positive integer values of the variables. Some examples are constructed and some properties are indicated of universal functions of the type  $F/G$ , where  $F$  and  $G$  are forms with positive integer coefficients.

W. Verdenius.

Bell, E. T.: A type of universal arithmetical forms. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 375—378 (1943).

Es sei  $F(x_1, \dots, x_n)$  ein beliebiges Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und  $F(0, \dots, 0) = 0$ . Frage: Gibt es zu  $F$  ein System von natürlichen Zahlen  $r, p_1, \dots, p_r$  so, daß alle natürlichen Zahlen der Form  $z = y_1^{p_1} \dots y_r^{p_r}$  mit beliebigen ganzen rationalen  $y$  in der Form  $z = F(x_1, \dots, x_n)$  und  $x_1 \dots x_n \neq 0$  darstellbar sind? Positive Antwort in ein paar Einzelbeispielen.

M. Eichler.

Griffiths, L. W.: Universal functions of polygonal numbers. II. Amer. J. Math. 66, 97—100 (1944).

Griffiths, L. W.: Universal functions of polygonal numbers. III. Amer. J. Math. 67, 443—449 (1945).

Verf. führt frühere Überlegungen weiter [s. Teil I. Ann. of Math., II. Ser. 31, 1—12 (1930); vgl. auch dies. Zbl. 6, 100; 26, 100, wo Verf. verallgemeinerte Polygonalzahlen untersucht]. Unter Polygonalzahlen der Ordnung  $m + 2$  versteht Verf. die Menge  $\mathfrak{P}_m$

aller Zahlen der Form  $p(x) = x + m \binom{x}{2}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ . Beifügen  $1 \leq a_1, a_2, \dots, a_n$

heißt die Funktion  $f = \sum_{i=1}^n a_i p(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  universell, wenn sich alle ganzen Zahlen durch  $f$  darstellen lassen. Sei  $w = a_1 + \dots + a_n$ . In II wird  $w = m + 3$ , in III ferner  $w = m + 4$ ,  $m \geq 3$  untersucht ( $w \leq m + 3$  war in I behandelt worden). Verf. gibt Bedingungen für die  $a_i$ , so daß  $f$  universell ist. In einigen Fällen gelang es nur, zu zeigen, daß bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen alle natürlichen Zahlen darstellbar sind. Da sich die hinreichenden Bedingungen für die  $a_i$  stets erfüllen lassen, ergibt sich noch die — schwächere — Aussage, daß  $\mathbb{N}_m$  stets Basis (im Sinne der additiven Zahlentheorie) von einer Ordnung  $\leq m + 3$  ist (Spezialfall des Kanke-Waringschen Problems). *H.-H. Ostmann.*

**Salzer, Herbert E.:** On numbers expressible as the sum of four tetrahedral numbers. J. London math. Soc. **20**, 3—4 (1945).

Verf. teilt Resultate numerischer Untersuchungen hinsichtlich der Menge aller Tetraederzahlen (Pyramidalzahlen)  $n = \binom{x+2}{3}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$  mit: Von den ersten 200 Tetraederzahlen ist jede selbst Summe von 2, 3 oder 4 Tetraederzahlen; ferner: die ersten 200 Dreieckszahlen sind mit einer Ausnahme Summen von höchstens vier Tetraederzahlen — 153 benötigt fünf Stück. Die Vermutung, daß die Menge aller Tetraederzahlen die Basisordnung fünf hat, wird für alle  $n \leq 1000$  bestätigt. *H.-H. Ostmann.*

**Richmond, H. W.:** Notes on a problem of the „Waring“ type. J. London math. Soc. **19**, 38—41 (1944).

Bezüglich der Basisordnung der im vorstehenden Referat besprochenen Tetraederzahlen untersucht Verf. die Vielfachen von 5 im Bereich unterhalb 20000; es folgt, daß jede ganze Zahl höchstens sechs Tetraederzahlen benötigt. In keinem der vom Verf. nachgeprüften Fälle waren jedoch genau sechs Tetraederzahlen erforderlich. Verf. vermutet daher, daß der Satz von Dickson, demzufolge die asymptotische Basisordnung  $\leq 8$  ist, verbessert werden kann. *H.-H. Ostmann.*

**Noguera, Rodrigo:** Der Goldbach-Waringsche Satz. Bol. mat. **13**, 224—228 (1940) [Spanisch].

**Buchstab, A.:** On an additive representation of integers. Mat. Sbornik, n. Ser. **10** (52), 87—91 (1942) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

In Anlehnung an das Goldbachsche Problem untersucht Verf. unter Anwendung von Siebmethoden Zerlegungen gerader Zahlen in der Gestalt  $2n = p + n'$ ,  $p$  Primzahl, wobei die Primteiler von  $n'$  unterhalb einer von  $n$  abhängigen Schranke liegen sollen. Es wird bewiesen, daß  $\log^2 n$  für jedes  $\lambda > 0$  eine solche Schranke für alle genügend großen  $n$  darstellt. Die Anzahl derartiger Zerfällungen ist  $\leq c n / (\log n \log \log n)$ ,  $c > 0$ . Bezüglich des Zwillingproblems beweist Verf. die Existenz unendlich vieler Primzahlen  $p$ , so daß die Primteiler von  $p + 2$  ebenfalls unterhalb von  $\log^2 p$  ( $\lambda > 0$  beliebig) liegen. [Hinsichtlich einer Verschärfung s. Rényi (dies. Zbl. **30**, 345).] *H.-H. Ostmann.*

**Niven, Ivan:** An unsolved case of the Waring problem. Amer. J. Math. **66**, 137—143 (1944).

Es bezeichne  $g(n)$  ( $< \infty$ ) die — nach Hilbert stets existierende — Basisordnung der Menge  $3^{(n)}$  aller  $n$ -ter Potenzen. Weiter sei  $q = \lfloor (3/2)^n \rfloor$ ,  $r = 3^n - 2^n q$  (also  $0 < r < 2^n$ ).  $I(n) = 2^n - q - 2$ . Man sieht unschwer, daß  $2^n q - 1$  genau  $I(n)$  Summanden aus  $3^{(n)}$  benötigt. Man vermutet  $g(n) = I(n)$ . Nach Dickson (dies. Zbl. **8**, 5; **13**, 391; **14**, 251) gilt  $g(n) = I(n)$ , wenn  $r \leq 2^n - q - 3$  und  $n > 6$  ist; ferner, daß die Fälle  $r = 2^n - q - 1$ ,  $r = 2^n - 3$ ,  $r = 2^n - 1$  unmöglich sind. Nach Rubugunday [J. Indian math. Soc., n. Ser. **6**, 192—198 (1942)] ist

auch  $r = 2^n - q$  unmöglich. Und schließlich sind nach Dickson, sofern der Fall  $r > 2^n - q$  überhaupt möglich ist, in diesem Fall mehr als  $I(n)$  Summanden erforderlich, und Dickson gibt deren Anzahl auch genau an. Offen blieb der Fall  $r = 2^n - q - 2$ . Verf. beweist, daß auch in diesem Fall  $g(n) = I(n)$  ist [für  $n = 6$  gilt nach Pillai (dies. Zbl. 25, 306)  $g(6) = I(6) = 73$ ]. *H.-H. Ostmann.*

**Niven, Ivan:** A note on the number theory of quaternions. Duke math. J. 13, 397—400 (1946).

Verf. zeigt, daß jede Hurwitz-Quaternion Summe von drei Hurwitz-Quaternionenquadraten ist; dagegen für Lipschitzquaternion gilt das Entsprechende genau dann, wenn sie von der Form  $a + 2a_1 i + 2a_2 j + 2a_3 k$  ist. Mehr läßt sich allgemein nicht aussagen, da beispielsweise  $q = 2$  in beiden Fällen nicht Summe zweier Quaternionenquadrate ist. *H.-H. Ostmann.*

**Brauer, Alfred:** A theorem of M. Bauer. Duke math. J. 13, 235—238 (1946).

M. Bauer [J. reine angew. Math. 31, 265—267 (1906)] bewies: Das ganzzahlige Polynom  $f(x)$  habe mindestens eine reelle Wurzel in ungerader Vielfachheit. Wenn fast alle Primteiler von  $f(x)$  die Form  $kz \pm 1$ ,  $k \geq 3$ , haben, dann sind bereits unendlich viele Primteiler  $\equiv -1(k)$ . Nach I. Schur [S. B. Berl. math. Ges. 11, 40—50 (1912)] ist überdies die Voraussetzung bzgl. der Vielfachheit der Nullstelle entbehrlich. Verf. beweist die folgende Verallgemeinerung: Es sei  $\mathcal{G}_k$  die Gruppe aller relativ primen Restklassen mod  $k$ ,  $\mathfrak{H}$  eine Untergruppe, in der die Klasse  $-1 \pmod{k}$  nicht enthalten ist. Ist dann  $f(x)$  ein ganzzahliges Polynom mit mindestens einer reellen Nullstelle, so besitzt  $f(x)$  unendlich viele Primteiler, die in keiner Klasse von  $\mathfrak{H}$  liegen. — Dies umfaßt wegen  $1 \pmod{k} \in \mathfrak{H}$  offenbar oben genanntes Ergebnis. Da ferner  $-1$  quadratischer Nichtrest mod  $q$  [ $q$  Primzahl  $\equiv 3 \pmod{4}$ ] ist, folgt sofort weiter, daß diese Polynome unendlich viele Primteiler besitzen, die quadratische Nichtreste sind. In Hinblick auf die ungelöste Frage, ob Polynome existieren, so daß fast alle Primteiler zur selben Restklasse  $l \pmod{k}$ ,  $l \not\equiv 1(k)$  gehören, beweist Verf.: Sei  $k$  von der Form  $2^2, 2^\beta P, Q$  oder  $2Q$ , wobei  $\beta \geq 2$ ,  $3 \nmid Q$  und  $P, Q$  Produkte paarweise verschiedener Fermat- (Gauß-)scher Primzahlen sind. Wenn von  $f(x)$  (wie zuvor definiert) fast alle Primteiler zur selben Restklasse  $l \pmod{k}$  gehören, so ist notwendig  $l \equiv -1(k)$ . Dies ergibt sich daraus, daß genau für diese  $k$  die Klasse  $-1 \pmod{k}$  keine Potenz anderer Restklassen ist. Die Beweise sind elementar. *H.-H. Ostmann.*

**Brauer, Alfred:** A problem of additive number theory and its application in electrical engineering. J. Elisha Mitchell sci. Soc. 61, 55—66 (1945).

Die (der Praxis entnommene) Aufgabe, einen speziellen elektrischen Widerstand von 30 Ohm zu konstruieren, führte auf die Frage nach der kleinsten Anzahl  $k = k(30)$  von ganzen Zahlen (Kontaktpunkten)  $0 \leq a_1 < \dots < a_k \leq 30$ , so daß die Gesamtheit aller Differenzen  $a_i - a_j$  alle Zahlen von 0 bis 30 umfaßt. Verf. beweist  $k(30) = 10$ . Die Methode des Verf. läßt sich auch auf Zahlen  $n \neq 30$  verallgemeinern. Dem Beweis liegen Methoden von Rohrbach (dies. Zbl. 15, 200) über Minimal- und Differenzbasen des Intervalls  $[0, n]$  zugrunde.

*H.-H. Ostmann.*

**Gillis, J.:** Sequences of positive integers. J. London math. Soc. 21, 93—98 (1946).

$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$  sei eine unendliche Folge von Mengen positiver ganzer Zahlen. Für eine beliebige Menge  $\mathfrak{M}$  bezeichne  $\mu = \delta^*(\mathfrak{M}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (M(x)/x)$  die asymptotische Dichte,  $\bar{\delta}^*(\mathfrak{M}) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} (M(x)/x)$  die obere asymptotische Dichte von  $\mathfrak{M}$  [ $M(x)$  ist die Anzahl der Elemente  $\leq x$ ]. Verf. beweist: Ist für ein gewisses  $\lambda > 0$  bezüglich obiger Mengenfolge  $\lim_{k=1,2,\dots} (k^{1/\lambda} / \sum_{n=1}^k \mu_n) = 0$ , so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Mengen



$\mathfrak{M}_{n_1}, \mathfrak{M}_{n_2}, \dots, \mathfrak{M}_{n_\lambda}$  ( $n_i \neq n_j$  für  $i \neq j$ ) in der Folge, so daß

$$(1) \quad \bar{\delta}^* \left( \bigcap_{k=1}^{\lambda} \mathfrak{M}_{n_k} \right) > \mu_{n_1} \mu_{n_2} \dots \mu_{n_\lambda} (1 - \varepsilon)$$

ist. Der Beweis verläuft elementar. Die Voraussetzung des Satzes ist offenbar dann für jedes ganze  $\lambda \geq 0$  erfüllt, wenn die Zahlen  $\mu_n$  eine positive untere Schranke besitzen:  $\mu_n \geq \mu > 0$  für alle  $n$ . In diesem Fall gilt daher (2)  $\bar{\delta}^* \left( \bigcap_{k=1}^{\lambda} \mathfrak{M}_{n_k} \right) > \mu^\lambda - \varepsilon$  (mit von  $\varepsilon > 0$  abhängigen  $\mathfrak{M}_{n_1}, \dots, \mathfrak{M}_{n_\lambda}$ ). Mit Hilfe eines kombinatorischen Satzes beweist Verf. in diesem Fall noch die Existenz einer unendlichen, von  $\varepsilon$  abhängigen Teilfolge der gegebenen Mengenfolge derart, daß für beliebige  $\lambda$  Mengen dieser Teilfolge (2) gilt. An Hand eines Beispiels, in dem die Mengen  $\mathfrak{M}_n$  paarweise elementfremd sind, für die aber  $\delta^*(\mathfrak{M}_n) = 1$  für alle  $n$  ist, zeigt Verf., daß in (1) rechter Hand die  $\mu_i$  nicht durch die  $\delta^*(\mathfrak{M}_i)$  ersetzbar sind. S. hierzu auch Ostmann, Additive Zahlentheorie Bd. II. Berlin 1956, insbes. S. 6 das Beispiel von E. Wirsing.  
H.-H. Ostmann.

Selberg, Sigmund: Note on a metrical problem in the additive theory of numbers. Arch. Math. Naturvid. 48, 111—118 (1944).

Sind  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen,  $0 \in \mathfrak{A}$ ,  $\{0, 1\} \subset \mathfrak{B}$ , ist ferner  $\delta(\mathfrak{A}) = \alpha$  die (Schnirelmann-) Dichte von  $\mathfrak{A}$ , so heißt bekanntlich  $\mathfrak{B}$  wesentliche Komponente, wenn für alle  $\mathfrak{A}$  mit  $0 < \delta(\mathfrak{A}) < 1$  folgt, daß  $\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) > \alpha$  ist. Nach Erdős sind bekanntlich alle Basen endlicher Ordnung wesentliche Komponenten, und es gilt  $\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geq \alpha + (\alpha - \alpha^2)/2h$ , wenn  $h$  die Basisordnung ist. Nach Landau läßt sich  $h$  durch die — auf A. Stöhr zurückgehende — mittlere Ordnung  $\tilde{h} = \overline{\lim}_{x \geq 1} \frac{1}{x} \sum_{m=1}^x l(m)$  [ $l(m) \geq 1$  bedeutet die Minimalanzahl von Summanden, die zur Darstellung von  $m$  durch Summanden aus  $\mathfrak{B}$  benötigt werden] ersetzen; und nach Stöhr sind die Mengen endlicher mittlerer Ordnung auch wieder nur die Basen endlicher Ordnung. Hierfür gibt Verf. einen kurzen Beweis. Ferner beweist Verf.  $\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geq \alpha + [3(\alpha - \alpha^2)]/4\tilde{h}$ , was für  $1 > \alpha > \frac{1}{9}$  besser ist als die von A. Brauer angegebene Verschärfung des Erdős-Resultats:  $\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geq \alpha + (\alpha - \alpha\sqrt{\alpha})/\tilde{h}$ .  
H.-H. Ostmann.

Basoco, M. A.: On certain arithmetical functions due to G. Humbert. Bull. Amer. math. Soc. 50, 547—555 (1944).

Als Lösung inhomogener Differenzengleichungen kann die erzeugende Funktion  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2-n}}{1-q^{2n}} \sin 2\pi n z$  aus elliptischen  $\vartheta$ -Funktionen gebildet werden. Nach steigenden Potenzen von  $q$  geordnet liefern die Beiwerte Abzählungen wie die Zerlegungsanzahl natürlicher Zahlen in 5 Quadrate.  
W. Maier.

Drach, Jules: Sur quelques points de théorie des nombres et sur la théorie générale des courbes algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 729—732 (1945).

Für Dreiecks- und Quadratzahlen Beweise der bekannten Darstellbarkeitsätze: Zerfällungen in drei Dreieckszahlen, in zwei, drei oder vier Quadrate. — Ferner wird bei Vorliegen gewisser spezieller Singularitäten eine Klassifikation der entsprechenden algebraischen Kurven diskutiert.  
H.-H. Ostmann.

James, R. D.: On the sieve method of Viggo Brun. Bull. Amer. math. Soc. 49, 422—432 (1943).

Hinsichtlich des Ausbaus der Brunschen Siebmethode durch Rademacher [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 3, 12—30 (1923)], Estermann (dies. Zbl. 14, 251) und Buchstab (dies. Zbl. 22, 113; 24, 292) knüpft Verf. im wesentlichen an Buchstab an. Als Anwendung seiner Verall-

gemeinerungen beweist Verf. u. a.: Jede hinreichend große Zahl  $x \equiv 2 \pmod{4}$  läßt sich stets als Summe zweier ganzer positiver Zahlen darstellen, die entweder höchstens sechs Primfaktoren und zwar sämtlich  $\equiv 1 \pmod{4}$  besitzen, oder aber genau zwei Primfaktoren  $\equiv 3 \pmod{4}$  und höchstens drei Primfaktoren  $\equiv 1 \pmod{4}$  (nach Buchstab s. o. läßt sich jede hinreichend große gerade Zahl als Summe von zwei Summanden darstellen, deren jeder höchstens vier Primfaktoren besitzt).

*H.-H. Ostmann.*

**Ijzeren, J. van:** Elementare Eigenschaften der Partitionen natürlicher Zahlen. *Mathematica, Zutphen B 12*, 115—118 (1943) [Holländisch].

Zur Einführung in die grundlegenden Eigenschaften der „Partitionen“ (Darstellungen als Summen natürlicher Zahlen) werden für ganze  $n$  und  $k > 0$  die Partitionen der Zahl  $n$  mit  $k$  als größtem Summanden den Partitionen der Zahl  $n$  mit genau  $k$  Summanden eineindeutig zugeordnet, ebenso die Partitionen von  $n$  mit  $k$  als kleinsten Summanden denjenigen Partitionen von  $n$ , in denen der jeweilige größte Summand genau  $k$ -fach auftritt. Die gemeinsame Anzahl wird im ersten Fall mit  $p\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$ , im zweiten mit  $p\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$  bezeichnet. Stets ist  $p\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$  gleich der Gesamtzahl aller Partitionen von  $n$ . Bewiesen wird, daß  $p\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right) = p\left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix}\right) + p\left(\begin{smallmatrix} n-k \\ k \end{smallmatrix}\right)$

(für  $k > 1$ ) und  $p\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] = p\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix}\right] + p\left[\begin{smallmatrix} n-k \\ k \end{smallmatrix}\right]$  ist. Mittels dieser Rekursionsformeln werden die Werte von  $p\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$  für  $n \leq 20$  und die von  $p\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$  für  $n \leq 21$  in Tabellen zusammengestellt.

*W. Weber.*

**Kloosterman, H. D.:** Zerlegungen. *Euclides, Groningen 21*, 67—77 (1946) [Holländisch].

Die Arbeit gibt den Inhalt eines Vortrages wieder, in dem Verf. über die Funktion  $p(n)$ , die Anzahl aller Partitionen von  $n$  referiert. *H.-H. Ostmann.*

**Loria, Gino:** Sulla scomposizione di un intero nella somma di numeri poligonal. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1*, 7—15 (1946).

Methodisches zur Anlegung von Tabellen bez. der Partitionen in höchstens vier Quadratzahlen; auf Dreiecks- und Pentagonalzahlen wird ebenfalls eingegangen.

*H.-H. Ostmann.*

**Wall, H. S.:** A continued fraction related to some partition formulas of Euler. *Amer. math. Monthly 48*, 102—108 (1941).

A number of identities in the theory of partitions are derived by means of a continued fraction.

*E. Frank.*

**Todd, J. A.:** A table of partitions. *Proc. London math. Soc., II. Ser. 48*, 229—240 (1943).

Tafel für die Anzahl  $p(n, m)$  der Zerlegungen der positiven ganzen Zahl  $n$  in eine Summe von  $m$  positiven ganzen Summanden und zwar für  $n \leq 100$  und beliebiges  $m$ .

*H. D. Kloosterman.*

**Rademacher, Hans:** On the expansion of the partition functions in a series. *Ann. of Math., II. Ser. 44*, 416—422 (1943).

Vereinfachter Beweis für die Gültigkeit der bekannten unendlichen Reihe des Verf. für die Anzahl  $p(n)$  der Zerlegungen der positiven ganzen Zahl  $n$  in positive ganze Summanden (dies. Zbl. 17, 55) durch Benutzung eines modifizierten Integrationsweges, der aus einer Anzahl von Kreisbögen besteht. Daß diese Kreisbögen einander berühren, folgt aus einem Satze von Ford über Farey-Reihen (dies. Zbl. 19, 395).

*H. D. Kloosterman.*

**Rademacher, Hans:** The Ramanujan identities under modular substitutions. *Trans. Amer. math. Soc. 51*, 609—636 (1942).

**Lehner, Joseph:** Ramanujan identities involving the partition function for the moduli 11. *Amer. J. Math. 65*, 492—520 (1943).

Durch Anwendung einer Modulsstitution in  $\tau$  auf die Identität von Ramanujan [ $p(n)$  ist die Anzahl der unbeschränkten Partitionen von  $n$ ]

$$(1) \quad \sum_{l=0}^{\infty} p(5l+4) x^l = 5 \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^{5m})^5 (1 - x^m)^{-6} \quad (x = e^{2\pi i \tau})$$

findet Rademacher die neue Identität

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^{25n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5}\right) p(n-1) x^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^{5m})^5 (1 - x^m)^{-6}.$$

Die angewandte Methode kann auch zum Beweise von (1) benutzt werden. Verf. betrachtet auch ähnliche Identitäten für Potenzreihen mit den Koeffizienten  $p(7l+6)$ ,  $p(13l+6)$ ,  $p(25l+24)$ ,  $p(49l+47)$  und kommt überdies zu gewissen Modulargleichungen, die auf die Identitäten ein neues Licht werfen.

Lehner findet eine ähnliche Identität für  $\sum_{n=0}^{\infty} p(11n+6) x^{n+1}$  und beweist damit die Ramanujansche Vermutung  $p(n) \equiv 0 \pmod{q^2}$ , falls  $24n \equiv 1 \pmod{q^2}$  für  $q = 11$ ,  $x = 1$ . Ohne vollständige Bestimmung einer entsprechenden Identität für  $q = 11$ ,  $x = 2$  gelingt es ihm trotzdem, in diesem Falle auch die Ramanujansche Vermutung zu beweisen.

H. D. Kloosterman.

Lehmer, D. H.: Two nonexistence theorems on partitions. Bull. Amer. math. Soc. 52, 538—544 (1946).

Der Koeffizient  $q_d(n)$  von  $x^n$  in der Potenzreihenentwicklung von  $\sum_{s=0}^{\infty} x^{s+\frac{1}{2}+ks-1} \{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^s)\}^{-1}$  ist die Anzahl der Zerlegungen von  $n$  in positive ganze Summanden, die zu je zweien wenigstens die Differenz  $d$  haben. Wenn man: a) die Summanden von  $n$  auf eine Menge  $S$  von positiven ganzen Zahlen beschränkt und  $d > 2$ , oder: b) die Summanden von  $n$  auf lauter verschiedene Zahlen von  $S$  beschränkt und  $d \neq 1$ , so ist die Anzahl der Partitionen nicht für alle  $n$  gleich  $q_d(n)$ .

H. D. Kloosterman.

(1) Lehner, Joseph: A partition function connected with the modulus five. Duke math. J. 8, 631—655 (1941).

(2) Livingood, John: A partition function with the prime modulus  $P > 3$ . Amer. J. Math. 67, 194—208 (1945).

Konvergente Reihen für die Anzahlen  $p_a(n)$  der Zerlegungen der positiven ganzen Zahl  $n$  in positive Summanden  $\equiv \pm a \pmod{p}$  [ $a = 1, 2, \dots, (p-1)/2$ ], wo  $p$  eine gegebene Primzahl  $> 3$  ist. (1) behandelt nur den Fall  $p = 5$ . Die Reihen (sowie auch die Beweismethoden) sind ähnlich denjenigen, welche H. Rademacher für die Fourierkoeffizienten der absoluten Invariante  $J(\tau)$  aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen gegeben hat (dies. Zbl. 18, 246).

H. D. Kloosterman.

Schoenfeld, Lowell: A transformation formula in the theory of partitions. Duke math. J. 11, 873—887 (1944).

Transformationsformel für die Funktion ( $k$  ganz  $\geq 1$ )

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^{mk})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_k(n) x^n,$$

wo  $p_k(n)$  also die Anzahl der Zerlegungen von  $n$  in eine Summe von positiven  $k$ -ten Potenzen ist. Der Beweis ist einfacher als der von Wright (dies. Zbl. 9, 300) und benutzt das Mellinsche Integral in ähnlicher Weise, wie der Beweis von Rademacher (dies. Zbl. 3, 351) für den Fall  $k = 1$ .

H. D. Kloosterman.

(1) Ziaud Din, M.: On formulae in partitions and divisors of a number, derived from symmetric functions. Proc. nat. Acad. Sci. India, Sect. A 13, 221—224 (1943).



(2) Simons, William H.: Congruences involving the partition function  $p(n)$ . Bull. Amer. math. Soc. 50, 883—892 (1944).

(3) Lahiri, D. B.: On a type of series involving the partition function with applications to certain congruence relations. Bull. Calcutta math. Soc. 38, 125—132 (1946).

(4) Lahiri, D. B.: On Ramanujan's function  $\tau(n)$  and the divisor function  $\sigma_k(n)$ . I. Bull. Calcutta math. Soc. 38, 193—206 (1946).

(5) Bambah, R. P.: Two congruence properties of Ramanujan's function  $\tau(n)$ . J. London math. Soc. 21, 91—93 (1946).

(6) Gupta, Hansraj: A congruence property of  $\tau(n)$ . Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 24, 441—442 (1946).

(7) Gupta, Hansraj: A note on the parity of  $p(n)$ . J. Indian math. Soc., n. Ser. 10, 32—33 (1946).

Identitäten und Kongruenzen für die zahlentheoretischen Funktionen  $p(n)$  (Anzahl der Zerlegungen der positiven ganzen Zahl  $n$  in positive ganze Summanden),  $\sigma_k(n)$  [Summe der  $k$ -ten Potenzen der positiven Teiler von  $n$ ;  $\sigma_1(n) = \sigma(n)$ ] und  $\tau(n)$  [Koeffizient von  $x^n$  in der Potenzreihe für  $x / \prod (1 - x^n)^{24}$ ];  $n$  durchläuft hier und im folgenden alle positiven ganzen Zahlen. Resultate:

$$(1): \sigma(n) = p(n-1) + 2p(n-2) - 5p(n-5) - 7p(n-7) \dots;$$

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) \dots;$$

$$n p(n) = \sigma(n) + p(1)\sigma(n-1) + p(2)\sigma(n-2) + \dots + p(n-1)\sigma(1).$$

Beweise umständlich und nicht einwandfrei [Bem. d. Ref.: Die Resultate folgen unmittelbar durch logarithmische Differentiation von  $\prod (1 - x^n)^{-1} = 1 - \sum p(n) x^n = (1 - x - x^2 + x^5 + x^7 \dots)^{-1}$ ]. (2): Kongruenzen modulo 13 und 17, welche den Kongruenzen modulo 5, 7 und 11 von Ramanujan [Collected papers, Cambridge 1927, S. 232] analog sind. Modulo 13 gilt z. B.: Der Koeffizient  $p(n-7) - p(n-176) -$

$p(n-345) \dots$  von  $x^n$  in  $x^7 \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m x^{169m(3m-1)/2} \right\} \cdot \{1 + \sum p(n) x^n\}$  ist  $\equiv -2 \sum_{m=0}^{13n} \sigma_5(m) \sigma_5(13n-m) \pmod{13}$ . (3):  $1^r p(n-1) + 2^r p(n-2) - 5^r p(n-5) -$

$7^r p(n-7) \dots$  [Zahlen 1, 2, -5, -7, ... wie in (1)] ist für  $1 \leq r \leq 5$  eine lineare Kombination von  $\sigma_{2k+1}(n)$  ( $k=0, 1, \dots, r-1$ ) mit Polynomen  $k$ -ten Grades in  $n$  als Koeffizienten. Für die Summe  $I_{am+b}$  von denjenigen Gliedern  $\pm p(n-r)$  aus der Reihe  $p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) \dots$ , für die  $r$  die Form  $am+b$  hat, folgt dann für  $a=2, 3, 4, 5, 7, 11$ ;  $b=0, 1, \dots, a-1$  eine Kongruenz modulo  $a$  mit einer linearen Kombination von gewissen  $\sigma_r(n)$  und mit Polynomen in  $n$  als Koeffizienten. Aus diesen Kongruenzen folgen unmittelbar die Kongruenzen  $p(5m+4) \equiv 0 \pmod{5}$ ,  $p(7m+5) \equiv 0 \pmod{7}$ ,  $p(11m+6) \equiv 0 \pmod{11}$  von Ramanujan. (4): Durch systematische Durchführung einer Methode von Ramanujan werden 89 Kongruenzen bewiesen, wie z. B.

$$\sigma_{13}(n) \equiv 11\sigma_9(n) + 22\sigma_7(n) - 32\sigma_3(n) \pmod{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}.$$

(5): Falls  $n = 2^m k$ ,  $k$  ungerade, ist  $\tau(n) \equiv 2^{3m} \sigma_3(k) \pmod{32}$ ; für alle ganze positive  $n$  ist  $\tau(n) \equiv n \sigma_9(n) \pmod{25}$ . (6): Elementarer Beweis von  $\tau(n) \equiv n \sigma_3(n) \pmod{7}$  [s. auch J. R. Wilton, Proc. London math. Soc., II. Ser. 31, 1—10 (1930)]. (7):  $p(n) \equiv \sum p(t) \pmod{2}$ , wo summiert wird über alle positive ganze  $t$  von der Form  $\frac{1}{8}(2n - i^2 - i)$ ,  $i \geq 0$ .

H. D. Kloosterman.

Ikehara, Shikao: On Kalmár's problem in „Factorisatio Numerorum“. II. Proc. phys.-math. Soc. Japan, III. Ser. 23, 767—774 (1941).

Teil I besprochen in dies. Zbl. 21, 208. Es sei  $k(n)$  die Anzahl der Zerlegungen der positiven ganzen Zahl  $n$  in ein Produkt von Faktoren  $> 1$  (zwei Zerlegungen gelten nur dann als identisch, wenn sie dieselben Faktoren in derselben Reihen-

folge enthalten). Die früher vom Verf. gefundene Abschätzung (dies. Zbl. **21**, 208) von  $F(n)$  in  $\sum_{m=1}^n k(m) = \frac{n^e}{e^2 \zeta'(e)} + n^e F(n)$  [ $e$  ist die positive Wurzel von  $\zeta(s) = 2$ ] wird zu  $F(n) = O\{\exp[-\alpha(\log \log n)^2]\}$  verschärft, wo  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ,  $\gamma^{-1} = \frac{3}{4} + \varepsilon$ . H. D. Kloosterman.

Salem, R. and D. C. Spencer: On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **28**, 561—563 (1942).

Es sei  $r(N)$  die Maximalzahl von Elementen, die eine Menge  $S$  von nicht-negativen ganzen Zahlen  $\leq N$  enthalten kann, wenn  $S$  keine arithmetische Progression von drei Gliedern enthält. Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist dann  $r(N) > N^{1-(\log 2 + \varepsilon)/\log \log N}$ . Es existiert also kein  $\alpha < 1$  derart, daß  $r(N) = O(N^\alpha)$ . H. D. Kloosterman.

Behrend, F. A.: On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **32**, 331—332 (1946).

Nach v. d. Waerden gilt: Teilt man die Menge der natürlichen Zahlen beliebig in  $k \geq 1$  Klassen, so gibt es in mindestens einer Klasse arithmetische Folgen beliebiger Länge. Im Zusammenhang hiermit untersucht Verf. (vgl. auch Verf., dies. Zbl. **19**, 150) für festes  $n > 0$  die maximale Anzahl  $r(n)$  ganzer in  $\langle 0, n \rangle$  gelegener Zahlen, die keine arithmetische Folge von drei Gliedern enthalten. Es wird  $r(n) > n^{1-c/\sqrt{\log n}}$  bewiesen (vgl. Salem-Spencer, dies. Zbl. **39**, 274). H.-H. Ostmann.

Thébault, Victor: Sur les nombres premiers impairs. *C. r. Acad. Sci., Paris* **218**, 223—224 (1944).

Brun, Viggo: Die Primzahlen von der Antike bis zur Gegenwart. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **15**, 16 S. (1942) [Norwegisch].

Giuga, G.: Sopra alcune proprietà caratteristiche dei numeri primi. *Periodico Mat.*, IV. Ser. **23**, 12—27 (1943).

Archibald, Ralph G.: Bertrand's postulate. *Scripta math.* **11**, 109—120 (1945).

Bouligand, Georges: Notions sur la répartition des nombres premiers. *Revue sci.* **78**, 333—344 (1940).

Kryloff, Nicolas: Sur une propriété des suites particulières de nombres premiers impairs. *C. r. Acad. Sci., Paris* **223**, 966—967 (1946).

● Lehmer, D. N.: Factor stencils. Revised and extended by John D. Elder. Washington: Carnegie Institution of Washington 1939. 27 p., 2135 stencils. (Not for sale.)

Roussel, A.: Sur une application d'un principe d'extremum à certaines questions d'arithmétique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **217**, 496—497 (1943).

Kostandi, G.: Primzahlen der Form  $kx \pm 1$ . *Bull. math. Soc. Roumaine Sci.* **44**, 21—34 (1942).

Linteş, I.: Sätze über die Verteilung der Primzahlen. *Revista mat. Timişoara* **23**, 137—139 (1943) [Rumänisch].

Tietze, Heinrich: Einige Tabellen zur Verteilung der Primzahlen auf Untergruppen der teilerfremden Restklassen nach gegebenem Modul. *Abh. Bayer. Akad. Wis., math.-naturw. Abt., n. Folge* Nr. **55**, 31 S. (1944).

$H$  sei die Gruppe der zum Modul  $m$  teilerfremden Restklassen,  $I'$  eine Untergruppe von  $H$  vom Index  $i$ .  $\pi_H(N)$  und  $\pi_{I'}(N)$  seien die Anzahlen der Primzahlen aus  $H$  und  $I'$ , die  $\leq N$  sind. In 26 Tabellen werden für die Moduln 8, 9, 10, 26, 30, 262 in gewissen  $N$ -Bereichen die Funktionen  $\pi_H(N)$ ,  $i\pi_{I'}(N)$  und insbesondere  $\Delta(N) = \pi_H(N) - i\pi_{I'}(N)$  wiedergegeben. B. Schoeneberg.

Brauer, Alfred: On the exact number of primes below a given limit. *Amer. math. Monthly* **53**, 521—523 (1946).

Kurzer Beweis einer von E. Meissel [Math. Ann. Bd. **2**, 636—642 (1870); **3**, 523—525 (1871); **25**, 251—257 (1885)] aufgestellten und für die numerische Berechnung von  $\pi(x)$  praktischen Formel. B. Schoeneberg.

Vinogradov, I.: Analytical theory of numbers. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **9**, 159—168 (1945) [Russisch und Englisch].

This article gives an account about the outstanding contributions of the Russian school of the analytical theory of numbers. Euler, Chebyshev and Voronoi are mentioned. In particular the author asserts that Voronoi's work related to his own first research. A survey of the evolution of his creative method concerning estimation of trigonometrical sum is given. It contains also some results of his pupils, namely that concerning the distribution of primes of Chudakoff and that concerning the distribution of primes in the arithmetical progression of Linnik.

L.-K. Hua.

Lehmer, D. H.: Ramanujan's function  $\tau(n)$ . *Duke math. J.* **10**, 483—492 (1943).

Tafel der Koeffizienten  $\tau(n)$  in der Entwicklung  $x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n$  für  $n \leq 300$ . Die Arbeit gibt weiter noch den Wert  $\alpha = 0,0320047918814 \dots$  der nach Rankin (dies. Zbl. **21**, 392) existierenden Konstanten  $\alpha$  derart, daß  $\sum_{v \leq n} [\tau(v)]^2 \sim \alpha n^{12}$ , sowie einige numerische Angaben über die summatorische Funktion  $\sum_{v=1}^n \tau(v)$ .

H. D. Kloosterman.

Venkataraman, C. S.: A new identical equation for multiplicative functions of two arguments and its applications to Ramanujan's sum  $C_M(N)$ . *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **24**, 518—529 (1946).

Jede multiplikative zahlentheoretische Funktion  $f(m, n)$  [für  $(m_1, n_1, m_2, n_2) = 1$  ist  $f(m_1, n_1) f(m_2, n_2) = f(m_1 m_2, n_1 n_2)$ ] läßt sich darstellen als  $f(m, 1) f(1, n) * C(m, n)$  wo  $*$  die Faltung  $\sum f(d, 1) f(1, \delta) C(\frac{m}{d}, \frac{n}{\delta})$  (Summation über die positiven Teiler  $d$  von  $m$  und  $\delta$  von  $n$ ) ist und  $C(m, n)$  die Eigenschaft hat, daß  $C(m, 1)$  bzw.  $C(1, n)$  den Wert 1 hat, falls  $m = 1$  bzw.  $n = 1$  und sonst  $= 0$  ist. Anwendung auf die Ramanujanschen Summen.

H. D. Kloosterman.

Ramaswami, V. and K. Sambasiva Rao: On the probability that two  $k$ th power-free integers belonging to an assigned arithmetic progression should be prime to one another. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* **9**, 88—92 (1945).

Kössler, M.: Über ein Teilerproblem. *Věstník Královské české společnosti Nauk, Třída mat.-přirodověd.* **1943**, 18 S. (1943).

Peng, H. Y.: A result in divisor problem. *Sci. Record* **1**, 69—72 (1942).

Verschärfung der  $O$ -Abschätzung des Restgliedes  $R(x)$  in

$$\sum_{1 \leq n \leq x} (x - n) \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{12} \pi^2 x^2 - \frac{1}{2} x \log x - \frac{1}{2} (\gamma - 1 + \log 2\pi) x + R(x)$$

zu  $O(x^{2/7} \log x)$  [bekannt war  $O(x^{3/10})$  durch Walfisz, dies. Zbl. **14**, 150].

H. D. Kloosterman.

Sathe, L. G.: On a congruence property of the divisor function. *Amer. J. Math.* **67**, 397—406 (1945).

Für ganze  $k$  und  $r$  sei  $N(k, r, x)$  die Anzahl der positiven ganzen Zahlen  $n \leq x$ , für die  $d(n)$  (Anzahl der positiven Teiler von  $n$ )  $\equiv r \pmod{k}$  ist. Falls  $2^l$  die höchste in  $k$  aufgehende Potenz von 2 ist, so gibt es ein positives  $B = B(k, r)$  derart, daß (für  $x \rightarrow \infty$ )  $N(k, r, x) \sim Bx$  ist, falls  $2^l$  in  $r$  aufgeht, und es ist  $N(k, r, x) = o(x)$ , falls  $2^l$  nicht in  $r$  aufgeht. Falls  $p$  eine ungerade Primzahl ist und  $k = 2^l p$ ,  $r = 0$ , so ist  $B = 1 - \zeta(k)/\zeta(k-1)$ .

H. D. Kloosterman.

Hua, Loo-keng and Sze-hoa Min: An analogue of Tarry's problem. *Sci. Record* **1**, 26—29 (1942).



Asymptotische Formel für die Lösungszahl des Kongruenzsystems  $x_1^h + \dots + x_s^h \equiv y_1^h + \dots + y_s^h \pmod{p^n}$ ,  $h = 1, 2, \dots, k$ , wo  $p$  eine Primzahl  $> k$  ist,  $s \geq k \geq 2$ ,  $n \geq k^2$ .  
H. D. Kloosterman.

Titchmarsh, E. C.: Some problems in the analytic theory of numbers. Quart. J. Math., Oxford Ser. 13, 129—152 (1942).

Wendet man die Hardy-Littlewoodsche Kreismethode auf die Summen  $\sum_{u=1}^{\infty} d(u) d(u+r) e^{-2u\delta}$  ( $r \geq 0$  ganz,  $\delta > 0$ ) formal, d. h. ohne Abschätzung der Fehlerterme an, so erhält man die bekannten richtigen asymptotischen Formeln für  $\delta \rightarrow 0$ . Dagegen liefert diese Methode, auf  $\sum' d_3^2(u) e^{-2u\delta}$  angewandt, nicht den richtigen Wert, welchen der Verf. auf andere Weise herleitet, sondern nur den  $\frac{255}{256}$ -Teil. Andererseits liefert die Kreismethode den richtigen Wert für  $\sum d(u) d_3(u) e^{-2u\delta}$  und führt zur Vermutung, daß

$$\sum d_3(u) d_3(u+r) e^{-2u\delta} \sim K_1(r) \delta \log^4 \delta^{-1}$$

$$\text{bzw.} \quad \sum d_3(u) d(u+r) e^{-2u\delta} \sim K_2(r) \delta \log^3 \delta^{-1}$$

(Zur letzten Summe vergleiche auch Bellman, dies. Zbl. 37, 167.) E. Hlawka.

Wintner, Aurel: On an elementary analogue of the Riemann-Mangoldt formula. Bull. Amer. math. Soc. 48, 759—762 (1942).

Sei  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \exp(-2^n s)$ . Verf. beweist auf einfache Weise die folgende „explizite Formel“ für  $f$

$$f(s) \log 2 = s^{-1} \left( 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Gamma(k) \left( 1 + \frac{2\pi k i}{\log 2} \right) s^{-2\pi k i / \log 2} \right) - \log 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{2^{n+1} - 1} \frac{s^n}{n!},$$

die von Hardy als von Ramanujan stammend angegeben wurde. Es wird bemerkt, daß die Formel bereits von Dedekind herrührt. K. Prachner.

(1) ● Wintner, Aurel: Eratosthenian averages. Baltimore, Md.: 1943. V, 81 p.; \$ 2,25.

(2) Wintner, Aurel: The Lebesgue constants of Möbius' inversion. Duke math. J. 11, 853—867 (1944).

(3) Wintner, Aurel: Number-theoretical almost-periodicities. Amer. J. Math. 67, 173—193 (1945).

(4) Wintner, Aurel: A summation method associated with Dirichlet's divisor problem. Amer. J. Math. 66, 579—590 (1944).

(5) Wintner, Aurel: Square root estimates of arithmetical sum functions. Duke math. J. 13, 185—193 (1946).

(6) Wintner, Aurel: Eulerian products and analytic continuation. Duke math. J. 11, 277—285 (1944).

(7) Wintner, Aurel: Mean-values of arithmetical representations. Amer. J. Math. 67, 481—485 (1945).

(8) Wintner, Aurel: Random factorizations and Riemann's hypothesis. Duke math. J. 11, 267—275 (1944).

(9) Wintner, Aurel: The singularities in a family of zetafunctions. Duke math. J. 11, 287—291 (1944).

(10) ● Wintner, Aurel: The theory of measure in arithmetical semi-groups. Baltimore, Md.: 1944. V, 56 p.; \$ 2,25.

(11) Wintner, Aurel: The fundamental lemma in Dirichlet's theory of the arithmetical progressions. Amer. J. Math. 68, 285—292 (1946).

(12) Wintner, Aurel: A factorization of the densities of the ideals in algebraic number fields. Amer. J. Math. 68, 273—284 (1946).

(13) Wintner, Aurel: The values of the norms in algebraic number fields. Amer. J. Math. 68, 223—229 (1946).

(14) Wintner, Aurel: The densities of ideal classes and the existence of unities in algebraic number fields. Amer. J. Math. 67, 235—238 (1945).

(15) Wintner, Aurel: On the prime number theorem. Amer. J. Math. 64, 320—326 (1942).

(16) Wintner, Aurel: The distribution of primes. Duke math. J. 9, 425—430 (1942).

(17) Wintner, Aurel: On a statistics of the Ramanujan sums. Amer. J. Math. 64, 106—114 (1942).

(18) Wintner, Aurel: On an harmonic analysis of the irregularities in Goldbach's problem. Revista Ci. 45, 175—182 (1943).

(19) Wintner, Aurel: Prime divisors and almost periodicity. J. Math. Physics 21, 52—56 (1942).

(20) Wintner, Aurel: The behavior of Euler's product on the boundary of convergence. Duke math. J. 10, 429—440 (1943).

(21) Wintner, Aurel: Gibbs' phenomenon and the prime number theorem. Amer. J. Math. 67, 167—172 (1945).

(22) Wintner, Aurel: Riemann's hypothesis and almost periodic behavior. Revista Ci., Lima 41, 575—585 (1939).

(23) Wintner, Aurel: Riemann's hypothesis and harmonic analysis. Duke Math. J. 10, 99—105 (1943).

(24) Wintner, Aurel: On Dirichlet's divisor problem. Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 135—137 (1941).

(25) ● Wintner, Aurel: An arithmetical approach to ordinary Fourier series. Baltimore, Md.: 1945. 29 p.; \$ 1,20.

Bezeichnungen:  $f(n)$  — Funktion der natürlichen Zahl  $n$ ;  $f'(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) f(d)$ ;

f. p. ( $B^1$ ) — fastperiodisch ( $B^1$ ); FR — Fourierreihe;  $M(f)$  — Mittelwert der Funktion  $f$ , also  $M(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} (f(1) + \dots + f(n))$  für  $n \rightarrow \infty$ ;  $g(n)$  — eine multiplikative Funktion, d. h.  $g(nm) = g(n)g(m)$ , wenn  $(m, n) = 1$ ;  $\chi(n)$  — eine vollständig multiplikative Funktion, d. h.  $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$  für alle natürlichen  $n, m$ ;  $p$  — Primzahl; a)  $\zeta_g(s) = \sum g(n)n^{-s}$ ; b)  $P_g(s) = \prod_p (1 - \sum_{k=1}^{\infty} g(p^k)p^{-ks})$ ;

c)  $[\zeta_g(s)]^{-1} = \sum \mu_g(n)n^{-s}$ ;  $c_m(n) = \sum_{1 \leq l \leq m, (l, m)=1} \exp(2\pi i l n/m)$  die Ramanujansche Summe. Im folgenden wird  $g(n)$  in verschiedener Weise spezialisiert. Wenn

$\sum |f'(n)|/n < \infty$ , so ist  $f(n)$  f. p. ( $B$ ),  $M(f) = \sum f'(n)/n$ , und  $f$  hat die FR  $\sum_{m=1}^{\infty} a_m c_m(n)$ .

wo  $a_m = \sum_{k=1}^{\infty} f'(m k)/m k$ ; wenn  $\sum d(n)|f'(n)|/n < \infty$  [ $d(n)$  = Anzahl der Teiler von  $n$ ],

konvergiert die FR absolut gegen  $f$ ; wenn  $\sum |f'(n)| < \infty$ , ist  $f$  gleichmäßig f. p. ( $B$ ) [(1), (3)]; wenn keine einschränkende Bedingung gefordert wird, können zwischen  $f(n)$  und der FR alle möglichen Fälle eintreten [z. B. kann  $\sum a_m c_m(n)$  gegen eine von  $f$  verschiedene Funktion konvergieren, usw.]. Wenn  $M(f)$  und  $M(|f|)$  existieren, so ist  $\sum f'(n)/n$  konvergent (3). Die Existenz eines der Grenzwerte  $M(f)$  und  $\sum f'(n)/n$  bedingt nicht notwendig die des anderen; wenn beide existieren, sind sie einander gleich; wenn  $f'(n) = O_L(1)$ , so folgt aus der Existenz von  $M(f)$  die von  $\sum f'(n)/n$ , wenn  $f(n) = O_L(1)$  das Umgekehrte [(1), (2), (3)]; es werden noch andere „Taubersche Bedingungen“ dafür angegeben, daß aus der Existenz des einen Grenzwertes die des anderen folgt. Der Primzahlsatz in der Form  $\sum \mu(n)/n = 0$  folgt für  $f'(n) = \mu(n)$ . Analoge Sätze gelten für die Abhängigkeit der Existenz

der Grenzwerte  $M(f)$  und  $D(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{d=1}^n n^{-1} \left( \frac{n}{d} - \left[ \frac{n}{d} \right] \right) f(d)$  (4). — Wenn

$\sum_{n \leq x} f'(n) = O(1)$ , so ist  $\sum_{n \leq x} f(n) = x \left( \sum_1^{\infty} f'(n)/n \right) + O(x^{1/2})$ , und dies kann für die Klasse aller  $f$  nicht verschärft werden [für  $f(n) = \sum_{r^2+s^2=n} 1$  ist  $\sum_1^{\infty} f'(n)/n = \pi$  und  $\sum_{n \leq x} f(n)$  die Anzahl der Gitterpunkte in  $r^2 + s^2 \leq x$ ; diese kann bekanntlich bedeutend schärfer abgeschätzt werden]. Eine analoge Abschätzung gilt für die entsprechende Verallgemeinerung des Dirichletschen Teilerproblems (5). — Aus der Konvergenz von a) folgt nicht die von b) und umgekehrt; aus der Konvergenz beider nicht die Gleichheit der Grenzwerte;  $P_{\theta}(s)$  kann konvergieren,  $P_{\theta}(s)$  für alle  $s > 1$  divergieren;  $P_{\theta}(s)$  kann in einer größeren Halbebene konvergieren als  $\zeta_{\theta}(s)$  [(1), (6)]. — Sei  $g \geq 0$  und beschränkt; dann existiert  $M(g)$  (7). — Sei  $g(p) = \chi(p)$  eine Folge von Zahlen  $\pm 1$  oder  $\pm i$ ; für fast alle solchen Folgen sind b) und c) konvergent für  $\operatorname{Re} s = \sigma > 1/2$  und haben  $\sigma = 1/2$  zur natürlichen Grenze; es gibt Folgen, für die b) und c) die natürliche Grenze  $\sigma = 1$  haben (8). — Sei jetzt  $g(p) = \chi(p) = \alpha$  ( $\alpha$  beliebig komplex);  $(s-1)^2 P_{\theta}(s)$  ist regulär und  $\neq 0$  auf  $\sigma = 1$ ;  $P_{\theta}$  ist in  $\sigma > 0$  fortsetzbar; die Natur der Singularitäten hängt davon ab, ob  $\alpha$  reell, rational oder sogar ganz ist; die Riemannsche Vermutung für  $P_{\theta}$  ist richtig, wenn sie für  $\zeta(s)$  richtig ist (9). — Sei  $R$  eine Menge von Primzahlen und  $g(p) = \chi(p) = 1$  oder  $0$ , je nachdem ob  $p \in R$  oder  $p \notin R$ ; für fast alle  $R$  gilt: Die Konvergenzabszisse von a) und c) ist  $\sigma = 1$ ,  $\zeta_{\theta}(s)$  ist meromorph in  $\sigma > 1/2$  und hat  $\sigma = 1/2$  zur natürlichen Grenze,  $\zeta_{\theta}(s) \zeta(s)^{1/2}$  ist regulär und  $\neq 0$  in  $\sigma > 1/2$ ; für alle  $R$  ist die Reihe  $\sum \mu_{\theta}(n)_i n$  konvergent; ihre Summe verschwindet dann und nur dann, wenn  $\sum g(p)_i p = \alpha$ ; sei  $\lambda_R$  der Konvergenzexponent der  $p \in R$ ,  $\pi_R(x) = \sum_{p \leq x} g(p)$ ,  $[x]_R = \sum_{n \leq x} g(n)$ ; wenn  $\lambda_R > 0$ , so ist

$$\log \int_1^x \xi^{-\lambda_R} d[\xi]_R \sim \int_1^x \log(1 - \xi^{-\lambda_R})^{-1} d\pi_R(\xi);$$

wenn  $\zeta_{\theta}(\lambda_R) = \infty$ , so ist

$$\log \int_1^x \xi^{-\lambda_R} d[\xi]_R \sim \int_1^x \xi^{-\lambda_R} d\pi_R(\xi);$$

wenn  $\lambda_R = 0$  und  $R$  unendlich ist, so gilt

$$\pi_R(x) \sim \int_1^x \xi^{-1} \log x d\pi_R(\xi), \quad [x]_R \sim \zeta_{\theta}(1/\log x);$$

für fast alle  $R$  gilt  $[x]_R \sim x_1 / \pi \log x$ ;  $\zeta_{\theta}$  kann  $\sigma = 1$  zur natürlichen Grenze haben (1), (10). — Sei  $g(p) = \chi(p) \leq -1$  und  $\sum \chi^2(n) n^{-s} < \infty$  für  $s > 1$ ; wenn  $\zeta_{\theta}$  über  $s = 1$  hinaus auf  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$  fortsetzbar ist, so ist  $\zeta_{\theta}(1) \neq 0$  (dies enthält insbesondere das Nichtverschwinden der  $L$ -Reihen für  $s = 1$ ) (11). — Sei  $|g(p^k)| < K p^{\theta(k-1)}$ ,  $K$  konstant,  $\theta < 1$ ; sei a) absolut konvergent für  $\sigma > 1$  und in einer Umgebung von  $s = 1$  fortsetzbar mit einem einfachen Pol bei  $s = 1$ ;

dann sind  $\sum (g(p) - 1)_i p$  und  $\prod_p (1 - p^{-1}) (1 + \sum_1^{\infty} g(p^k) p^{-k})$  konvergent und gleich dem Residuum von  $\zeta_{\theta}$  bei  $s = 1$  (12). — Sei  $g(n) = F(n)$  = Anzahl der ganzen Ideale eines algebraischen Zahlkörpers  $K$  mit der Norm  $n$ ;  $\zeta_{\theta}$  ist dann die Dedekindsche Zetafunktion und  $M(F)$  existiert nach Dirichlet-Dedekind;  $M(F) = \prod_p (1 - p^{-1}) [(1 - p^{-a_1}) \dots (1 - p^{-a_i})]^{-1}$ , wo die  $g_i$  die Grade der in  $p$  aufgehenden Primideale sind (12). Es ist  $F(n) = 0$  für fast alle  $n$ , wenn nicht  $K = k$  (Körper der rationalen Zahlen);  $F(n)$  ist nicht f. p. (13). — Sei  $F(n, C)$  die Anzahl der ganzen Ideale aus  $K$ , deren Norm  $= n$  ist und die zur Klasse  $C$  gehören;



in (14) wird gezeigt, daß man aus der Heckeschen Funktionalgleichung für  $\zeta(s, C) = \sum F(n, C)/n^s$  schließen kann, daß  $\zeta(s, C)$  auf  $\sigma = 1$  regulär ist bis auf einen Pol 1. Ord. bei  $s = 1$  mit von  $C$  unabhängigem Residuuum; nach Tauberschen Sätzen von Wiener und Ikehara folgt  $M(F(n, C)) = \lambda$  (unabhängig von  $C$ ).

— Sei  $K = k(\sqrt{-1})$ , also  $F(n) = \sum_{r^2+s^2=n} \cdot 1$ ; nach Landau ist  $\sum_{n \leq x, F(n) \neq 0} \cdot 1 \sim b x / \sqrt{\log x}$ .

Verf. zeigt, wie man diesen und ähnliche Sätze (z. B. einen Satz von Ramanujan und Watson) mittels Tauberscher Sätze ohne Überschreiten der Geraden  $\sigma = 1$  beweisen kann (15).  $\sum_{n \leq x, F(n)=m} \cdot 1 \sim C_m(x/\log x)^{1/2}$ ,  $C_m(x/\log x)$  oder  $C_m(x/\log x)^{1,2} \log \log x$ ,

wobei es von der arithmetischen Struktur von  $m$  abhängt, welche der drei Beziehungen gilt (1). — Sei  $f(n) = \log g(n)$  (also  $f$  additiv),  $f(p) = 1$ ,  $f(p^k) > 0$ ,

$k = 2, 3, \dots$  für alle  $p$ ; dann ist  $\sum_{n \leq x, f(n)=m} 1 \sim \frac{1}{(m-1)!} \frac{x}{\log x} (\log \log x)^{m-1}$  ( $m$  feste natürliche Zahl); wenn  $f(p^k) \geq 0$  gefordert wird, gilt dies nicht mehr allgemein [(1), (16)]. — Es existiert  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \sum_{m \leq x, c_m(n)=k} \cdot 1$ ; für  $n = 1$  enthält dies den Primzahlsatz;

die Mittelwerte  $M(c_m^j(n)) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \sum_{m \leq x} c_m^j(n)$  werden berechnet (17). — Die Funk-

tion  $g(n) = \prod_{p \geq 2} [(p-1)/(p-2)]$  ist f. p. ( $B$ ) und hat eine absolut konvergente FR der Form  $\sum a_m c_m(n)$  [nach Sylvester und später Hardy und Littlewood vermutet man, daß die Anzahl der additiven Zerlegungen einer geraden Zahl  $2n$  in zwei Primzahlen  $\sim C g(n) (n/\log^2 n)$  ist] (1), (18). — Die Funktion  $\delta(n) = \sum_{p^k|n} \cdot 1 - \sum_{p|n} \cdot 1$  ist f. p. ( $B^2$ ) für alle  $\lambda > 0$  und hat die FR  $\sum_p [p(p-1)]^{-1} +$

$\sum_{p,k} c_{p^k}(n)/\varphi(p^{k'})$  ( $k' = 2$  oder  $k$ , für  $k = 1$  oder  $> 1$ ) (19). — Die Funktionen  $\zeta'/\zeta(1+it)$  und  $\log \zeta(1+it)$  sind f. p. ( $B^2$ ) (20). — Für die Reihe  $\sum_{t \log x} p^{-1} \sin(t \log p)$

tritt folgendes Gibbssches Phänomen auf:  $\sum_{p \leq x} p^{-1} \sin(t \log p) - \int_0^t (\sin u' u) du$

konvergiert gleichmäßig in  $|t| < T$  ( $T > 0$  beliebig) gegen einen endlichen Grenzwert (21). — Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zur Aussage:  $\zeta^{-k}(\sigma + it)$  ist f. p. ( $B^2$ ) als Funktion von  $t$  für  $\sigma > \frac{1}{2}$  und alle  $k = 1, 2, \dots$ . Analoges mit  $k = -1, -2, \dots$  gilt für die Lindelöfsche Vermutung (22). — Wenn die Riemannsche Vermutung richtig ist, ist die Funktion  $\bar{S}(t) = \arg \zeta(1/2 + it)$  [die im Restglied der Riemann-v. Mangoldtischen asymptotischen Abschätzung der Anzahl  $N(T)$  der Nullstellen im kritischen Streifen auftritt] nicht f. p. ( $B$ ) und hat die FR

$-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A(n)}{(\log n) n^{1/2}} \sin(t \log n)$ .  $\bar{S}_1(t) = \int_0^t \bar{S}(t) dt$  ist f. p. ( $B^2$ ), und die FR wird ebenfalls angegeben (23). — [Wegen des Verhaltens der quadratischen Mittelwerte von  $\bar{S}$  und  $S_1$ , ohne Annahme der Riemannschen Vermutung siehe die Arbeiten von A. Selberg]. Sei  $D(x) = \sum_{n \leq x} d(n)$ ,  $\bar{D}(x) = \frac{1}{2} [D(x+0) + D(x-0)]$ . Der „Fehler“  $(D(x) - x(\log x + 2C - 1)) x^{-1,4}$  ist f. p. ( $B^2$ ) und hat

die FR  $\frac{1}{\pi \sqrt{2}} \sum \frac{d(n)}{n^{3/4}} \cos(4\pi \sqrt{n} x - \pi/4)$  (24). — Sei  $q(x)$  eine Riemann-integrierbare Funktion mit der Periode 1 und  $q_n(x) = n^{-1} \sum_{m=1}^n q\left(x + \frac{m}{n}\right)$  eine Riemann-

sche Summe. In (25) werden verschiedene Bedingungen dafür angegeben, daß man die „Fourierglieder“  $g_n(x) = a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x$  der FR von  $q$

nach der Formel  $g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) q_{nk}(x)$  berechnen kann, wenn  $a_0 = 0$  ist. Eine hinreichende Bedingung ist z. B.  $\sum d(n) (|a_n| + |b_n|) < \infty$ . Nicht hinreichend

ist  $\sum (|a_n| + b_n) < \infty$ . In jedem Fall konvergiert  $\sum_n n^{-1} \sum_{d|n} \mu(n/d) q(x, d)$  für alle irrationalen  $x$  gegen  $a_0$  [setzt man  $q(x, d) = f(d)$ , so wird die letztere Summe  $= \sum f'(n)/n$ ]. In (25) werden noch zahlreiche Sätze bewiesen über die Approximation von  $q$  durch die  $q_n$ , die „Rückwirkung“ einer guten Approximation auf die Eigenschaften von  $q$ , sowie über Funktionen  $q$ , die einer Funktionalgleichung der Form  $q_n(x) = \chi(n) q(n \cdot x)$  genügen. Außer zwei unrichtigen Tatsachen in (1), insbes. S. 17. und (25), insbes. S. 45. finden sich noch einige Ungenauigkeiten, die an den Resultaten nichts ändern. K. Prachar.

Estermann, T.: On the sign of the Gaussian sum. J. London math. Soc. **20**, 66—67 (1945).

Vorzeichenbestimmung der Gaußschen Summen durch eine elementare Abschätzung. H. D. Kloosterman.

Guinand, A. P.: Gauss sums and primitive characters. Quart. J. Math., Oxford Ser. **16**, 59—63 (1945).

Reziprozitätsformeln für die verallgemeinerten Gaußschen Summen  $\sum_{n=1}^{qk} \chi(n) \exp \frac{n^2 \pi i p}{qk}$  und  $\sum_{n=1}^{qk} \chi(n) \exp \frac{n^2 \pi i p}{qk}$  [ $p, q, k$  ganz  $> 0$ ;  $\chi(n)$  ist ein primitiver Charakter mod  $k$ ]. (Bem. d. Ref.: Verf. scheint nicht bemerkt zu haben, daß seine Formeln durch elementare Umformung aus der einfachsten Reziprozitätsformel für Gaußsche Summen erhalten werden können.) H. D. Kloosterman.

Whiteman, Albert Leon: A note on Kloosterman sums. Bull. Amer. math. Soc. **51**, 373—377 (1945).

Die Summen  $A_k(h) = \sum \exp(2\pi i n(h + h')/k)$  [ $h, h' \equiv 1 \pmod{k}$ ] (wo  $h$  ein reduziertes Restsystem mod  $k$  durchläuft) können im Falle  $k = p^2$  ( $p$  prim.,  $\alpha \geq 2$ ) durch Zurückführung auf Gaußsche Summen und Ramanujansche Summen berechnet werden. Der Beweis ist einfacher als der von Salié (dies. Zbl. **2**, 128).

H. D. Kloosterman.

Vinogradow, I. M.: On the estimation of trigonometrical sums. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **34**, 182—183 (1942).

Vinogradow, I.: An improvement of the estimation of trigonometrical sums. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **6**, 33—40 (1942) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Vinogradoff, I. M.: General theorems on the estimations of trigonometrical sums. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **43**, 47—48 (1944).

Vinogradow, I. M.: An improvement of the estimation of sums with primes. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **7**, 17—34 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Vinogradoff, I. M.: Improvement of some theorems in the theory of primes. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **37**, 115—117 (1942).

The papers contain important steps of the developements of Vinogradow's powerful methods on trigonometrical sums. Detailed proofs and further improvements are given in his book (this Zbl. **33**, 251). L.-K. Hua.

Hua, Loo-keng: On character sums. Sci. Record **1**, 21—23 (1942).

Falls  $k$  ganz  $> 2$  und  $\chi(n)$  ein vom Hauptcharakter verschiedener Charakter mod  $k$  ist, so gilt die Ungleichung  $|\sum_{a=0}^A \sum_{n=-a}^{+a} \chi(n)| \leq (A^* + 1) \sqrt{k}$ , wo  $A^*$  die kleinste positive ganze Zahl  $\equiv A \pmod{k}$  ist. H. D. Kloosterman.

Hua, Loo-keng and Sze-hoa Min: On a double exponential sum. Sci. Record **1**, 23—25 (1942).

Falls  $f(x, y)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades ( $n \geq 4$ ) mit Koeffizienten in einem endlichen Körper  $K$  mit  $q = p^m$  Elementen ist, das über  $K$  nicht als Polynom

in einer Veränderlichen geschrieben werden kann und  $S$  die Spur in  $K$  bedeutet, so ist  $\sum_{\xi, \eta} \exp \frac{2\pi i S(f(x, y))}{p} = O(q^{2-(2/n)})$ , wo  $\xi$  und  $\eta$  die Elemente von  $K$  durchlaufen.  
*H. D. Kloosterman.*

**Ross, Arnold E.:** On a problem of Ramanujan. Amer. J. Math. 68, 29—46 (1946).

**Ross, Arnold E. and Gordon Pall:** An extension of a problem of Kloosterman. Amer. J. Math. 68, 59—65 (1946).

**Pall, Gordon:** The completion of a problem of Kloosterman. Amer. J. Math. 68, 47—58 (1946).

Eine quadratische Form  $f(x_v)$  mit ganzen rationalen Koeffizienten heiße (fast) universell, wenn sie alle natürlichen Zahlen (bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen) darstellt; sie heiße  $p$ -adisch isotrop, wenn  $f(x_v) = 0$  im Körper der rational  $p$ -adischen Zahlen nichttrivial lösbar ist. Nach H. D. Kloosterman [Acta math. 49, 407—464 (1926)] ist die Anzahl  $\alpha(n)$  der Darstellungen von  $n$  durch (1):  $f(x_v) = \sum_{v=1}^4 a_v x_v^2$ :  $\alpha(n) = \frac{\pi^2}{\sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4}} n S(n) + O(n^{17/18+\epsilon})$ ,  $S(n) = \prod_p \chi(n, p)$ .  $\chi(n, p) = \lim_{r \rightarrow \infty} p^{-3r} \alpha(n, p^3)$ ,  $\alpha(n, p^r)$  die Anzahl der Kongruenzlsungen  $f(x_v) \equiv n \pmod{p^r}$ . Durch elementare Auswertung dieser Formel folgert Pall: Eine für alle  $p$   $p$ -adisch isotrope Form (1) mit  $\alpha(n, p^r) > 0$  für alle  $n, p, r$  ist fast universell. Bedingungen für  $p$ -adische Isotropie sowie für  $\alpha(n, p^r) > 0$  werden angegeben. Es gibt nur endlich viele fast universelle Formen (1), welche nicht überall  $p$ -adisch isotrop sind; sie werden explizit angegeben. bertragung der Ergebnisse auf beliebige ganzzahlige definite Formen in  $m \geq 4$  Variablen (Ross and Pall). Die Determinante einer universellen ganzzahligen quaternären definiten Form  $f$  mit geraden Produktgliedern ist  $\leq 112$ ; sie ist auch dann beschränkt, wenn nur verlangt wird, daß  $f$  alle geraden natürlichen Zahlen darstellt (Ross).  
*M. Eichler.*

**Pall, Gordon:** On generalized quaternions. Trans. Amer. math. Soc. 59, 280—332 (1946).

Zuordnungen zwischen ternären Formen und Ordnungen in Quaternionen-Algebren. Methoden und Resultate meist schon bei H. Brandt [z. B. Math. Ann. 99, 1—29 (1928), dies. Zbl. 28, 108]. Neues Ergebnis: Aufstellung aller Quaternionen-Ordnungen mit Klassenzahl 1 (Anzahl: 39, darunter 5 maximale Ordnungen, welche bequemer aus der Klassenzahlformel des Ref.: dies. Zbl. 17, 150 hätte entnommen werden können). Eine begrifflich einfache, fast alle Rechnungen vermeidende Behandlung des Themas im Buch des Ref.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin 1952, S. 96—99.  
*M. Eichler.*

**Pall, Gordon:** The arithmetical invariants of quadratic forms. Bull. Amer. math. Soc. 51, 185—197 (1945).

**Jones, Burton W.:** A canonical quadratic form for the ring of 2-adic integers. Duke math. J. 11, 715—727 (1944).

Pall skizziert eine Invariantentheorie der quadratischen Formen im rationalen Zahlkörper. Die von H. Hasse [J. reine angew. Math. 152, 205—224 (1923)] eingeführten Invarianten  $c_p(f)$  für rationale quivalenz erscheinen hier mit dem Faktor  $\left(\frac{-1, -1}{p}\right)$  multipliziert. Jede Form ist quivalent einer solchen, deren Matrix  $\equiv \{p^{e_i} \mathfrak{A}_i, p^{e_i} \mathfrak{A}_2, \dots\} \pmod{p^r}$  ist (Aneinanderreihung von quadratischen Kästchen  $p^{e_i} \mathfrak{A}_i$  längs der Hauptdiagonalen;  $r$  beliebig). Dabei  $e_1 < e_2 < \dots$  und  $(|\mathfrak{A}_i|, p) = 1$ . Die  $e_i$ , Reihenzahlen der  $\mathfrak{A}_i$ , und Restsymbole  $\left(\frac{|\mathfrak{A}_i|}{p}\right)$  (für  $p > 2$ ) sind Geschlechtsinvarianten; für  $p = 2$  sind die entsprechenden Geschlechtsinvarianten komplizierter; sie werden angegeben. Zu diesen Invarianten gibt es



stets ein Geschlecht. Diese Ideen verwendet B. W. Jones (dies. Zbl. 41, 175). Eine andere Form der 2-adischen Geschlechtsinvarianten findet B. W. Jones in der eindeutig bestimmten 2-adisch kanonischen Form  $\{2^{e_1} \mathfrak{A}_1, 2^{e_2} \mathfrak{A}_2, \dots\}$  (s. o.), wobei die  $\mathfrak{A}_i$  noch folgenden Einschränkungen unterliegen: [Es sei  $c_2(\mathfrak{z} \mathfrak{A} \mathfrak{z}) = c_2(\mathfrak{A})$  die von Hasse eingeführte Invariante und  $\lambda(\mathfrak{A}) = (-1)^{(|\mathfrak{A}|+1)/2} c_2(\mathfrak{A})$ .] 1) Wenn  $\mathfrak{A}_i$  uneigentlich primitiv, dann  $\mathfrak{A}_i = \{\mathfrak{Z}, \dots, \mathfrak{Z}\}$  oder  $\{\mathfrak{Z}, \dots, \mathfrak{Z}, \mathfrak{S}\}$  mit  $\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , je nach Restklasse von  $|\mathfrak{A}_i| \bmod 8$ . 2) Wenn  $\mathfrak{A}_i$  eigentlich primitiv, dann  $\mathfrak{A}_i = \{a_1, \dots, a_{r_i}\}$ . Die  $a_r = 1, 3, 5, 7$ ; und zwar für  $r_i = 2$ :  $\mathfrak{A}_i = \{1, 1\}, \{3, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 7\}, \{1, 3\}, \{1, 7\}$ ; und für  $r_i = 3$ :  $\mathfrak{A}_i = \{1, \dots, 1, a, b, c\}$  mit  $\{a, b, c\} = \{1, 1, 1\}, \{1, 3, 3\}, \{1, 1, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 1, 3\}, \{3, 3, 3\}, \{1, 1, 7\}, \{3, 3, 7\}$ . 3) Wenn  $e_{i+1} = e_i + 1$  und  $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}$  eigentlich primitiv:  $\lambda(\mathfrak{A}_i) = 1 \equiv |\mathfrak{A}_i| \bmod 4$ . 4) Wenn  $e_{i+1} = e_i + 1$ ,  $\mathfrak{A}_{i+1}$  eigentlich primitiv,  $\mathfrak{A}_i$  uneigentlich primitiv:  $\mathfrak{A}_i = \{\mathfrak{Z}, \dots, \mathfrak{Z}\}$ . 5) Wenn  $\mathfrak{z}\{2^{e_{i+1}-e_i} \mathfrak{A}_{i+1}, 2^{e_{i+2}-e_i} \mathfrak{A}_{i+2}\} \mathfrak{z} \equiv 4 \bmod 8$  lösbar und  $\mathfrak{A}_i$  eigentlich primitiv, dann  $|\mathfrak{A}_i| \equiv \pm 1 \bmod 8$ . M. Eichler.

Jones, Burton W.: Related genera of quadratic forms. Duke math. J. 9, 723—756 (1942).

Die Matrix einer quadratischen Form im rationalen Zahlkörper sei  $\mathfrak{S} \equiv \{\mathfrak{A}, p\mathfrak{B}\} \bmod p^q$ ,  $(|\mathfrak{A}|, p) = 1$ ,  $q$  hinreichend groß,  $p$  eine ungerade Primzahl. Dem Geschlecht von  $\mathfrak{S}$  werden die durch die Formennmatrizen  $\mathfrak{D} = \frac{1}{p} \mathfrak{A} \mathfrak{S} \mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B} = \frac{1}{p} \mathfrak{A} \mathfrak{S} \mathfrak{B}$  bestimmten Geschlechter zugeordnet (related genera). Dabei bedeuten:  $r$  die Reihenzahl von  $\mathfrak{A}$ ,  $m$  die von  $\mathfrak{S}$ ;  $\mathfrak{h}$  eine primitive Lösung der Kongruenz  $\mathfrak{h} \mathfrak{A} \mathfrak{h} \equiv 0 \bmod p$ ,  $\mathfrak{H}$  eine unimodulare  $r$ -reihige Matrix mit  $\mathfrak{h}$  als letzter Spalte,  $1_i$  die  $i$ -reihige Einheitsmatrix,  $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$  die Kästchenmatrix mit  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  in der Hauptdiagonalen,  $\mathfrak{A} = \{p \cdot 1_r, 1_{m-r}\}$ ,  $\mathfrak{B} = \{p \cdot 1_{r-1}, 1_{m-r+1}\} \cdot \{\mathfrak{Y}, 1_{m-r}\}$ . Die Geschlechter von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{B}$  hängen nur von dem Geschlecht von  $\mathfrak{S}$  und  $p$  ab. Für  $p = 2$  wird eine ähnliche Zuordnung vorgenommen, die jedoch wesentlich komplizierter ist. Für die durch C. L. Siegel (dies. Zbl. 12, 197—199; 14, 8—9) eingeführte Darstellungsdichte  $A_0(\mathfrak{S}, t)$  der Zahl  $t$  durch das Geschlecht von  $\mathfrak{S}$  gilt dann ( $p > 2$ )

$$A_0(\mathfrak{S}, p t) = k \cdot A_0(\mathfrak{B}, t) + (1 - k) \cdot A_0(\mathfrak{D}, t)$$

mit  $k = (p^{m-1} - 1)/(p - 1)$  für  $m \equiv 1 \bmod 2$  und  $k = (p^{m-1} - 1)/(p - 1) + \left(\frac{(-1)^{m/2} |\mathfrak{A}|}{p}\right) p^{m/2-1}$  für  $m \equiv 0 \bmod 2$ . Für  $p = 2$  gilt eine entsprechende, aber kompliziertere Formel. Anwendungen auf ternäre und quaternäre Formen und Vergleich mit Ergebnissen anderer Herkunft. M. Eichler.

Chaundy, T. W.: The arithmetic minima of positive quadratic forms. I. Quart. J. Math., Oxford Ser. 17, 166—192 (1946).

O'Connor, R. E. and G. Pall: The construction of integral quadratic forms of determinant 1. Duke math. J. 11, 319—331 (1944).

Bestimmung des Minimums der Determinante einer reellen definiten quadratischen Form mit dem Minimum 2 (Methode: Induktion über die Variablenzahl  $n$ ). Trotz einer Lücke in der Schlußweise auf S. 169 richtige Ergebnisse bis  $n = 8$ :  $D_3 = D_4 = D_5 = 4$ ,  $D_6 = 3$ ,  $D_7 = 2$ ,  $D_8 = 1$ . Neue Werte:  $D_9 = 1$ ,  $D_{10} = \frac{3}{4}$  (Chaundy). O'Connor und Pall geben eine ganzzahlige eigentlich primitive Form in 24 Variablen mit dem Minimum 3 und eine ebensolche in 40 Variablen mit dem Minimum 4 an. M. Eichler.

Gage, Walter H.: An arithmetical identity for the form  $ab - c^2$ . Bull. Amer. math. Soc. 48, 898—900 (1942).

Gage, Walter H.: An arithmetical identity. Trans. roy. Soc. Canada, Sect. III 37, 9—11 (1943).

Die Anzahl der Darstellungen  $n = xy + yz + zx$  mit natürlichen Zahlen  $x, y, z$  ist  $N(n) = 3(h(n) - \zeta(n)/2)$ ,  $h(n)$  = Klassenzahl der quadr. Formen  $ax^2 + bxy + cy^2$ ,  $\zeta(n)$  = Anzahl der Teiler von  $n$ . (Methode: Zusammenhang mit der Lösungsanzahl von  $n = b^2 - 4ac$ , Reduktionstheorie der quadr. Formen.) Ähnliche Behandlung der Gl.  $n = xy + yz + 2zx$ ,  $n = xy + 2yz + 2zx$ . — Anwendungen auf elementare Herleitung von Klassenzahlrelationen für binäre quadr. Formen von bekanntem Typus [vgl. L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers* 3, 108 (1923)]. *M. Eichler.*

**Gupta, Hansraj:** On the class-numbers of binary quadratic forms. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 3, 283—299 (1942).

Tabelle der Klassenzahlen ganzzahliger binärer quadratischer Formen,  $ax^2 + bxy + cy^2$  mit Determinante  $D = b^2 - 4ac$  mit  $-3 \geq D \geq -12500$ . Asymptotische Verteilung auf die Restklassen  $D \equiv 0, 4, -3, -7 \pmod{8}$  anscheinend wie 2: 2: 1: 3 (s. hierzu E. Landau, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. math.-phys. Kl.* 1912, 764—769) und  $D \equiv 0, 1, -1 \pmod{3}$  wie 4: 3: 6. *M. Eichler.*

**Walfisz, Arnold:** On the class-number of binary quadratic forms. Trudy Tbilissk. mat. Inst. 11, 57—71 (1942) [mit russischer Zusammenfassg.].

**Reiner, Irving:** On genera of binary quadratic forms. Bull. Amer. math. Soc. 51, 909—912 (1945).

**Pall, Gordon:** The distribution of integers represented by binary quadratic forms. Bull. Amer. math. Soc. 49, 447—449 (1943).

**Hull, Ralph:** The representation of integers in forms. Nat. Math. Mag. 14, 235—252 (1940).

● **Hancock, Harris:** Development of the Minkowski geometry of numbers. New York: The Macmillan Company 1939. XXIV, 839 p.; \$ 12,00.

**Jarník, Vojtěch:** Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. VI. Časopis Mat. Fys. 70, 89—103 (1941) [Tschechisch mit deutscher Zusammenfassg.].

**Jarník, Vojtech and Vladimír Knechal:** Über den Hauptsatz der Geometrie der Zahlen. Rospravy II, Trždy České Akad. 53, Nr. 43, 15 S. (1943) [Tschechisch].

**Corput, J. G. van der:** Rhythmic systems. I. Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 708—721 = Indagationes math. 8, 416—429 (1946).

**Corput, J. G. van der and H. Davenport:** On Minkowski's fundamental theorem in the geometry of numbers. Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 701—707 = Indagationes math. 8, 409—415 (1946).

An improvement of Minkowski's convex body theorem when the faces of the convex body have bounded curvature. *J. W. S. Cassels.*

**Delaunay, B.:** Local methods in the geometry of numbers. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 9, 241—256 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Proofs of several well-known theorems in the geometry of numbers. The proofs depend considerably on geometric intuition and appear to the reviewer to be somewhat incomplete (e. g. end of § III). In particular the reviewer could not see why the „best possible“ argument of § 1.2, if correct, would not work with a better constant than  $5^{1/2}$  as all that is used is  $5^{1/2} + 1 \leq 4$ . *J. W. S. Cassels.*

**Delone, B. N.:** Über die Geometrie der Galoisschen Theorie. Sbornik posvyjaščenii pamjati D. A. Grave, Moscow 1940, 52—62 [Russisch].

Im wesentlichen ein Bericht über ein neues Gebiet. In der etwas weitschweifigen Einleitung wird angedeutet, daß, ähnlich wie in der „Geometrie der Zahlen“ bedeutsame Probleme der Zahlentheorie mit Hilfe der Theorie der Punktgitter gelöst werden, eine spezielle Art von Gittern zur Behandlung gewisser ungelöster

Probleme der Algebra und der Theorie der irrationalen Zahlen benutzt werden kann. Es folgen einige (wohl beinahe phantastische) Bemerkungen über eine Ausdehnung der Methode auf unendlich-dimensionale Gitter, die in entsprechender Weise zu einer Theorie der transzendenten Zahlen gehören. — Ein Gitter heißt „geschlossen bei Multiplikation“, hier kurz: „multiplikativ“, wenn es mit zwei Punkten  $x, y$  stets auch das Produkt dieser Punkte, d. h. den Punkt  $x \cdot y$  mit den Koordinaten  $x_1 y_1, \dots, x_n y_n$ , enthält. Ein multiplikatives Gitter heißt maximal, wenn es unmöglich ist, ein multiplikatives Gitter zu finden, in dem das erste ein echtes Untergitter ist. Ein von  $(0, \dots, 0)$  verschiedener Gitterpunkt heißt Nullteiler, wenn eine seiner Koordinaten gleich Null ist. Ein multiplikatives Gitter ohne Nullteiler heißt irreduzibel. Satz 1: Jedes maximale  $n$ -dimensionale Gitter im komplexen  $n$ -dimensionalen Raum  $K_n$  ist entweder irreduzibel oder direkte Summe von irreduziblen maximalen Gittern, und umgekehrt. Das Gitter in zwei Dimensionen, dessen Punkte ganzzahlige Koordinaten haben, entweder beide gerade oder beide ungerade, zeigt, daß der Satz im Falle nicht-maximaler Gitter nicht mehr zutrifft. Bei dem (nur skizzierten) Beweis wird das Gitter mit der Basis  $\omega_1, \dots, \omega_n$  auf ein Gitter ganzer algebraischer Zahlen bezogen, dessen Erzeugende die Potenzen  $\omega, \omega^2, \dots, \omega^n$  einer Wurzel der Gleichung  $F(\omega) = |a_{ij} - \delta_{ij}\omega| = 0$  sind; die ganz-rationalen Koeffizienten  $a_{ij}$  sind die des linearen homogenen Systems

$\omega \omega_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j \quad (i = 1, \dots, n)$ . Das Polynom  $F(\omega)$  erweist sich dann

und nur dann als irreduzibel, wenn das Gitter irreduzibel ist. Die Anzahl  $\tau$  der Paare konjugiert-komplexer Wurzeln von  $F(\omega)$  wird als Signatur des Gitters in  $K_n$  bezeichnet. Ist  $\sigma$  die Anzahl der reellen Wurzeln, so bestimmt das Gitter ein Gitter in dem  $(\sigma + 2\tau)$ -dimensionalen reellen „Signatur-Raum“, wo den reellen Wurzeln, sowie Real- und Imaginärteilen der Paare konjugierter Wurzeln je eine Koordinatenachse entspricht, mit einer der Multiplikationsregel der komplexen Zahlen angepaßten Multiplikativität. Der Gesamtheit der Punkte aller multiplikativen Gitter gleicher Signatur im  $K_n$  entspricht so ein Punktsystem  $W_{n,\tau}$  im Signatur-Raum, das durch die Gleichungen: „Elementar-symmetrische Funktionen der Koordinaten = ganze rationale Zahlen“ [Koeffizienten von  $F(\omega)$ ] charakterisiert werden kann. Satz 2: Jedes  $W_{n,\tau}$  enthält unendlich viele verschiedene irreduzible  $n$ -dimensionale maximale Gitter. — Nun sei  $n = r\delta$  ( $r > 1$ ) und die  $n$  Koordinatenachsen von  $K_n$  eingeteilt in  $r$  Komplexe von je  $\delta$  Achsen. Indem man in jedem Komplex die Koordinaten identifiziert, z. B.

$$(1) \quad x_1 = \dots = x_\delta, \quad x_{\delta+1} = \dots = x_{2\delta}, \dots, x_{(r-1)\delta+1} = \dots = x_n,$$

bestimmt man einen  $r$ -dimensionalen linearen Teilraum von  $K_n$ , der als ein „Bisektor“ von  $K_n$  bezeichnet wird. Jedes der  $r$  Gleichungssysteme (1) bestimmt in dem, von seinen Koordinatenachsen aufgespannten Raum eine „Winkelhalbierende“ Achse; alle diese  $r$  „Achsen des Bisektors“ sind orthogonal zueinander. Es zeigt sich, daß ein Punkt eines irreduziblen maximalen Gitters entweder von allgemeiner Lage oder Punkt eines Bisektors ist. Satz 3: Jedes  $r$ -dimensionale maximale Teilgitter eines  $n$ -dimensionalen maximalen Gitters ist die Gesamtheit aller in einem  $r$ -dimensionalen Bisektor liegenden Punkte des letzteren und umgekehrt. Es ist multiplikativ in bezug auf die Achsen des Bisektors mit  $1/\delta$  als maximaler Maßstabsinheit auf diesen. — Eine Drehung um den Ursprung, welche die positiven Koordinaten-Halbachsen untereinander vertauscht und das Gitter mit sich selbst zur Deckung bringt, heißt eine Deckpermutation des Gitters. In einem  $n$ -dimensionalen Gitter kann es nicht mehr als  $n$  Deckpermutationen geben. Gibt es genau  $n$ , so heißt das Gitter normal. Satz 4: Jedes irreduzible maximale Gitter ist entweder normal oder maximales Untergitter eines normalen Gitters. Alle Deckpermutationen eines normalen Gitters bilden eine Gruppe  $G$ , die Galois-



sche Gruppe des Gitters. Satz 5: Jeder Untergruppe  $H \subset G$  vom Index  $\nu$  entspricht ein  $\nu$ -dimensionales Teilgitter des normalen Gitters und umgekehrt.

H. Schwerdtfeger.

**Delone, B. N. und D. K. Faddeev:** Untersuchungen über die Geometrie der Galoisschen Theorie. Mat. Sbornik, n. Ser. 15 (57), 243—284 (1944) [Russisch mit engl. Auszug].

Zunächst eine Uorientierung der Grundlagen der im vorangehenden Referat skizzierten Theorie. Anstatt des Gitters wird nunmehr der lineare Koordinatenraum  $K_n$  über einem beliebigen Körper  $K$  betrachtet und mit Rücksicht auf die koordinatenweise Multiplikation der Punkte als  $K$ -Algebra aufgefaßt. Jede  $K$ -Unteralgebra ist dann entweder ein Koordinatenteilraum, aufgespannt von Achsenvektoren des Ausgangssystems  $E_n$  von  $K_n$ , oder ein Bisektor eines echten oder unechten Teilraumes von  $K_n$ , d. i. eine Gesamtheit von Punkten mit gleichen Koordinaten. Ist  $R$  ein Teilkörper von  $K$  und  $E'_n$  ein im allgemeinen von  $E_n$  verschiedenes Koordinatensystem, so heißt die Gesamtheit aller Punkte von  $K_n$ , die in bezug auf  $E'_n$  Koordinaten in  $R$  haben, ein  $R$ -Modul, im Falle der Multiplikativität eine  $R$ -Algebra. Die Teilalgebren einer  $R$ -Algebra lassen sich entsprechend wie die einer  $K$ -Algebra charakterisieren. Eine  $R$ -Algebra ist reduzibel, wenn sie als direkte Summe zweier  $R$ -Algebren darstellbar ist, die einander ergänzende Koordinatenteilräume füllen, sonst irreduzibel. Eine  $R$ -Algebra mit Nullteilern ist reduzibel. Für jede  $R$ -Algebra gilt der Satz von der eindeutigen Zerlegung in irreduzible  $R$ -Algebren. Achsentransformationen sind solche lineare Transformationen in  $K_n$ , welche die Vektoren von  $E_n$  untereinander vertauschen. Eine die  $R$ -Algebra in sich überführende Achsentransformation heißt Decktransformation der  $R$ -Algebra. Alle Decktransformationen bilden eine Gruppe  $\mathfrak{G}$ , deren Ordnung nicht größer als  $n!$ , und wenn die  $R$ -Algebra irreduzibel, nicht größer als  $n$  sein kann. Hat die Gruppe  $\mathfrak{G}$  einer irreduziblen  $R$ -Algebra genau  $n$  Elemente, so heißt die Algebra normal. Jede irreduzible Algebra ist Teil einer normalen Algebra. Ist  $\mathfrak{H}$  ein Normalteiler von  $\mathfrak{G}$ , so ist die zu  $\mathfrak{H}$  gehörige Teilalgebra normal und ihre Gruppe ist isomorph zu  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ . Hierin ist das Skelett einer Galoisschen Theorie zu erkennen. Der Zusammenhang mit der klassischen Galoisschen Theorie ergibt sich aus folgendem Satz: Jede irreduzible  $R$ -Algebra ist eine separable endliche algebraische Erweiterung des Körpers  $R$ , und umgekehrt. — Nun sei  $K$  der Körper aller komplexen Zahlen und  $R$  der Körper der rationalen Zahlen; die Koordinaten eines jeden Punktes einer  $R$ -Algebra in bezug auf  $E_n$  sind die Wurzeln einer Gleichung  $n$ -ten Grades mit rationalen Koeffizienten, und umgekehrt. Ferner wird bewiesen, daß über dem Körper der rationalen Zahlen unendlich viele irreduzible  $R$ -Algebren der Dimension  $n$  und Signatur (vgl. vorstehendes Ref.)  $\tau$  existieren, ein für die Theorie der algebraischen Zahlen fundamentales Resultat. — Die folgenden Abschnitte der Arbeit behandeln das Problem der Existenz von  $R$ -Algebren mit vorgegebener Galois-Gruppe. Es wird hier für den Fall einer auflösbaren Gruppe  $\mathfrak{G}$  konstruktiv gelöst. Die Methode ist basiert auf der Schreierschen Gruppen-Erweiterung und läßt sich im Rahmen einer kurzen Besprechung nicht genau beschreiben. — Manche Beweise in der Arbeit erscheinen dem Ref. lückenhaft und nicht überzeugend; auch durch viele irrtümliche Verweise in der Arbeit selbst wird die Lektüre sehr erschwert.

H. Schwerdtfeger.

**Wallisz, Arnold:** On lattice points in high-dimensional ellipsoids. IX. Trudy Tblissk. mat. Inst. 10, 111—160 (1941) [Englisch mit russ. Zusammenfassg.].

Im ersten Teil der Arbeit wird die Anzahl der Gitterpunkte im Ellipsoid  $Q(u_1, \dots, u_m) \leq x$  betrachtet, wo  $Q$  eine positiv definite quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Diese Anzahl ist dem Volumen des Ellipsoids bis auf ein Fehlerglied  $P_Q(x)$  gleich. Es sei  $r_Q(n)$  die Anzahl der ganzzahligen

Lösungen von  $Q = n$ . Wie Verf. früher gezeigt hat (dies. Zbl. 13, 105; 20, 203), ist

$$\begin{aligned} \int_0^x P_Q^2(w) dw &= \mathfrak{S}(Q) x^3 + O(x^{5/2} \log_2 x) && \text{und} \\ \sum_{0 \leq n \leq x} r_Q^0(n) &= \mathfrak{T}(Q) x^3 + O(x^2 \log_2 x) && \text{für } m = 4, \\ \sum_{0 \leq n \leq x} r_Q^0(n) &= \mathfrak{T}(Q) x^2 + O(x^{3/2} \log x) && \text{für } m = 3. \end{aligned}$$

Hier wird  $\mathfrak{S}(Q)$  für die Formen  $a n_1^2 + b n_2^2 + c n_3^2 + d n_4^2$  und  $\mathfrak{T}(Q)$  für die Formen  $a n_1^2 + b n_2^2 + c n_3^2$  berechnet. — Der zweite Teil handelt von der Anzahl der Gitterpunkte in einer  $k$ -dimensionalen Kugel. Das Fehlerglied heiße nun  $P_k(x)$ . Dann ist, wie Verf. in Math. Z. 26, 106—124 (1928) gezeigt hat, für  $x = n!$   $P_k(x) = c_k x^{k/2-1} + o(x^{k/2-1})$ . Hier werden Formeln für  $c_k$  mit Hilfe der  $\zeta$ -Funktion und der  $L(s)$ -Funktion abgeleitet und weitere Gleichungen und Ungleichungen für  $P_k(x)$  und  $r_k(n)$  erzielt. *N. Hofreiter.*

Speneer, D. C.: The lattice points of tetrahedra. J. Math. Physics 21, 189—197 (1942).

Verf. hat (dies. Zbl. 22, 309) die Anzahl der Gitterpunkte in einem rechtwinkligen Dreieck mit analytischen Methoden berechnet und betrachtet nun die Anzahl  $N_n^{(s)}(\eta; \omega_1, \dots, \omega_s)$ , kurz  $N_n^{(s)}(\eta)$ , der Gitterpunkte  $(m_1, \dots, m_s)$  in einem  $s$ -dimensionalen Tetraeder, das durch die Hyperebenen  $x_\nu = 1$  ( $\nu = 1, \dots, s$ ),  $\eta = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_s x_s$  begrenzt wird ( $\omega_\nu > 0$ ,  $\eta > 0$ ).  $N_r^{(s)}(\eta)$  sei das  $r$ -fache Integral von  $N_n^{(s)}(\eta)$ . Es sei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  die wachsende Folge der Zahlen von der Form  $\lambda_n = m_1 \omega_1 + \dots + m_s \omega_s$ , und  $a_n$  sei die Anzahl der Darstellungen von  $\lambda_n$ . Dann ist

$$N_r^{(s)}(\eta) = \frac{\Gamma(1+r)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} P(z) e^{(\eta - \sum_{\nu=1}^s \omega_\nu z)z} z^{-1-r} dz,$$

wobei

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^s (1 - e^{-\omega_\nu z})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}.$$

Durch Abänderung des Weges erhält man

$$N_r^{(s)}(\eta) = (-1)^s \zeta_s(-r, \eta; \omega_1, \dots, \omega_s) + T_r^{(s)}(\eta),$$

wo  $\zeta_s$  die von Barnes [Trans. Cambridge Phil. Soc. 19, 374—425 (1904)] betrachtete Funktion ist und das Restglied  $T_r^{(s)}$  aus Beiträgen der von 0 verschiedenen Singularitäten des Integranden besteht. Für  $r = 0$  ist  $\zeta_s(0, \eta)$  ein Polynom  $s$ -ten Grades, das  $N_n^{(s)}(\eta)$  sehr gut approximiert (s. Lehmer, dies. Zbl. 24, 149). In der Arbeit wird  $T_r^{(s)}(\eta)$ , dessen Verhalten von der zahlentheoretischen Natur der  $\omega_\nu$  abhängt, eingehend untersucht. Dazu werden die  $\omega_\nu$  in Klassen eingeteilt (zwei  $\omega$  gehören derselben Klasse an, wenn ihr Quotient rational ist). Ist die Klassenzahl  $n = 1$ , so ist  $T_r^{(s)}(\eta) = O(\eta^{s-1})$ , hingegen  $o(\eta^{s-1})$ , wenn  $n > 1$ . Für fast alle Punkte  $(\omega_1, \dots, \omega_s)$  und jedes  $\varepsilon > 0$  gilt  $T_r^{(s)}(\eta) = O(\log \eta)^{s+\varepsilon}$  bzw.  $O(1)$  für  $r = 0$  bzw.  $r > 0$ . *N. Hofreiter.*

Rado, R.: A theorem on the geometry of numbers. J. London math. Soc. 21, 34—47 (1946).

Verallgemeinerung des Minkowskischen Grundsatzes, enthält die Verallgemeinerung von Mordell und v. d. Corput (dies. Zbl. 9, 153, bzw. 11, 56; 15, 294) als Spezialfälle. Sei  $f(x) \geq 0$  für alle reellen  $n$ -dimensionalen Vektoren  $x$  definiert und verschwinde außerhalb eines beschränkten Bereiches. Es sei  $\lambda$  eine nicht singuläre Matrix, und  $\xi$  durchlaufe alle Gitterpunkte eines gegebenen Gitters

mit der Determinante  $D > 0$ . Ist

$$f(\lambda x - \lambda y) \geq \min(f(x), f(y)), \text{ so gilt } f(0) + \frac{1}{2} \sum_{\xi \neq 0} f(\xi) = \frac{\lambda_1}{D} \int_{R_\lambda} f(x) dx.$$

Dieser Satz wurde inzwischen von Cassels und Hlawka (dies. Zbl. **30**, 114 bzw. **40**, 309) verschärft und ergänzt.

*N. Hofreiter.*

**Pipping, Nils:** Zur Geometrie der Zahlen. Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. **14**, Nr. 13, 8 p. (1944).

Sind  $S_1, \dots, S_n$  die sukzessiven Minima, die zu einem konvexen Körper mit dem Volumen  $J$  gehören, dann gilt nach Minkowski:  $S_1 S_2 \dots S_n J \leq 2^n$ . Hierfür gab Davenport (dies. Zbl. **21**, 296) einen kurzen Beweis. Verf. behandelt nur den Fall  $n = 3$  und zeigt ganz einfach, daß die schwächere Ungleichung  $S_1 S_2 S_3 J < 3! 2^3$  gilt.

*N. Hofreiter.*

**Kotzig, Anton:** Sur les „translations  $k$ “. Časopis Mat. Fys. **71**, 55—66 (1946) [Tschechisch mit französ. Zusammenfassg.].

Zugrunde liegt das würfelförmige Punktgitter im  $R_n$ . Die Menge der Gitterpunkte, deren Koordinaten nicht negativ sind, heiße  $M$ . Es werden Verschiebungen von  $M$  um Gittervektoren betrachtet. Genauer: es sei eine Konstante  $k$  gegeben ( $1 \leq k \leq n$ ). Eine „ $k$ -Translation“ bedeutet eine Verschiebung eines beliebigen Punktes um einen Vektor  $(a_1, \dots, a_n)$  mit  $a_\nu \leq 0$ , ganz, wobei mindestens eins und höchstens  $k$  der  $a_\nu \neq 0$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) sind. Dann gibt es eine (wohlbestimmte) Untermenge  $A$  von  $M$  derart, daß jeder Punkt von  $M - A$ , aber keiner von  $A$ , sich durch eine geeignete  $k$ -Translation nach  $A$  überführen läßt. Die Menge  $A$  besteht genau aus den Punkten  $(x_1, \dots, x_n)$ , für die  $b_m(x_1) + \dots + b_m(x_n) \equiv 0 \pmod{(k+1)}$  für  $m = 0, 1, \dots$  gilt, wobei  $b_m(x_\nu)$  der Koeffizient von  $2^m$  in der dyadischen Darstellung von  $x_\nu$  ist.

*N. Hofreiter.*

(1) **Hua, Loo-Keng:** On Diophantine approximation. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **32**, 395—396 (1941).

(2) **Hua, Loo-keng:** On some problems of the geometrical theory of numbers. Sci. Record **1**, 19—21 (1942).

(3) **Hua, Loo-keng:** The lattice-points in a circle. Quart. J. Math., Oxford Ser. **13**, 18—29 (1942).

(4) **Hua, Loo-keng:** On the least solution of Pell's equation. Bull. Amer. math. Soc. **48**, 731—735 (1942).

(5) **Hua, Loo-keng:** A remark on a result due to Blichfeldt. Bull. Amer. math. Soc. **51**, 537—539 (1945).

(1) Kurze Ankündigung späterer Veröffentlichungen. (2) Ankündigungen von Verbesserungen des Fehlergliedes für die Anzahl der Gitterpunkte im Kreis und in der (3-dimensionalen) Kugel sowie von Ergebnissen über die Ordnung der Epsteinischen Zetafunktion. (3) Für die Anzahl der Gitterpunkte im Kreis  $x^2 + y^2 \leq x$  wird die Abschätzung  $x = O(x'')$  mit  $x'' \leq 13/40 \cdot x$  angegeben. (4) Für die kleinste positive Lösung  $x_0, y_0$  von  $x^2 - dy^2 = 4$ ,  $d$  nichtquadratisch und  $\equiv 0$  oder  $1 \pmod{4}$ , wird die Ungleichung  $\log(x_0 + y_0 d^{1/2}) \cdot 2 < d^{1/2} (\frac{1}{2} \log d + 1)$  bewiesen. (5)  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  seien  $n - 2s$  reelle und  $2s$  konjugiert komplexe homogene Linearformen von  $x_1, \dots, x_n$  der Determinante 1. Dann gibt es (nach van der Corput und Schaaake) Gitterpunkte  $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ , so daß  $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu=1}^n |\xi_\nu|^\sigma = r^\sigma$  ist mit  $r^n \geq \varepsilon(\sigma)^{n/\sigma} (n + \sigma) \sigma^{-1} V(\sigma)^{-1}$  ( $V$  = Volumen von  $F \leq 1$ ) und  $\varepsilon(\sigma) = 2^{\sigma-1}$  für  $\sigma > 2$ . Hierfür wird ein kurzer Beweis und die Verbesserung  $\varepsilon(\sigma) = 2$  für  $1 < \sigma \leq 2$  sowie eine weitere Verbesserung für  $1 \leq \sigma \leq 1.865$  gegeben.

*J. Heinhold.*



**Rogers, C. A.:** A note on a theorem of Blichfeldt. *Nederl. Akad. Wet., Proc.* **49**, 930—935 = *Indagationes math.* **8**, 589—594 (1946).

Es sei  $L$  ein  $n$ -dimensionales Gitter mit der Determinante  $D > 0$  und  $S$  eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge mit dem inneren Volumen  $V(S) > 0$ . Sei  $\lambda_1$  die kleinste Zahl, so daß  $\lambda_1 S$  zwei Punkte  $P_1, Q_1$  enthält und  $\overrightarrow{P_1 Q_1}$  Gittervektor ist;  $\lambda_2$  sei die kleinste Zahl, so daß  $\lambda_2 S$  zwei weitere Punkte  $P_2, Q_2$  enthält und  $\overrightarrow{P_1 Q_1}, \overrightarrow{P_2 Q_2}$  linear unabhängige Gittervektoren sind;  $\lambda_n$  sei die kleinste Zahl, so daß  $\lambda_n S$  die Punkte  $P_1, Q_1, \dots, P_n, Q_n$  enthält und  $\overrightarrow{P_1 Q_1}, \overrightarrow{P_2 Q_2}, \dots, \overrightarrow{P_n Q_n}$  linear unabhängige Gittervektoren sind. Es gilt  $\lambda_1^n V(S) \leq D$ . Ist  $S$  konvex und bezüglich 0 symmetrisch, so gilt  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n V(S) \leq D$  (Minkowski). Dieses gilt i. a. nicht für nicht-konvexe Bereiche. Wohl aber gilt  $\lambda_2^n V(S)/k \leq D$ , wo  $k$  ganz und  $\lambda_2 \lambda_1 \leq k < \lambda_2 \lambda_1 + 1$ . Bezüglich weiterer Untersuchungen siehe: Rogers, dies. Zbl. **33**, 106; **34**, 27; Jarnik, dies. Zbl. **34**, 28 u. a.

*N. Hofreiter.*

Ollerenshaw, Kathleen: The minima of a pair of indefinite, harmonic, binary quadratic forms. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **41**, 77—96 (1945).

Ollerenshaw, Kathleen: Lattice points in a circular quadrilateral bounded by the arcs of four circles. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **17**, 93—98 (1946).

Ollerenshaw, Kathleen: The critical lattices of a circular quadrilateral formed by arcs of three circles. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **17**, 223—239 (1946).

Evaluation of lattice constants of certain bounded two-dimensional regions.  
*J. W. S. Cassels.*

Ollerenshaw, Kathleen: The critical lattices of a square frame. *J. London math. Soc.* **19**, 178—184 (1944).

Ollerenshaw, Kathleen: Lattice points in a hollow  $n$ -dimensional hypercube. *J. London math. Soc.* **20**, 22—26 (1945).

Lattice constant of the  $n$ -dimensional region  $0 < a \leq x_j \leq b$  ( $j = 1, \dots, n$ ).  
*J. W. S. Cassels.*

Segre, B. and K. Mahler: On the densest packing of circles. *Amer. math. Monthly* **51**, 261—270 (1944).

Mahler, K.: On lattice points in a cylinder. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **17**, 16—18 (1946).

Bounds for the packing of equal circles and equal cylinders in 2, 3-dimensions respectively. The lattice constant for a cylinder is deduced; but this is a special case of results of J. H. H. Chalk and C. A. Rogers (this Zbl. **34**, 26) and Yen-chien Yeh (this Zbl. **34**, 26).

*J. W. S. Cassels.*

Mahler, K.: On lattice points in the domain  $|x y| \leq 1, |x + y| \leq \sqrt{5}$  and applications to asymptotic formulae in lattice point theory. I. II. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **40**, 107—116, 116—120 (1944).

Evaluation of the lattice constant of the title domain, with applications. For a generalization cf. J. W. S. Cassels (this Zbl. **30**, 346). *J. W. S. Cassels.*

(1) Mahler, K.: On lattice points in  $n$ -dimensional star bodies. I. Existence theorems. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* **187**, 151—187 (1946).

(2) Mahler, K.: Lattice points in  $n$ -dimensional star bodies. II. Reductibility theorem. I. II. III. IV. *Nederl. Akad. Wet., Proc.* **49**, 331—343, 444—454, 524—532, 622—631 = *Indagationes math.* **8**, 200—212, 299—309, 343—351, 381—390 (1946).

(3) Mahler, Kurt: Lattice points in two-dimensional star domains. I. II. III. *Proc. London math. Soc., II. Ser.* **49**, 128—157, 158—167, 168—183 (1946).

(4) Mahler, K.: Lattice points in  $n$ -dimensional star bodies. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 5, 113—124 (1946).

(5) Mahler, K.: On lattice points in an infinite star domain. J. London math. Soc. 18, 233—238 (1943).

These papers are fundamental for much later work. A concept of convergence of lattices is described and the existence of critical lattices for star bodies is proved. Particular attention is given to star bodies with a group of automorphisms (e. g.  $|xyz| \leq 1$ ) and to conditions that an infinite star body contains a finite star body of the same critical determinant. This is shown to be so in the important cases  $|xyz| \leq 1$ ,  $|x(y^2 + z^2)| \leq 1$  from a knowledge of the critical lattices. Many conjectures are made as indications of profitable lines of research. (3) Gives a more detailed examination of the two-dimensional case of (1), (2) above. Criteria are given for a lattice to be critical and these are used to investigate a large number of special regions. *J. W. S. Cassels.*

Mordell, L. J.: Geometry of numbers. Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal 1945, 265—284. Toronto: University of Toronto Press 1946. \$ 3,25

Mordell, L. J.: Thoughts on number theory. J. London math. Soc. 21, 58—74 (1946).

General surveys.

*J. W. S. Cassels.*

Mordell, L. J.: On the geometry of numbers in some non-convex regions. Proc. London math. Soc., II. Ser. 48, 339—390 (1945).

Mordell, L. J.: Further contribution to the geometry of numbers for non-convex regions. Trans. Amer. math. Soc. 59, 189—215 (1946).

Methods for the calculation or estimation of the lattice constants of star regions concave in each quadrant or similar in shape to  $|x^3 - y^3| \leq 1$  respectively. Examples include  $|x|^p + |y|^p \leq 1$  for  $p < 1$  and  $|x^4 - y^4| \leq 1$ . For later similar work on quartics see C. S. Davis (this Zbl. 42, 45). *J. W. S. Cassels.*

Segre, B.: Lattice points in infinite domains and asymmetric diophantine approximations. Duke math. J. 12, 337—365 (1945).

Mahler, K.: A theorem of B. Segre. Duke math. J. 12, 367—371 (1945).

Olds, C. D.: Note on an asymmetric Diophantine approximation. Bull. Amer. math. Soc. 52, 261—263 (1946).

An estimate for the lattice constant of the region  $-a \leq x \leq b$  with application to Diophantine approximation. Compare H. Blaney (this Zbl. 36, 26). *J. W. S. Cassels.*

Mahler, K.: The theorem of Minkowski-Hlawka. Duke math. J. 13, 611—621 (1946).

An improvement of the Minkowski-Hlawka theorem for convex bodies. Compare H. Davenport and C. A. Rogers (this Zbl. 30, 346). *J. W. S. Cassels.*

Mahler, K.: On a theorem of Minkowski on lattice points in non-convex point sets. J. London math. Soc. 19, 201—205 (1944).

A weak form of the Minkowski-Hlawka theorem. Compare E. Hlawka (this Zbl. 28, 206), C. L. Siegel [Ann. of Math., II. Ser. 46, 340—347 (1945)] and C. A. Rogers (this Zbl. 36, 27). *J. W. S. Cassels.*

Mahler, Kurt: On reduced positive definite quaternary quadratic forms. Nieuw Arch. Wiskunde, II. R. 22, 207—212 (1946).

If  $\sum_{i,j=1}^4 a_{ij} x_i x_j$  is a Minkowski-reduced definite form of unit determinant, then  $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} \leq 4$ ; a best possible result. *J. W. S. Cassels.*

Mahler, Kurt: On a property of positive definite ternary quadratic forms. J. London math. Soc. 15, 305—320 (1940).

Compare H. Davenport (this Zbl. 20, 205).

*J. W. S. Cassels.*

**Mahler, Kurt:** A problem of diophantine approximation in quaternions. *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. **48**, 435—466 (1945).

If  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varrho, \sigma$  are quaternions with  $\alpha\alpha\delta\bar{\delta} + \beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma} + \alpha\bar{\gamma}\delta\bar{\beta} = \beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma}\alpha = 1$ , there are integer quaternions  $x, y$  with  $|\alpha x + \beta y + \varrho||\gamma x + \delta y + \sigma| \leq 1/2$ .  
*J. W. S. Cassels.*

**Mahler, Kurt:** Remarks on ternary diophantine equations. *Amer. math. Monthly* **49**, 372—378 (1942).

Shows by elementary examples that certain plausible conjectures about ternary cubics are false.  
*J. W. S. Cassels.*

**Pall, Gordon:** On the product of linear forms. *Amer. math. Monthly* **50**, 173—175 (1943).

**Mordell, L. J.:** On the product of two non-homogeneous linear forms. *J. London math. Soc.* **16**, 86—88 (1941).

**Mordell, L. J.:** The product of two non-homogeneous linear forms. III. *J. London math. Soc.* **18**, 218—221 (1943).

Yet more proofs of Minkowski's theorem on the product of two inhomogeneous linear forms.  
*J. W. S. Cassels.*

**Davenport, H.:** Non-homogeneous binary quadratic forms. *Nederl. Akad. Wet., Proc.* **49**, 815—821 = *Indagationes math.* **8**, 518—524 (1946).

An improvement on Minkowski's theorem on the product of two inhomogeneous forms for certain specific cases. For later work see E. S. Barnes and H. P. F. Swinnerton-Dyer (this Zbl. **46**, 276).  
*J. W. S. Cassels.*

**Davenport, H.:** The product of  $n$  homogeneous linear forms. *Nederl. Akad. Wet., Proc.* **49**, 822—828 = *Indagationes math.* **8**, 525—531 (1946).

For a stronger result see C. A. Rogers (this Zbl. **34**, 316).

*J. W. S. Cassels.*

**Davenport, H.:** On sums of positive integral  $k$ -th powers. *Amer. J. Math.* **64**, 189—198 (1942).

**Davenport, H.:** On Waring's problem for fifth and sixth powers. *Amer. J. Math.* **64**, 199—207 (1942).

Estimates for the number of integers less than  $N$  expressible as the sum of  $s$  positive  $k$ -th powers. Proof that  $G(5) \leq 23$ ,  $G(6) \leq 36$ .  
*J. W. S. Cassels.*

**Mordell, L. J.:** On the minimum of a ternary cubic form. *J. London math. Soc.* **19**, 6—12 (1944).

**Davenport, H.:** On the minimum of a ternary cubic form. *J. London math. Soc.* **19**, 13—18 (1944).

**Davenport, H.:** On the minimum of  $x^3 + y^3 + z^3$ . *J. London math. Soc.* **21**, 82—86 (1946).

Estimates for the lattice constant of the region  $|x^3 + y^3 + z^3 + Kxyz| \leq 1$  ( $K$  constant); and particularly with  $K = 0$ .  
*J. W. S. Cassels.*

**Davenport, H.:** On the product of three homogeneous linear forms. IV. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **39**, 1—21 (1943).

(Part III, cf. this Zbl. **20**, 293.) If  $L_1, L_2, L_3$  are three homogeneous forms of unit determinant in  $x, y, z$ , then there are integers  $x, y, z$  with  $|L_1 L_2 L_3| < 1/9.1$  except in two specified cases with minimum  $1/7$  and  $1/9$ . The strongest result to date.  
*J. W. S. Cassels.*

**Davenport, H. and H. Heilbronn:** On indefinite quadratic forms in five variables. *J. London math. Soc.* **21**, 185—193 (1946).

The authors use estimates of trigonometric sums and the Hardy-Littlewood circle method to show that the minimum of  $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_5 x_5^2$  for integers  $x_1, \dots, x_5$  is zero.  
*J. W. S. Cassels.*



Davenport, H. and K. Mahler: Simultaneous diophantine approximation. *Duke math. J.* **13**, 105—111 (1946).

The best possible constants  $c, c'$  with the property that for all real  $\alpha, \beta$  there are infinitely many integers  $p, q, r$  with  $(r\alpha - p)^2 + (r\beta - q)^2 < c/r$ ;  $|p\alpha + q\beta + r| < c'/(p^2 + q^2)$  respectively are  $c = c' = 2/23^{1/2}$ . *J. W. S. Cassels.*

Davenport, H.: On a theorem of Tschebotareff. *J. London math. Soc.* **21**, 28—34 (1946).

An improvement of Tschebotareff's theorem (this *Zbl.* **18**, 110—111).

*J. W. S. Cassels.*

Mordell, L. J.: On numbers represented by binary cubic forms. *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. **48**, 198—228 (1943).

Mordell, L. J.: The minimum of a binary cubic form. I. II. *J. London math. Soc.* **18**, 201—210, 210—217 (1943).

Mordell, L. J.: Lattice points in the region  $|x^3 + y^3| \leq 1$ . *J. London math. Soc.* **19**, 92—99 (1944).

Davenport, H.: The minimum of a binary cubic form. *J. London math. Soc.* **18**, 168—176 (1943).

Davenport, H.: The reduction of a binary cubic form. I. II. *J. London math. Soc.* **20**, 14—22, 139—147 (1945).

Proofs by a variety of methods that if  $f(x, y)$  is a homogeneous cubic form of discriminant  $D$  then the inequalities  $|f(x, y)| \leq (-D/49)^{1/4}$ ;  $|f(x, y)| \leq (D/23)^{1/4}$  are soluble in integers according as  $D < 0$  or  $D > 0$ . The cases of equality are  $x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3$  and  $x^3 - xy^2 - y^3$  respectively. *J. W. S. Cassels.*

Mordell, L. J.: Lattice points in some  $n$ -dimensional non-convex regions. I. II. *Nederl. Akad. Wet., Proc.* **49**, 773—781, 782—792 = *Indagationes math.* **8**, 476—484, 485—495 (1946).

For later similar work see P. Mullender (this *Zbl.* **31**, 113; **32**, 15).

*J. W. S. Cassels.*

Mordell, L. J.: The product of  $n$  homogeneous forms. *Mat. Sbornik, n. s. r.* **12** (54), 273—276 (1943) [mit russ. Zusammenfassg.].

Reduces the problem of the minimum of the product of  $n$  homogeneous linear forms to (more complicated)  $(n - 1)$ -dimensional problem.

*J. W. S. Cassels.*

Mordell, L. J.: Observation on the minimum of a positive quadratic form in eight variables. *J. London math. Soc.* **19**, 3—6 (1944).

A relation between the lattice-constants of  $n$ - and  $(n + 1)$ -dimensional spheres. Compare A. Oppenheim [*J. London Math. Soc.* **21**, 251—252 (1946)].

*J. W. S. Cassels.*

Estermann, T.: A new proof of a theorem of Minkowski. *J. London math. Soc.* **17**, 158—161 (1942).

Yet another proof of the Linear Forms Theorem.

*J. W. S. Cassels.*

Estermann, T.: Note on a theorem of Minkowski. *J. London math. Soc.* **21**, 179—182 (1946).

New proof of a result of H. Davenport (this *Zbl.* **21**, 296).

*J. W. S. Cassels.*

(1) Chabauty, Claude: Démonstration nouvelle d'un théorème de Thue et Mahler sur les formes binaires. *Bull. Sci. math.*, II. Sér. **65**, 112—130 (1941).

(2) Chabauty, Claude: Approximation par des nombres formés avec un nombre fini de facteurs premiers et arithmétique des suites récurrentes. *C. r. Acad. Sci., Paris* **219**, 17—19 (1944).

(3) Wada, Yoshio: On the diophantine analysis of algebraic functions. *Proc. imp. Acad. Tokyo* **20**, 561—563 (1944).

(4) Chabauty, Claude: Sur le théorème fondamental de la théorie des points entiers et pseudo-entiers des courbes algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 336—338 (1943).

(5) Chabauty, Claude: Sur les solutions de certaines équations diophantiennes en nombres algébriques, en particulier en entiers algébriques, de degré borné. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 127—129 (1943).

(6) Chabauty, Claude: Approximation des nombres algébriques et points pseudo-entiers des courbes algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris 218, 899—901 (1944).

(1) bringt unter Verwendung eines Verfahrens von Skolem einen neuen (indirekten) Beweis eines Satzes von Mahler (dies. Zbl. 6, 105): Es gibt höchstens endlich viele Paare relativ primär ganzer rationaler Zahlen  $a, b$ , so daß die Hauptideale  $(a - \lambda b)$ ,  $(a - \mu b)$ ,  $(a - \nu b)$  nur eine endliche Anzahl gegebener Primfaktoren des durch die drei verschiedenen algebraischen Zahlen  $\lambda, \mu, \nu$  erzeugten Körpers  $K$  besitzen. (2) und (3) beschäftigen sich mit der Approximation von algebraischen Zahlen. Chabauty zeigt, daß es in einem algebraischen Körper  $K$  vom Grad  $n$  über  $\mathbb{R}(1)$  nur endlich viele ganze Zahlen  $X, Y$ , deren Primidealfaktoren zu einer endlichen Menge gehören, gibt, so daß  $0 < W(X/Y - \Theta) < |XY|^{-c}$  ist. Dabei ist  $\Theta \neq 0$  eine beliebige algebraische Zahl,  $W$  irgendeine Bewertung in  $K(\Theta)$ ,  $c$  eine positive Zahl und  $XY$  das Maximum des Absolutbetrages von  $X, Y$  und ihrer Konjugierten. Wada teilt Ergebnisse ähnlich den Sätzen von Thue und Siegel über die Approximation algebraischer Zahlen mit, deren Beweise später folgen sollen. (4), (5) und (6) befassen sich mit besonderen Punkten auf algebraischen Kurven (z. B. mit ganzen algebraischen Koordinaten; vereinfachter Beweis eines Satzes von Siegel, Abh. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1929, Nr. 1, 70 S.). J. Heinhold.

Jarník, Voitech: Sur les approximations diophantiques des nombres  $p$ -adiques. Revista Ci. 47, 489—505 (1945).

$\lambda(n)$  sei eine positive Funktion der natürlichen Zahl  $n$ , so daß  $n^{s+1} \lambda^s(n)$ ,  $s$  natürl. Zahl, mit  $n \rightarrow \infty$  monoton nach Null abnimmt.  $H(\lambda)$  bzw.  $h(\lambda)$  seien die Mengen aller Systeme  $p$ -adischer Zahlen  $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ , so daß  $(p, n) = 1$ ;  $|n a_i - y_i|_p < \lambda \max_{i=1, 2, \dots, s} (n, y_1, \dots, y_s)$  unendlich, bzw. endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen  $n, y_1, \dots, y_s$  besitzt.  $\mu H(\lambda)$  bzw.  $\mu h(\lambda)$  seien die in Analogie zum reellen Fall definierten äußeren Maße. Dann gilt  $\mu H(\lambda) = 0$  bzw.  $\mu h(\lambda) = 0$ , falls  $\sum_1^\infty n^s \lambda^s(n)$  konvergiert bzw. divergiert. J. Heinhold.

Monna, A. F.: Généralisation  $P$ -adique d'un théorème de Minkowski sur les formes linéaires. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 49, 162—166 = Indagationes Math. 8, 59—63 (1946).

$R_n(K(P))$  sei ein  $n$ -dimensionaler Raum von Punkten  $x = (x_1, \dots, x_n)$  mit  $P$ -adischen Koordinaten und  $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_P$  der Abstand des Punktes  $x$  vom Nullpunkt.  $y_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$  seien  $n$  Linearformen mit  $P$ -adischen Koeffizienten und einer nicht verschwindenden Determinante  $A$ , somit  $x_i = |1|^{-1} \sum_{j=1}^n A_{ij} y_j$ . Mit  $S$  werde eine diskrete Punktmenge aus  $R_n(K(P))$  bezeichnet, für die  $\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{P^{n\lambda}}{q(\lambda)} = \alpha$  endlich ist. Dabei ist  $q(\lambda)$  die Anzahl der Punkte  $x$  von  $S$ , für die  $\|x\| \leq P^\lambda$  ist. Verf. beweist: Falls  $\prod_{i=1}^n \max_{j=1, \dots, n} P^{c_i} |A_{ij}|_P > \alpha |1|_P^n$ , so hat das Ungleichungssystem  $|y_i(x)|_P \leq P^{c_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) mindestens eine Lösung der Form  $x = a - b \neq 0$ , wobei  $a$  und  $b$  beide zu  $S$  gehören. J. Heinhold.

**Žogin, I. I.:** Zur Theorie der diophantischen Approximationen. Učenyje Zapiski Moskovsk. gosudarst. Univ., Matematika **73**, 37—40 (1944) [Russisch mit deutscher Zusammenfassg.].

**Žogin, I. I.:** Über eine Frage der Theorie der diophantischen Approximationen. Učenyje Zapiski Moskovsk. gosudarst. Univ., Matematika **73**, 41—44 (1944) [Russisch mit deutscher Zusammenfassg.].

**Khintchine (Chinčĭn), A.:** Sur le problème de Tchebycheff. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **10**, 281—294 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

$\Theta$  sei eine irrationale,  $\alpha$  eine beliebige reelle Zahl,  $F(t)$  eine für  $t \geq 1$  monoton wachsende Funktion, so daß  $F(2t)/F(t)$  beschränkt ist. Žogin zeigt: 1. Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Konstanten  $K$ , so daß  $|x\Theta - y - \alpha| < 1/t$ ,  $-1 \leq x < KF(t)$  für alle  $t \geq 2$  in ganzen Zahlen  $x, y$  lösbar ist, ist die Existenz einer positiven Konstanten  $k$ , so daß für alle natürlichen Zahlen  $p, q$   $|q\Theta - p| \geq k/F(q)$  gilt. 2.  $|x\Theta - y - \alpha| < 5^{-1/2}/|x|$  hat unendlich viele ganzzahligen Lösungen.  $\lambda(\Theta, \alpha)$  sei die untere Grenze der positiven Zahlen  $C$ , für die  $|x\Theta - y - \alpha| < C/|x|$  mit beliebig großem  $x$  in ganzen Zahlen  $x, y$  lösbar ist und  $\mu(\Theta)$  die obere Grenze von  $\lambda(\Theta, \alpha)$  für alle reellen  $\alpha$  mit  $\Theta x - y - \alpha \neq 0$ . Khintchine beweist die Ungleichung  $\mu(\Theta) \leq \frac{1}{4} [1 - 4\lambda(\Theta, 0)]^{1/2}$  und gibt einen  $\Theta$ -Wert an, für den hier das Gleichheitszeichen notwendig ist. J. Heinhold.

(1) **Vijayaraghavan, T.:** On the fractional parts of the powers of a number. III. J. London math. Soc. **17**, 137—138 (1942).

(2) **Koksma, J. F.:** On decimals. Nieuw Arch. Wiskunde. II. R. **21**, 242—267 (1943).

Teil II von (1) besprochen in dies. Zbl. **28**, 113. Vijayaraghavan vermutet, daß  $\Theta$  ( $\Theta > 1$ ) algebraisch ist, falls  $(\Theta^n) (= \Theta^n - [\Theta^n])$  für  $n = 1, 2, \dots$  im Intervall  $(0, 1)$  nur eine endliche Zahl von Häufungsstellen hat, und beweist, daß die Anzahl aller solcher  $\Theta$  abzählbar ist. Koksma betrachtet die Zahlen  $(\Theta a^n)$ ,  $a$  ganzzahlig  $\geq 2$ ,  $1 \leq n \leq N$ , die im Teilintervall  $(\alpha, \beta)$  des Intervalls  $(0, 1)$  liegen, und gibt Abschätzungen für ihre Anzahl  $r_{\alpha\beta}(N)$ , sowie für  $\sum_{n=1}^N ((\Theta a^n) - \frac{1}{2})$  und  $\sum_{n=1}^N (\varrho_n - n/N)^2$  an:  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_N$  bedeuten dabei die ersten  $N$  Zahlen  $(\Theta a^n)$ , nach nicht abnehmender Größe geordnet. J. Heinhold.

**Koksma, J. F.:** Sur la théorie métrique des approximations diophantiques. Nederl. Akad. Wet., Proc. **48**, 249—265 = Indagationes math. **7**, 54—70 (1945).

**Dyson, F. J.:** On the order of magnitude of the partial quotients of a continued fraction. J. London math. Soc. **18**, 40—43 (1943).

Für die regelmäßige Kettenbruchentwicklung der irrationalen Zahl  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ),  $\xi = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots$  wird folgender Satz bewiesen:  $\varphi(n)$  sei eine nichtabnehmende positive Funktion, und es sei gesetzt:  $b_n = \max_{r \leq n} \varphi(n) a_r q(r)$ .

Wenn dann  $\sum 1/\varphi(n) = \infty$ , so ist  $\sum b_n^{-1} = \infty$  für fast alle  $\xi$ . J. Mall.

**Cabannes, Henri:** Application des fractions continues à la formation de nombres transcendents. Revue sci. **82**, 365—367 (1944).

Es sei  $x_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots]$  dargestellt durch einen Kettenbruch mit lauter positiven ganzen  $\alpha_i$ . Es werden folgende Sätze bewiesen: Wenn  $\lg \alpha_n / \lg (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1})$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$  strebt, so ist  $x_1$  transzendent, ebenso wenn  $(\lg \alpha_n)^{1/n}$  für  $n \rightarrow \infty$  über alle Grenzen wächst oder wenn  $\lg(1 + \alpha_n) / \log[(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_{n-1})]$  mit  $n$  über alle Grenzen wächst. J. Mall.

**Skolem, Th.:** A proof of the algebraic independence of  $e$  and  $e^{\sqrt{-d}}$ ,  $d$  positive integer, with another proof of the irrationality of  $\log x$  and  $\operatorname{arctg} x$  for rational  $x$ . Norsk. mat. Tidsskr. **28**, 97—104 (1946).



The author has given an especially short and simple proof of the well known theorem of F. Lindemann: The numbers  $e^{\alpha_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) are algebraically independent if  $\alpha_i$  are linearly independent algebraic numbers (this Zbl. 41, 20). In this paper he gives a proof for the special case  $n = 2$ ,  $\alpha_1$  rational and  $\alpha_2$  belonging to an imaginary quadratic number field. The proof is performed in quite the same way as the usual of the transcendency of  $e$ . The irrationality of the values of  $\log x$  and of  $\operatorname{arctg} x$  for rational values of  $x$ , respectively  $\neq 1$  and  $\neq 0$ , is proved by a slight modification of the proof concerning the irrationality of  $\pi$ , by means of the formula

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos x \, dx = n! \, x^{-(2n+1)} (P(x) \sin x + Q(x) \cos x). \quad W. Ljunggren.$$

Niven, Ivan: The transcendence of  $\pi$ . Amer. math. Monthly 46, 469—471 (1939).

## Analysis.

### Allgemeines:

● Courant, Richard and Herbert Robbins: What is mathematics? New York: Oxford University Press 1941. XIX, 521 p. \$ 3,75.

Besprechung einer ital. Übersetzung in dies. Zbl. 41, 374.

● James, Glenn and Robert C. James: Mathematics dictionary. Van Nuys, Calif.: Digest Press 1942. V, 259 p.; appendix, 22 p.

● Lindman, C. F.: Examen des Nouvelles tables d'intégrales définies de M. Bierns de Haan. Amsterdam 1867. New York: G. E. Stechert & Co. 1944. 231 p. \$ 7,50.

● Ryžik, I. M.: Tafeln von Integralen, Summen, Reihen und Produkten. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1943. 400 S. [Russisch].

Neuaufgabe: 1951. s. dies. Zbl. 44, 133.

Gokieli, L.: Über die moderne Idee des unendlich Kleinen. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 5, 11—20 (1944) [Georgisch und Russisch].

● Pólya, G. und G. Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. — Band I, II. New York: Dover Publications 1945. XXIV, 342 S.; XVIII, 412 S.; je \$ 3,50. Photokopie der beiden 1925 erschienenen Bände.

● Franklin, Philip: Methods of advanced Calculus. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1944. XII, 486 p. \$ 3,00.

● Jordan, Charles: Calculus of finite differences. Budapest: Hungarian Agent Eggenberger Book-Shop 1939. XXI, 654 p.

Watson, G. N.: A problem in elementary analysis proposed by Mordell. Proc. London math. Soc., II. Ser. 48, 391—400 (1945).

Morse, Marston: What is analysis in the large? Amer. math. Monthly 49, 358—364 (1942).

### Mengenlehre:

Levi, F. W.: Relations and operations. Math. Student 13, 139—148 (1945).

Blumenthal, L. M.: „A paradox, a paradox, a most ingenious paradox“. Amer. math. Monthly 47, 346—353 (1940).

Estevan Ciriquian, J.: Gedanken über die Mengenlehre. I, II, III. Euclides, Madrid 3, 545—552, 614—618, 676—681 (1943) [Spanisch].

● Fraenkel, Adolf: Einleitung in die Mengenlehre. New York: Dover Publications 1946. VIII, 424 S.; \$ 4,00.

Photokopie der 3. Aufl. Berlin, Springer 1928.

● Hausdorff, F.: Mengenlehre. New York: Dover Publications 1944. 307 S.; \$ 3,50.

Photokopie des in dies. Zbl. 12, 203 angezeigten Buches.

Silberstein, Ludwik: On some infinite sets of numbers. Philos. Mag., VII. Ser. 34, 32—34 (1943).

Denjoy, A.: Figuration des nombres transfinis de la classe II. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 429—432 (1945).

Denjoy, A.: Les ensembles rangés. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 981—983 (1946).

Diese Arbeiten sind inzwischen aufgegangen in dem Buche des Verf.: L'énumération transfinie, livre I (dies. Zbl. 49, 35). W. Neumer.

Mendonça de Albuquerque, L.: Der Begriff der Potenz von Mengen. Gaz. Mat., Lisboa 4, Nr. 15, 1—2 (1943) [Portugiesisch].

Salas, Francisco: Über das potentiell und das aktual Unendliche. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 4, 159—161 (1944) [Spanisch].

Sancho de San Roman, J.: Über die Existenz nichtabzählbarer Mengen. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 4, 24—30 (1944) [Spanisch].

Fraenkel, Abraham Adolf: Natural numbers as ordinals. Scripta math. 7, 9—20 (1940).

Chwistek, L. B.: Sur l'axiome de Zermelo et son rôle dans les mathématiques contemporaines. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 3, 981—985 (1942) [Russisch mit georgischer und französischer Zusammenfassg.].

Chwistek, L.: Sur les fondements de la sémantique. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 4, 187—194 (1943) [Russisch mit georgischer und französischer Zusammenfassg.].

Chwistek, L.: Sur les notions fondamentales de la théorie de nombres généralisés. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 4, 507—514 (1943) [Russisch mit georgischer und französischer Zusammenfassg.].

Chwistek, L.: Sur les notions fondamentales de l'analyse généralisée. Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 4, 745—752 (1943) [Georgisch und russisch mit französischer Zusammenfassg.].

Goodman, Nelson: Sequences. J. symbol. Logic 6, 150—153 (1941).

Bekanntlich läßt sich nach N. Wiener und Kuratowski ein geordnetes Paar durch eine Klasse definieren, z. B. das Paar  $[x, y]$  durch die Klasse  $\{(x), [(x), (y)]\}$ . Indem man das Tripel  $x, y, z$  als  $[x, (y, z)]$  definiert usw., kann jede Sequenz  $x_1, \dots, x_n$  durch eine Klasse repräsentiert und damit die Theorie der Relationen auf die Theorie der Klassen zurückgeführt werden. Dieser Weg hat den Nachteil, daß eine Sequenz von  $n$  Gliedern als Klasse erscheint, deren Typ um  $n$  höher ist als die Komponenten der Sequenz. Verf. schlägt daher einen anderen Weg vor, bei dem eine Sequenz durch eine Klasse repräsentiert wird, deren Typ nur um eins höher ist als der der Komponenten. Dazu wird ein geordnetes Paar  $[x, y]$  erklärt als die Klasse, deren Elemente aus den Unterklassen von  $x$  mit einem Element, ferner aus den zweielementigen Klassen bestehen, die entweder Unterklassen von  $y$  sind, oder von denen  $y$  Unterklasse ist, falls  $y$  nicht die Nullklasse ist.

W. Ackermann.

Quine, W. V.: On ordered pairs. J. symbolic Logic 10, 95—96 (1945).

Quine, W. V.: On relations as coextensive with classes. J. symbolic Logic 11, 71—72 (1946).

Die bekannte Methode von Wiener und Kuratowski zur Definition geordneter Paare in der Mengenlehre führt zu unerwünschten Stufenerhöhungen. Die hier neu angegebene (kompliziertere) Methode vermeidet derartige Erhöhungen. Sie setzt eine Mengenlehre voraus, in der alle Dinge Klassen sind. Jeder Klasse  $z$  wird als Transformierte eine Klasse gleichen Typs zugeordnet, die 0 nicht als

Element enthält, und aus der man  $z$  wieder ermitteln kann. Das geordnete Paar  $\langle x, y \rangle$  hat als Elemente die transformierten Elemente von  $x$  und die jeweils um das Element 0 vermehrten transformierten Elemente von  $y$ . — Damit kann man jede Klasse als geordnetes Paar und jede Klasse als Relation auffassen, womit den relationentheoretischen Begriffen und Sätzen universelle Geltung zukommt.

*H. Hermes.*

Newman, M. H. A.: On theories with a combinatorial definition of „equivalence“. *Ann. of Math.*, II. Ser. **43**, 223—243 (1942).

Gewisse geordnete Paare einer (im allgemeinen unendlichen) Menge von Dingen  $x, y, \dots$  seien als „positive Züge“ und gewisse als „negative Züge“ ausgezeichnet. Läßt sich  $x$  in  $y$  durch endlich viele (positive oder negative) Züge überführen, so heißen  $x$  und  $y$  äquivalent. Es wird vorausgesetzt, daß es stets zu zwei Elementen  $y_1, y_2$ , die beide durch einen positiven Zug aus  $x$  hervorgehen, ein Element  $z$  gibt, in das  $y_1$  und  $y_2$  durch endlich viele positive Züge übergeführt werden können. Es werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß es zu je zwei äquivalenten Elementen  $y_1, y_2$  ein Element  $z$  gibt, in das  $y_1$  und  $y_2$  durch endlich viele positive Züge übergehen. Anwendung: Das Church-Rosser'sche Normalformtheorem im  $\lambda$ -Kalkül.

*H. Hermes.*

Day, Mahlon M.: Oriented systems. *Duke math. J.* **11**, 201—229 (1944).

Verallgemeinerung der gerichteten Mengen und ihrer konfinalen Ähnlichkeit. Inangriffnahme des Problems der Konfinalitätsinvarianten orientierter Systeme durch Zerlegung in „einfache“ und „überall verzweigte“ Systeme; völlige Durchführung für den abzählbaren Fall.

*J. Schmidt.*

Sudan, Gabriel: Sur les nombres delta. *Acad. Roum., Bull., Sect. Sci.* **26**, 212—223 (1946).

Eyraud, H.: Le problème du continu. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* **6**, 33—45 (1943).

Eyraud, H.: Les transfinis ordinaux des seconde et troisième classe. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* **7**, 5—13 (1944).

Eyraud, H.: Le problème de la saturation. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* **8**, 47—48 (1945).

Eyraud, H.: La représentation des nombres ordinaux. *C. r. Acad. Sci., Paris* **218**, 635—636 (1944).

Sind  $f = (m_1, m_2, \dots)$  und  $g = (n_1, n_2, \dots)$  streng wachsende Folgen natürlicher Zahlen und gilt  $f < g$ , falls  $m_i < n_i$  für  $i \geq i_0$ , so ist  $<$  eine Halbordnung in der Menge aller  $f$ . Diese enthält wohlgeordnete Teilmengen vom Typus  $\omega_1$ , welche vom Verf. untersucht werden. — Verf. überträgt seine Betrachtungen auf Folgen  $f = (\alpha_\nu)_{\nu < \omega_1}$  streng wachsender Zahlen  $\alpha_\nu < \omega_1$ .

*W. Neumer.*

(1) Szpilrajn-Marczewski, Edward: Sur deux propriétés des classes d'ensembles. *Fundamenta Math.* **33**, 303—307 (1945).

(2) Knaster, B.: Sur une propriété caractéristique de l'ensemble des nombres réels. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **16** (58), 281—290 (1945) (Französisch mit russischer Zusammenfassg.).

(3) Sierpiński, W.: Sur un problème de la théorie générale des ensembles. *Fundamenta Math.* **33**, 299—302 (1945).

(1): Definition. Ein Mengensystem  $\mathfrak{A}$  hat die Eigenschaft (s) bzw. (k), wenn jedes disjunkte Teilsystem höchstens abzählbar ist bzw. jedes unabzählbare Teilsystem ein unabzählbares Teilsystem enthält, dessen Mengen paarweise einen nichtleeren Durchschnitt bilden. —  $\mathfrak{A}$  hat genau dann die Eigenschaft (k), wenn für jedes  $\mathfrak{B}$  mit (s) gilt:  $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{B}$  [s. (3)] hat die Eigenschaft (s). (2): Eine geordnete, unbegrenzte, stetige Menge  $E$  ist der Menge der reellen Zahlen genau dann ähnlich, wenn das System der Intervalle von  $E$  die Eigenschaft (k) hat [s. (1)]. (3):  $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{B}$



sei das System aller  $A \times B$ ,  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $B \in \mathfrak{B}$ , wenn  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  Mengensysteme sind. —  $S_1$  sei die Eigenschaft eines Mengensystems, nur endliche disjunkte Teilsysteme zuzulassen. — Mit  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  hat auch  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  die Eigenschaft  $S_1$ , aber nicht immer die Eigenschaft (s) [s. (1)]. W. Neumer.

**Sierpiński, W.:** Sur une suite transfinie d'ensembles de nombres naturels. Fundamenta Math. **33**, 9—11 (1945).

Für zwei unendliche Mengen  $N_1$ ,  $N_2$  natürlicher Zahlen gelte  $N_2 > N_1$ , wenn  $N_1 - N_2$  endlich,  $N_2 - N_1$  unendlich ist. Es wird eine Folge  $(N_\alpha)_{\alpha < \omega}$  konstruiert mit  $N_\alpha > N_\beta$  für  $\alpha > \beta$ . W. Neumer.

**Erdős, P. and A. Tarski:** On families of mutually exclusive sets. Ann. of Math., II. Ser. **44**, 315—329 (1943).

Sei  $F$  ein Mengenkörper,  $m(F)$  die obere Grenze der Mächtigkeiten aller disjunkten Teilsysteme  $T$  von  $F$ . (1) Ist  $m(F)$  keine unerreichbare Kardinalzahl  $> \aleph_0$ , dann gibt es ein  $T$  mit  $\bar{T} = m(F)$ ; gilt auch, wenn  $F$  ein Mengenring ist. (2) Zu jeder unerreichbaren Kardinalzahl  $n > \aleph_0$  gibt es einen Mengenkörper  $F$  mit  $n = m(F)$ , der kein  $T$  mit  $\bar{T} = n$  umfaßt. W. Neumer.

**Cuesta Dutari, Norberto:** Dezimale Theorie der Ordnungstypen. Revist. mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **3**, 186—205, 242—268 (1943) [Spanisch].

**Cuesta Dutari, Norberto:** Asymmetrische Kontinuen. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **4**, 16—23 (1944) [Spanisch].

**Cuesta, N.:** Unähnlichkeit dezimaler Mengen. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **4**, 45—47 (1944) [Spanisch].

**Cuesta, N.:** Souslin'sche Kontinua. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **4**, 175—187, 215—233 (1944) [Spanisch].

Definition verallgemeinerter „dyadischer Brüche“ als  $\alpha$ -Folgen  $A_\alpha$  von Zahlen 0 oder 1;  $\alpha$  eine beliebige Ordnungszahl, der „Index“ von  $A_\alpha$ . Es gibt eine Ordnung  $<$ , so daß entweder  $A_\alpha < B_\beta$  oder  $B_\beta < A_\alpha$  für je zwei verschiedene Brüche gilt. — Jede geordnete Menge der Mächtigkeit  $\aleph_\gamma$  ist einer Menge von Brüchen  $A_\alpha$  mit  $\alpha < \omega_\gamma$  ähnlich. — Anwendung zur Untersuchung und Konstruktion geordneter Mengen. U. a. folgt: Jedes Souslin'sche Kontinuum hat die Mächtigkeit  $2^{\aleph_0}$ . W. Neumer.

**Cuesta, N.:** Stetige Umordnungen mit reellen Zahlen. Revista math. Hisp.-Amer., IV. Ser. **5**, 191—203 (1945) [Spanisch].

Beispiele dafür, daß es  $2^c$  ( $c = 2^{\aleph_0}$ ) verschiedene stetige Ordnungstypen der Mächtigkeit  $c$  gibt. W. Neumer.

**Kurepa, G.:** A propos d'une généralisation de la notion d'ensembles bien ordonnés. Acta math. **75**, 139—150 (1943).

Mit dieser Verallgemeinerung meint Verf. halbgeordnete Mengen mit gewissen Eigenschaften, über welche einige Sätze bewiesen werden, die u. a. mit dem Souslin'schen Problem und der Kontinuum-Hypothese zusammenhängen. W. Neumer.

**Birkhoff, Garrett:** Generalized arithmetic. Duke math. J. **9**, 283—302 (1942).

Verallgemeinerung der Addition, Multiplikation und Potenzierung von Ordnungstypen für Halbordnungstypen. W. Neumer.

**Saarnio, Uno:** Nichtabzählbare Wohlordnung. Ajatus **13**, 236—261 (1945) [Finnisch].

Angebliche (effektive) Definition einer unabzählbaren wohlgeordneten Menge reeller Zahlen. W. Neumer.

**Walker, A. G.:** A theorem on ordered sets. J. London math. Soc. **21**, 9—10 (1946).

Angabe einer Gruppe von Bedingungen für eine geordnete Menge, aus der folgt, daß diese eine in ihr dichte abzählbare Teilmenge enthält. Beweis anscheinend nicht korrekt. W. Neumer.

Miller, Edwin W.: A note on Souslin's problem. Amer. J. Math. 65, 673—678 (1943).

Die negative Lösung des Souslinschen Problems ist äquivalent der Aussage: Es gibt eine halbgeordnete Menge  $P$  mit  $P \approx \aleph_1$ , so daß (a) jedes  $Q \subset P$  mit  $Q \approx \aleph_1$  sowohl zwei vergleichbare wie zwei unvergleichbare Elemente enthält und (b) zu zwei unvergleichbaren  $x \in P, y \in P$  kein  $z \in P$  mit  $x < z, y < z$  existiert.  
W. Neumer.

Sierpiński, W.: Sur les types d'ordre de puissance du continu. Revista Ci. 48, 305—307 (1946).

Ohne Auswahlaxiom wird ein System von  $2^c$  ( $c = 2^{\aleph_0}$ ) paarweise unähnlichen Mengen reeller Zahlen angegeben.  
W. Neumer.

Sierpiński, W.: Sur un ensemble ordonné de puissance supérieure à celle du continu. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 9, 137—138 (1946).  
Definition ohne Auswahlaxiom.  
W. Neumer.

Arens, R.: On the construction of linear homogeneous continua. Bol. Soc. mat. Mexicana 2, 33—36 (1945).

Handelt von stetigen geordneten Mengen, welche jedem ihrer abgeschlossenen Intervalle ähnlich sind.  
W. Neumer.

Vázquez García, Roberto and Francisco Zubieta Russi: Die linearen homogenen Kontinua von George D. Birkhoff. Bol. Soc. Mat. Mexicana 1, 1—14 (1944) [Spanisch].

Zubieta Russi, Francisco and Roberto Vázquez García: Bemerkung über das Kontinuum. Bol. Soc. mat. Mexicana 1, 15—17 (1944) [Spanisch].

Charakterisierung des Kontinuums der reellen Zahlen durch gewisse Anordnungseigenschaften.  
W. Neumer.

Olmsted, John M. H.: Transfinite rationals. Bull. Amer. math. Soc. 51, 776—780 (1945).

Erweiterung des Systems der positiven rationalen Zahlen zu einem geordneten System aus geordneten Paaren von Kardinalzahlen mit Äquivalenzdefinition, stets ausführbarer Addition, Multiplikation und Division.  
W. Neumer.

Zorn, M.: Idempotency of infinite cardinals. Univ. California Publ. Math., n. Ser. 2 [Nr. 1, Seminar Rep. in Math. (Los Angeles)], 9—12 (1944).

$a^2 = a$  für transfinite Kardinalzahl  $a$  wird mittels des bekannten Lemmas des Verf. bewiesen ohne Verwendung der Ordnungszahlen.  
W. Neumer.

● (1) Sierpiński, W.: L'axiome du choix et l'hypothèse du continu. Entretiens de Zurich 1938, 125—134, discussion 134—143 (1941).

(2) Sierpiński, W.: Un théorème sur les familles d'ensembles et ses applications. Fundamenta Math. 33, 1—6 (1945).

(3) Mostowski, A.: Remarques sur la note de M. Sierpiński „Un théorème sur les familles d'ensembles et ses applications“. Fundamenta Math. 33, 7—8 (1945).

(4) Sierpiński, W.: Sur une suite infinie de fonctions de classe I dont toute fonction d'accumulation est non mesurable (Solution d'un problème de M. S. Banach). Fundamenta Math. 33, 104—105 (1945).

(5) Sierpiński, W.: Sur une proposition de Mlle. S. Piccard. Commentarii math. Helvet. 18, 349—352 (1946).

(6) Sierpiński, W.: Sur la non-invariance topologique de la propriété  $\lambda'$ . Fundamenta Math. 33, 264—268 (1945).

(7) Sierpiński, W.: Sur deux conséquences d'un théorème de Hausdorff. Fundamenta Math. 33, 269—272 (1945).

(1): Étude comparative de l'axiome de choix  $C$  avec quelques autres principes, impliquant  $C$ , impliqués par  $C$  et équivalents à  $C$ , respectivement. Une discussion

suivie avec un aspect assez philosophique. — (2): Soit  $m$  un cardinal  $\geq \aleph_0$ ; une famille  $F \equiv \{F_\xi\}_{\xi < \varphi}$  possède la propriété  $P$ ,  $F \in P$ , si le cardinal de l'intersection de chaque famille finie  $\subseteq F$  est  $\geq m$ ; si alors  $F_\xi = E_\xi^0 \cup E_\xi^1$ , il y a une suite dyadique  $\tau(\xi)$  ( $\xi < \varphi$ ) telle que  $\{E_\xi^{\tau(\xi)}\} \in P$ . Conséquences: I.  $E$  étant un ensemble infini, on peut associer à chaque  $X \subseteq E$  un nombre  $f(x) \in \{0, 1\}$  tel que la fonction  $f$  soit additive  $\neq 0$ ,  $f(X) = 0$  si  $\overline{X} < \overline{E}$ ; II.  $F$  étant une famille de  $\geq m$  fonctions réelles uniformément bornées sur un ensemble  $M$ , il y a une fonction  $h$  d'accumulation d'ordre  $m$ : pour chaque  $\varepsilon > 0$  et chaque  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$  ( $n < \omega$ ) on a  $|h(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$  pour  $m$  éléments  $f \in F$  (cf. Tychonoff, ce Zbl. 12, 308). — (3): D'après Mostowski  $P_X$  peut être remplacée par „il n'appartient pas à un idéal donné  $I$ “. Alors  $f^{-1}(0)$  est un idéal premier contenant  $I$  (Tarski). La conséquence II s'ensuit aussi d'un résultat de Čech (ce Zbl. 17, 428, en particulier p. 830 du papier). (4): Chaque fonction d'accumulation d'ordre  $\aleph_0$  de la suite  $f_k(x) = [2^k x] - 2[2^{k-1} x]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) est non mesurable (réponse négative à un problème de Banach). — (5): Si  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , il existe un ensemble linéaire  $E$  congruent à son complémentaire, qui n'est pas mesurable ( $L$ ), ne jouit de la propriété de Baire et tel que l'ensemble de tous les nombres positifs qui  $\in D(E)$  est dénombrable (v. Piccard, ce Zbl. 3, 18 et p. 68, prop. 15 du livre). L'A. prouve cela sans l'hypothèse du continu;  $DE$  désigne l'ensemble des distances mutuelles de points de  $E$ . — (6): Contrairement à  $\lambda, \lambda'$  ne se conserve pas par des homéomorphismes. [Un  $E \subseteq C_1$  a la propriété  $\lambda'$  (resp.  $\lambda$ ) si à chaque dénombrable  $D$  (resp.  $D \subseteq E$ ) correspond un  $G_\delta$  dont l'intersection avec  $E$  est  $D$ ]. — (7): D'après Hausdorff (ce Zbl. 14, 54) le continu linéaire  $C_1$  est la réunion d'une  $\Omega$ -suite croissante des  $G_\delta$ . Cela permet, sans l'hypothèse du continu, de décomposer  $C_1$  en  $F_{\sigma\delta}$  disjoints; il y a un  $E \subset C_1$  tel que chaque  $D \subset C_1$  dénombrable soit un  $G_\delta$  par rapport à  $E \cup D$ . G. Kurepa.

(1) Albuquerque, J.: Ensembles de Borel. Portugaliae Math. 4, 161—198 (1944).

(2) Albuquerque, J.: Ensembles de Borel. II. Portugaliae Math. 4, 217—224 (1945).

(3) Liapounov, A. A.: Séparabilité multiple pour le cas des opérations  $\delta s$ . C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 53, 395—398 (1946).

(4) Otchan, G.: Sur la comparaison des puissances des opérations. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 33, 186—190 (1941).

(5) Otchan, G.: Opération  $A$  généralisée. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 33, 393—396 (1941).

(6) Otchan, G.: Quelques questions de l'équivalence des familles d'ensembles. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Sér. mat. 6, 171—188 (1942) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

(7) Otchan, G.: Über die Permutabilität der Operationen  $\delta s$ . Mat. Sbornik, n. Sér. 10 (52), 151—163 (1942) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

(1), (2): Soit  $I_0$  une famille contenant „l'espace“  $S$ , l'intersection des couples de ses éléments et admettant une application croissante  $f$  dans l'ensemble des nombres réelles  $\geq 0$ . En se servant de la sommation de  $\omega$ -suites d'ensembles disjoints,  $\subset$  et  $C$  l'A. construit des ensembles de Borel sur lesquels il définit une mesure dépendant de  $f$ . L'A. identifie les ensembles ainsi obtenus à ceux obtenus par la classification de Baire-de la Vallée Poussin. — (3): Les deux principes de séparation concernant l'intersection des suites d'ensembles (cf. Novikoff, ce Zbl. 10, 12, 155) sont généralisés en y remplaçant  $\cap$  par l'opération  $\delta s$ . Généralisation et nouveaux résultats concernant la séparation et non séparation. — (4): Pour quelques familles l'A. compare la portée des  $\delta s$ -opérations (cf. Kantorovitch-Livenson, ce Zbl. 4, 294). — (5): L'opération  $A$  de type  $\alpha$  consiste à former l'ensemble  $\bigcup \bigcap F_\tau$  ( $\tau \in X$ ),  $X$  étant l'ensemble des  $\omega_\alpha$ -suites des ordinaux



$\omega$ ;  $\xi$  y parcourt les portions initiales de  $\tau$ ;  $F_\xi$  est un ensemble. Quelques résultats du cas  $\alpha = 0$  se généralisent pour  $\alpha$  quelconque. — (6): Deux familles d'ensembles  $\{A_x\}$ ,  $\{B_\beta\}$  extraits resp. de  $E_1$ ,  $E_2$  sont équivalentes s'il existe une application biunivoque  $q$  de  $E_1$  et  $E_2$  par laquelle les éléments des deux familles se correspondent. Cette notion est appliquée aux ensembles analytiques et boreliens (cf. Szpilrajn, ce Zbl. 15, 8). — (7): Un analogue du théorème Cantor-Bernstein est établi. — Conditions nécessaires et suffisantes pour la permutabilité des opérations  $\delta_s$ , lorsqu'on les applique à une suite double. Liaison avec l'opération associée  $\Phi_\Delta \{E_n\} = \bigcup_{n \in N} \left( \bigcap_{n \in Z} E_n \cap \bigcap_{n \in Z'} E_n \right)$ ,  $N$  étant une famille d'entiers. *G. Kurepa.*

(1) Keldych, Ludmila: Sur la structure des ensembles mesurables **B.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 31, 651—653 (1941).

(2) Keldych, Ludmila: Sur la structure des ensembles mesurables **B.** Mat. Sbornik, n. Ser. 15 (57), 71—98 (1944) [mit russischer Zusammenfassg.].

(3) Kondô, Motokiti: Sur la structure des ensembles. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 57—64 (1942).

(4) Kondô, Motokiti: La structure des fonctions projectives. I. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 439—443 (1944).

(1), (2): Suite et développement des résultats antérieurs (ce Zbl. 23, 17; 24, 19) dans l'ordre de recherches de l'école de Luzin (Ensembles analytiques, Paris 1930). Chaque  $\alpha$ -élément  $E$  est représentable comme le résultat d'une  $A$ -opération agissant sur  $\beta$ -éléments décroissants avec  $\beta < \alpha - 1$  ou  $\beta < \alpha$  suivant que  $\alpha = 1$  existe ou n'existe pas.  $E$  est définissable moyennant un crible dérivable d'un crible associé à un  $F_{\omega\delta}$  quelconque contenant  $E$ . Si  $\alpha \geq 2$ ,  $E$  est l'union d'un  $\alpha$ -élément canonique  $E_\alpha$  et de  $\leq \aleph_\alpha$   $\alpha$ -éléments disjoints de  $E_\alpha$  [ $E$  est universel si pour chaque  $\beta$ -élément,  $\epsilon$ ,  $\beta \leq \alpha$ , il existe un parfait  $P$  tel que  $e$  soit homéomorphe de  $P \cap E$ ;  $E$  est canonique s'il est universel et de première catégorie sur chaque portion de  $E$ ]. Deux  $\alpha$ -éléments quelconques sont homéomorphes. Construction arithmétique des  $\alpha$ -éléments et de ceux qui sont canoniques respectivement pour  $\alpha \leq \omega$  (cf. aussi Keldych, ce Zbl. 10, 156 pour  $\alpha = 3$ ). — (3):  $I$  étant l'ensemble des nombres irrationnels, une opération analytique  $\Phi$  associée à chaque  $\omega$ -suite  $E_n \subseteq I$  un  $\Phi\{E_n\} \subseteq I$  (Kondô, ce Zbl. 20, 349);  $\Phi$  est régulière si pour chaque décomposition de  $I$  en  $G_\delta$ -ensembles disjoints  $I_n$  les relations  $E_n \subseteq \Phi\{I_n\}$  ( $n \in \omega$ ) entraînent  $\bigcup E_n \subseteq \Phi(I)$ . Si  $\Phi$  est régulier, il y a un ensemble  $E$  universel sur chaque portion de  $\bar{E}$  c'est-à-dire: si  $A \in \Phi(I)$  et si  $P$  est une portion de  $E$ , il y a un fermé  $F \subseteq P$  tel que  $A$  soit homéomorphe de  $E \cap F$ . Cela présente une généralisation du théorème précédent de Keldych. — (4):  $E$  étant un espace métrique séparable complet, une application réelle  $F$  de  $E$  est projective de classe  $A_1$  [resp.  $C_1$ ] s'il existe une fonction de Baire  $F(x, y)$  définie dans  $E \times R$  ( $R$  = les nombres réels) satisfaisant  $\inf F(x, y) = F(x)$  [resp.  $\sup F(x, y) = F(x)$ ],  $y$  y parcourant  $R$ : par définition  $F \in B_1$  si  $F \in A_1 \& C_1$ . Par récurrence on définit les  $F$  de classes  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$ ,  $C_{n+1}$  respectivement pour chaque  $n < \omega$  (cf. Luzin, loc. cit.). Liaisons entre fonctions projectives et ensembles projectives. Si  $G(t_1, \dots, t_m)$  est une fonction de Baire et si  $F_k(x) \in B_n$  ( $k \leq m$ ), alors la composée  $G(F_1, \dots, F_m) \in B_n$ .

*G. Kurepa.*

Kunugui, Kinjiro: Contribution à la théorie des ensembles Boreliens et analytiques. III. J. Fac. Sci. Hokkaido imp. Univ. I. Ser. 8, 79—108 (1940).

Teil II besprochen in dies. Zbl. 22, 317.

(1) Piccard, Sophie: Résolution d'un problème de M. Zarankiewicz pour une famille d'ensembles parfaits. Mathematica, Timişoara 19, 26—53 (1943).

(2) Piccard, Sophie: Note sur l'identité de deux ensembles de la famille  $F$  d'ensembles parfaits. Commentarii math. Helv. 18, 204—216 (1946).

(1): Détails complémentaires concernant le ch. 5 de l'ouvrage de l'A., ce Zbl. 27, 204. — (2):  $k, n$  étant deux entiers  $> 0$  vérifiant  $1 \leq k < n - 1$ , soit  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k$  une suite d'entiers. Soit  $[a_0 \dots a_k] = A$  l'ensemble des nombres  $\in [0, a_k/(n-1)]$  représentables dans le système  $n$ -adique en ne se servant que des chiffres  $a_0, \dots, a_k$ . On donne un critère pour l'identité des ensembles  $A$  ainsi définis. *G. Kurepa.*

Szymański, Piotr: Sur une correspondance effective entre l'ensemble des fonctions continues et un ensemble de nombres réels. Bull. sci. École polytechn. Timişoara 11, 185—195 (1944).

Aardenne-Ehrenfest, T. van: Proof of the impossibility of a just distribution of an infinite sequence of points over an interval. Nederl. Akad. Wet., Proc. 48, 266—271 = Indagationes math. 7, 71—76 (1945).

Eyraud, H.: Schémas bifurqués et représentations transfinies. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 3, 25—32 (1940).

Darstellung aller möglichen Anordnungen der Menge der natürlichen Zahlen mittels eines verzweigten Schemas. *W. Neumer.*

Eyraud, H.: D'une représentation des ensembles fermés. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 3, 33—37 (1940).

Darstellung abgeschlossener Mengen aus  $(0, 1]$  mittels Mengen natürlicher Zahlen. *W. Neumer.*

Sierpiński, W.: Sur un problème de triades. Soc. Sci. Lett. Varsovie, C. r. Cl. III 33—38, 13—16 (1946) [Mit polnischer Zusammenfassg.].

Viene provato, servendosi del postulato di Zermelo, che ogni insieme infinito ha la proprietà di Steiner. Un insieme  $E$  si dice che ha la proprietà di Steiner se esiste una famiglia  $J$  di sottoinsiemi di  $E$ , formato ognuno da tre elementi, tale che ogni sottoinsieme di  $E$  di due elementi è contenuto soltanto in un insieme della famiglia  $J$ . È noto (v. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, Berlin 1927, 202—218) che un insieme finito possiede la proprietà di Steiner se e solo se il suo numero cardinale è della forma  $6k + 1$  oppure  $6k + 3$ . *L. Giuliano.*

Choquet, Gustave: Application à la théorie des réseaux, d'un théorème sur la structure des permutations d'un ensemble. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 25, 161—172 (1946).

Pour un ensemble  $E$  ayant  $\geq 2$  points, soit  $E_2$  l'ensemble des  $X \subseteq E$  vérifiant  $\overline{X} = 2$ ; un  $A \subseteq E_2$  est appelé réseau; chaque permutation  $p$  de  $E$  en implique une,  $p'$ , dans  $E_2$ ; deux réseaux  $A_1, A_2$  sont isomorphes s'il y a une permutation  $p$  de  $E$  telle que  $A_2 = p' A_1$ . Pour qu'il existe un  $A$  isomorphe de  $E_2 - A$ , il faut et il suffit que  $\overline{E}$  soit infini ou de la forme  $4n$  ou  $4n + 1$ . *G. Kurepa.*

Dienes, Z. P.: Sur la comparabilité des ensembles mesurables  $B$  par des procédés dénombrables. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 967—969 (1946).

Une proposition est  $D$ -prouvable si elle est réductible à la comparaison des couples des entiers. Les ensembles de Borel des classes  $B_1, B_2$  sont  $D$ -comparables; le cas des classes supérieures reste ouvert. *G. Kurepa.*

Kreweras, Germain: Extension d'un théorème sur les répartitions en classes. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 431—432 (1946).

## Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Isaacs, Rufus Philip: A finite difference function theory. Univ. nac. Tucumán. Revista, Ser. A 2, 177—201 (1941).

● McShane, Edward James: Integration. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1944. VIII, 392 p. \$ 6,00.

Neuaufgabe s. dies. Zbl. 33, 53.

● Gillespie, R. P.: *Integration*. Edinburgh: Oliver und Boyd 1939. VIII, 126 p. 4/6.

● Douglas, Jesse: *Survey of the theory of integration*. Galois Lectures, Scripta Mathematica Library, Nr. 5, 1—47 (1941).

● Cohen, Abraham: *Elements of Calculus*. Boston, Mass.: D. C. Heath and Company 1940. V, 583 p. \$ 3,50.

● Curtiss, D. R.: *Maxima and minima of functions of two or more variables*. Northwestern University Studies in Mathematics and the physical Sciences, Nr. 1: Mathematical Monographs, Nr. 1, p. 1—43. Graduate School, Northwestern University, Evanston, Ill., 1941. \$ 2,25.

Jessen, Borge: *Abstrakte Maß- und Integrationstheorie*. V. VI. VII. Mat. Tidsskr. B 1942, 43—53 (1942), 1944, 28—34, 35—36 (1944) [Dänisch].

Sonderdruck dieser Artikelserie s. dies. Zbl. 40, 313.

Ulam, S. M.: *What is measure?* Amer. math. Monthly 50, 597—602 (1943).

Kantorovič, L. V.: *Über die Theorie der Riemann-Stieltjesschen Integrale*. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski, Ser. mat. Nauk 6, 52—68 (1939) [Russisch].

Piccone, M.: *Ancora sull'integrazione delle funzioni*. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. II. Ser. 12 (1943).

Unter Eingehen auf die einzelnen Punkte der in Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. II. Ser. 11, 235—240 (1942) gegebenen Bemerkungen von L. Tonelli wird der von dem Verf. (dies. Zbl. 27, 302) angegebene Aufbau der Theorie des Lebesgue-Stieltjes Integrals nochmals (mit Beweisen) dargelegt. *Otto Haupt*.

Gomes, Ruy Luis: *Der Integralbegriff, gegründet auf das Jordansche Maß*. Gaz. Mat., Lisboa 7, Nr. 29, 5—9 (1946) [Portugiesisch].

Kakutani, Shizuo: *Construction of a non-separable extension of the Lebesgue measure space*. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 115—119 (1944).

Aus der Kontinuumshypothese wird die Existenz eines abzählbar additiven Maßes  $\mu$  abgeleitet, das auf einem Booleschen  $\sigma$ -Mengenverband  $\mathfrak{B}$  aus Teilmengen des Einheitsintervalls  $J$  definiert ist, eine Erweiterung des Lebesgueschen Maßes in  $J$  darstellt und die Eigenschaft hat, daß jedes in bezug auf die Metrik  $d(A, B) = \mu((A \cup B) - (A \cap B))$  in  $\mathfrak{B}$  dichte Mengensystem die Mächtigkeit  $2^c$  besitzt.

*K. Krickeberg*.

Sierpiński, W.: *Sur les fonctions de plusieurs variables*. Fundamenta Math. 33, 169—173 (1945).

Se  $F_m$  è l'insieme di tutte le funzioni di  $m$  variabili  $f(x_1, \dots, x_m)$ ,  $x_i \in E$ ,  $i = 1, \dots, m$ , i cui valori appartengono ad  $E$ , si dimostra che ogni funzione di  $F_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) si può ottenere sovrapponendo un numero finito di funzioni di  $F_2$ . Di questo fatto, se  $E$  è finito, sono date due dimostrazioni, la seconda delle quali fa uso del postulato di Zermelo, il quale si può evitare se  $E$  è il continuo reale.

*L. Giuliano*.

Erdős, P.: *Some remarks on set theory*. Ann. of Math., II. Ser. 44, 643—646 (1943).

Vier Feststellungen: 1. Es gibt eine eindeutige Abbildung der Menge der reellen Zahlen in sich, welche die Klasse der Nullmengen genau in die Klasse der Mengen erster Kategorie überführt. Mit Annahme der Kontinuumshypothese wird eine solche Abbildung konstruiert. 2. Es gibt  $2^c$  lineare Punktmengen, wovon je zwei nicht  $m$ -fach zerlegungsgleich sind und  $m$  eine Kardinalzahl bedeutet, die kleiner als  $c$  ist. 3. Bezeichnet  $T$  die Klasse der linearen, im Sinne von A. Tarski (dies. Zbl. 18, 394) absolut meßbaren Punktmengen,  $T_0$  die Teilklasse der absoluten Nullmengen, so ist die Mächtigkeit von  $T \pmod{T_0}$  gleich  $2^c$ . Bedeuten  $L$  und  $L_0$  die entsprechenden Klassen im Lebesgueschen System, so ist bekanntlich die Mächtigkeit von  $L \pmod{L_0}$  nur  $c$ . 4. Es wird mit Verschärfung eines Resultates



von V. Jarník (dies. Zbl. 9, 308) gezeigt, daß die Menge der Punkte, in welchen eine im Intervall  $(0, 1)$  stetige Funktion eine endliche obere rechtsseitige Ableitung besitzt, die Mächtigkeit  $c$  aufweist. H. Hadwiger.

**Borel, Émile:** L'axiome du choix et la mesure des ensembles. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 309—310 (1946).

Verf. konstruiert eine Zerlegung der Einheitskreislinie in abzählbar viele kongruente Punktmengen. Solche Beispiele, wie sie in ähnlicher Weise schon durch G. Vitali (1905) und F. Hausdorff (1914) aufgestellt wurden, belegen die Nichtexistenz universeller Maßsysteme, da die konstruierten Punktmengen in keinem System meßbar sein können. H. Hadwiger.

**Tsuji, Masatsugu:** Some metrical theorems on a set of points. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 110—113 (1943).

Verf. weist nach, daß das Maß des Durchschnittes zweier relativ zueinander translativ bewegter meßbarer Punktmengen eines euklidischen Raumes sich stetig ändert. Es ergeben sich u. a. Theoreme von H. Steinhaus. Zwei maßgleiche Punktmengen sind bis auf Nullmengen abzählbar translativ zerlegungsgleich. H. Hadwiger.

**Sierpiński, Waclaw:** Sur la non-existence des décompositions paradoxales d'ensembles linéaires. Actas Acad. nac. Ci. exact. fís. natur. Lima 9, 113—117 (1946).

Direkter und elementarer Beweis (insbesondere ohne Anwendung des Auswahlaxioms!) für die Tatsache, daß im eindimensionalen Raum keine Zerlegungsparadoxie bestehen kann. Genauer: Es gibt keine nichtleere lineare Punktmenge, welche in zwei disjunkte Teile zerlegt werden kann, so daß jeder Teil wieder mit dem Ganzen endlich-fach zerlegungsgleich ist. H. Hadwiger.

**Sierpiński, Waclaw:** Sur le paradoxe de M. M. Banach et Tarski. Fundamenta Math. 33, 229—234 (1945).

**Sierpiński, Waclaw:** Sur le paradoxe de la sphère. Fundamenta Math. 33, 235—244 (1945).

Verf. weist nach, daß eine Vollkugel im gewöhnlichen Raum mit zwei mit ihr kongruenten Kugeln 8-fach zerlegungsgleich ist. Dieses Ergebnis wurde mittlerweile durch R. M. Robinson (dies. Zbl. 32, 403) überholt, indem gezeigt wurde, daß die beiden Punktmengen bereits 5-fach zerlegungsgleich sind. Die Vielfachheit 5 ist die kleinstmögliche. — Weiterhin zeigt er, daß die Vollkugel in  $2^{\aleph_0}$  disjunkte Teilmengen zerlegt werden kann, wobei jede einzelne mit der Vollkugel 9-fach zerlegungsgleich ist. H. Hadwiger.

**Hadwiger, H.:** Inhaltsungleichungen für innere und äußere Parallelmengen. Experientia 2, 490 (1946).

(1) **Hadwiger, H.:** Bemerkung über additive Mengenfunktionale. Experientia 1, 274—275 (1945).

(2) **Hadwiger, H.:** Ein Translationssatz für Mengen positiven Maßes. Portugaliae Math. 5, 143—144 (1946).

(3) **Kunugui, Kinjiro:** Sur une propriété des ensembles plans de mesure positive. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 461—465 (1941).

(1) Sei  $\mathfrak{M}$  eine Menge abgeschlossener Mengen  $\subset R_n$ , die in bezug auf  $\cup, \cap$ , Translation und Homothetie abgeschlossen ist;  $q$  sei ein Funktional so, daß  $q(0) = 0$ ,  $q(TA) = q(A)$ ,  $q(A) + q(B) = q(A \cup B) + q(A \cap B)$ . Wenn noch  $q$  einer Stetigkeitsbedingung unterworfen ist, so ist  $q(\lambda A)$  für jedes  $A \in \mathfrak{M}$  ein Polynom (bezüglich  $\lambda$ ) vom Grad  $\leq n$  ( $TA$  die Translatierte von  $A$ ,  $\lambda A$  die Menge aller Punkte  $\lambda x$ ,  $x \in A$ ). (2) Sind  $A \subset R_n$ ,  $m(A) > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  und die ganze Zahl  $k \geq 1$  gegeben, so gibt es eine Zahl  $\delta > 0$ , so daß man für irgendwelche Translationen  $T_r$  ( $r = 1, \dots, k$ )  $\delta$  erhält:  $m(A_1 \cap \dots \cap A_r) > (1 - \varepsilon) m(A)$ ,  $A_r = T_r(A)$  [Stein-

haus-Rademacher, *Fundamenta Math.* **1**, 93—104 (1920). (3) Jede ebene Menge positiven Maßes enthält eine perfekte Menge, die ein direktes Produkt von 2 linearen Mengen ist (Lösung eines Problems von Erdős). *G. Kurepa.*

Szymanski, Piotr: Sur une correspondance effective entre l'ensemble des fonctions continues et un ensemble de nombres réels. *Bull. sci. École polytechn. Timişoara* **11**, 185—195 (1944).

Die Menge aller stetigen Funktionen wird auf eine Teilmenge  $H$  des offenen Einheitsintervalles  $(0, 1)$  effektiv abgebildet. Die Menge  $H$  ist zusammenhangslos und liegt in  $(0, 1)$  dicht. Bezeichnet man die stetigen Funktionen mit  $q$  und die zugeordneten Zahlen mit  $S(q)$ , so gilt folgender Satz: Sind  $q_1, q_2, \dots$  und  $q$  gleichgradig stetig und gilt  $S(q_n) \rightarrow S(q)$ , so ist auch  $q_n \rightarrow q$ . Es werden die Bedingungen angegeben, unter welchen die Umkehrung dieses Satzes gilt.

*J. Novák.*

Goldenberg, Tudor: On a system of axioms used for the definition of measure of abstract sets. *Bull. math. Soc. Roumaine Sci.* **45**, 97—102 (1943).

Das abhängige Torniërsche Axiomensystem der Maßtheorie wird zu einem unabhängigen vereinfacht. *K. Krickeberg.*

Gomes, A. Pereira: Einführung in das Studium des Begriffs der Funktion in Räumen ohne Punkte. *Portugaliae Math.* **5**, 1—120 (1946) [Portugiesisch mit französ. Zusammenfassg.].

Gomes, A. Pereira: Berichtigung zur Arbeit: Einführung in das Studium des Begriffs der Funktion in Räumen ohne Punkte. *Portugaliae Math.* **5**, 218 (1946) [Portugiesisch].

Die Arbeit besteht in einer systematischen Darstellung des Operierens mit Spektralcharakteren  $M_f(\lambda)$  (oder der ihnen entsprechenden Carathéodoryschen Ortsfunktionen) in einer Booleschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{C}$ , die, falls  $\mathfrak{C}$  eine Mengenalgebra ist, vermöge  $M_f(\lambda) = \{x: f(x) \geq \lambda\}$  einer reellen (endlichen oder unendlichen) Funktion  $f$  im üblichen Sinne entsprechen. Begriffe wie Anordnung, Bildung des Maximums oder Minimums, Addition, Multiplikation oder Division im Bereich dieser verallgemeinerten Funktionen werden besprochen. Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz mit Hilfe der Schränkungstransformation behandelt. Liegt in  $\mathfrak{C}$  eine Topologie, d. h. ein den Axiomen  $0 = 0, A \subseteq A, \bar{A} = \overline{A}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  genügender Operator  $\bar{\phantom{x}}$  vor, so läßt sich die obere Limesfunktion  $\bar{f}$  von  $f$  durch  $M_{\bar{f}}(\lambda) = \bigcap_{\mu < \lambda} M_f(\mu)$  definieren, ähnlich die untere Limesfunktion, und damit Begriffe wie „oberhalb stetig, stetig, punktweise unstetig usw. Schließlich werden Bairesche „Funktionen“ und Borelsche „Mengen“ betrachtet. *K. Krickeberg.*

Gomes, Ruy Luis: Sur la notion de fonctionnelle. *Portugaliae Math.* **5**, 202—206 (1946).

Quelques précisions et résultats à propos de la notion de fonctionnelle étudiée par A. Pereira Gomes dans sa Thèse (v. la récénsion précédente), en tant qu'application de la droite euclidienne sur un lattice déterminé. *A. Pereira Gomes.*

Tarski, Alfred: Ideale in vollständigen Mengenkörpern. II. *Fundamenta Math.* **33**, 51—65 (1945).

Teil I s. dies. Zbl. **21**, 109. Ein Ideal  $I$  eines Booleschen Verbandes  $B$  heißt  $n$ -gesättigt (für eine Kardinalzahl  $n$ ), wenn  $B - I$  keine Menge  $M$  von  $n$  Elementen mit  $x \cap y \in I$  für alle  $x, y (\neq x) \in M$  enthält. Jedes  $\aleph_0$ -gesättigte Ideal ist bereits  $n$ -gesättigt für eine endliche Zahl  $n$ . Genau dann besitzt  $B$  eine additive Maßfunktion mit nur endlich vielen Werten, welche für alle Punkte (= obere Nachbarn des kleinsten Elementes) den Wert 0 annimmt, wenn das von den Punkten erzeugte Ideal in einem  $\aleph_0$ -gesättigten Ideal enthalten ist. Topologische Anwendungen. *G. Pickert.*

**Monna, A. F.:** Sur le problème de la mesure. Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 63—64 = Indagationes Math. 8, 27—28 (1946).

Als Folgerung aus dem Hahn-Banachschen Satz wird die Existenz von endlich additiven beschränkten reellen Funktionen über dem Verband aller Teilmengen einer beliebigen Menge, die auf einem vorgeschriebenen Unterverband verschwinden, bewiesen.

*K. Krickeberg.*

**Mackey, George W.:** Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattices. Bull. Amer. math. Soc. 50, 719—722 (1944).

Dann und nur dann existiert über dem Raum aller reellen Funktionen über einer Menge  $S$  ein positives lineares Funktional, das keine endliche Linearkombination von „Punktunktionalen“ der Gestalt  $F(f) = f(s_0)$  darstellt, wenn es über dem System aller Teilmengen von  $S$  ein genau zwei Werte annehmendes und auf jeder einelementigen Menge verschwindendes Maß gibt.

*K. Krickeberg.*

**Hewitt, Edwin:** Two notes on measure theory. Bull. Amer. math. Soc. 49, 719—721 (1943).

Bewiesen werden die Existenz eines gewissen stetigen positiven linearen Funktional und eines im System aller Teilmengen einer Menge erklärten, höchstens auf abzählbar vielen eipunktigen Mengen nicht verschwindenden Maßes. Beide lassen sich jedoch unmittelbar explizit definieren.

*K. Krickeberg.*

**Smiley, Malcolm:** An extension of metric distributive lattices with an application in general analysis. Trans. Amer. math. Soc. 56, 435—447 (1944).

Analog zum McNeilleschen Einbettungsverfahren wird ein metrischer distributiver Verband  $L$  in eine metrische Boolesche Algebra eingebettet. Nach Kakutani u. a. folgt hieraus, wenn die die Metrik erzeugende modulare Funktion  $\mu$  beschränkt ist, die Einbettbarkeit von  $L$  in einen Booleschen Mengen- $\sigma$ -Verband mit einem  $\mu$  fortsetzenden abzählbar additiven Maß. Als Anwendung ergibt sich in diesem Fall die Äquivalenz eines Integrationsverfahrens von E. H. Moore mit der üblichen Radonschen Integration.

*K. Krickeberg.*

**Mibu, Yoshimiti:** Relations between measure and topology in some Boolean space. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 454—458 (1944).

In einem kompakten Hausdorffschen Raum sei die abgeschlossene Hülle  $\bar{G}$  jeder offenen Menge  $G$  offen, und das System  $\mathfrak{G}$  der gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen bilde eine Basis. Jede endliche, in  $\mathfrak{G}$  endlich additive Funktion  $m$ , mit der Eigenschaft  $\lim m(E_n) = m(\bigcup_n E_n)$ , falls  $E_n \subseteq E_{n+1} \in \mathfrak{G}$ , erzeugt ein äußeres Maß im Sinne von Carathéodory:  $m^*(A) = \inf \{m(E); A \subseteq E \in \mathfrak{G}\}$ . Verschwindet  $m$  nur auf der leeren Menge, so gilt  $m^*(A) = 0$  dann und nur dann, wenn  $A$  nirgends dicht (gleichbedeutend: von erster Kategorie) ist, d. h.  $A$  ist meßbar dann und nur dann, wenn  $A$  die Bairesche Eigenschaft hat.

*K. Krickeberg.*

(1) **Loomis, Lynn H.:** The intrinsic measure theory of Riemannian and Euclidean metric spaces. Ann. of Math., II. Ser. 45, 367—374 (1944).

(2) **Loomis, Lynn H.:** Abstract congruence and the uniqueness of Haar measure. Ann. of Math. II. Ser. 46, 348—355 (1945).

In (1) bedeutet  $M$  einen metrischen Raum mit kompakten abgeschlossenen Kugeln. Dann und nur dann existiert ein Maß  $\mu$  in  $M$ , so daß mit positiven Konstanten  $\alpha$ ,  $C_1$  und  $C_2$  für jede Kugel  $S$  vom Radius  $r$  gilt  $C_1 r^{2\alpha} \leq \mu(S) \leq C_2 r^{2\alpha}$ , wenn es ein  $K \geq 1$  gibt, so daß, wenn eine abgeschlossene Kugel vom Radius  $r$  mit  $n$  offenen Kugeln vom Radius  $x$  überdeckt wird, bei beliebigem  $a > 0$  jede abgeschlossene Kugel vom Radius  $a r$  mit  $n$  offenen Kugeln vom Radius  $K a x$  überdeckt werden kann.  $\alpha$  ist dann eindeutig bestimmt, und man kann  $C_1 = K^{-2\alpha}$ ,  $C_2 = K^{2\alpha}$  wählen. Im Fall  $K = 1$  (euklidischer metrischer Raum) ist  $\mu$  bereits durch die Forderung, daß abgeschlossene Kugeln gleichen Radius auch gleiches



Maß haben, eindeutig (d. h. bis auf einen konstanten Faktor) bestimmt. Eine ähnliche Maßkonstruktion, zu der die Überdeckungsforderung nur „lokal“ vorausgesetzt wird, führt in Riemannschen Räumen zum Ziel, mit entsprechender Eindeutigkeitsaussage bei lokal euklidischen Räumen. — In (2) bildet  $M$  zunächst einen lokal kompakten metrischen Raum. Sind  $S_1$  und  $S_2$  kompakte Kugeln gleichen Radius, so soll mit  $S_1$  auch  $S_2$  durch  $n$  offene Kugeln vom Radius  $x$  überdeckbar sein. Dann gibt es ein Maß in  $M$ , so daß kompakte Kugeln gleichen Radius auch gleiches Maß haben, und es ist bereits durch diese schwache Kongruenzforderung eindeutig bestimmt. Das Maß erfüllt weitere, stärkere Invarianzforderungen, und die verwendeten Methoden führen auch im Fall einer (nicht notwendig von vornherein metrisierten) lokal kompakten topologischen Gruppe oder, noch allgemeiner, lokal kompakter uniformer Strukturen zur Konstruktion und Eindeutigkeit des Haarschen Maßes. Existenz und Eindeutigkeit werden gleichzeitig, direkt und ohne Verwendung des Auswahlaxioms mittels einer Darstellung des Maßes kompakter Mengen durch Grenzwerte von Haarschen Quotienten, die auch in (1) Verwendung finden, bewiesen. *K. Krickeberg.*

**Kakutani, Shizuo and Kunihiko Kodaira:** Über das Haarsche Maß in der lokal bikompakten Gruppe. *Proc. imp. Acad. Tokyo* **20**, 444—450 (1944).

Als Ergänzung zum Eindeutigkeitsatz über das Haarsche Maß in einer lokal kompakten topologischen Gruppe  $G$  wird unter der Voraussetzung,  $G$  sei abzählbar im Unendlichen, bewiesen, daß das im Bereich der Borelschen und das im Bereich der Baireschen Mengen betrachtete Haarsche Maß das gleiche äußere Maß erzeugen. *K. Krickeberg.*

**Alexandroff, A. D.:** Additive set-functions in abstract spaces. *Mat. Sbornik*, n. Ser. **13** (55), 169—238 (1943) [Englisch mit russischer Zusammenfassg.].

Letzte Mitteilung einer Monographie: vgl. dies. Zbl. **23**, 397; **28**, 73. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die schwache Konvergenz von Folgen von Belegungen. Besteht die Folge  $\{F_n\}$  aus paarweise fremden abgeschlossenen Mengen, ist die Vereinigung einer beliebigen Teilfolge abgeschlossen und gibt es eine Zahl  $a \neq 0$  mit  $\mu_n(F_n) a \geq 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), so kann die Folge  $\mu_n$  von Belegungen nicht schwach konvergieren. Anwendungen dieses Satzes. Beispiele. *A'. Csaszar.*

(1) **Buch, Kai Rander:** Some investigations of the set of values of measures in abstract space. *Danske Vid. Selsk., math.-fys. Medd.* **21**, Nr. 9, 70 p. (1945).

(2) **Buch, Kai Rander:** Ein Minimum-Problem im abstrakten Raum. *Mat. Tidsskr. B* **1945**, 30—34 (1945) [Dänisch].

(1) enthält nach größeren Vorbereitungen aus der abstrakten Maß- und Integraltheorie die Beweise der folgenden Sätze: I. Die Menge aller Werte  $q(A)$  eines abzählbar additiven, beschränkten, auf einem Borelschen Mengenring  $\mathfrak{F}$  definierten Maßes  $q$  ist abgeschlossen. II. Sind  $q$  und  $p$  zwei derartige Maße gleichen Definitionsbereichs  $\mathfrak{F}$ , so ist die Menge aller Punkte  $(q(A), p(A))$  mit  $A \in \mathfrak{F}$  abgeschlossen. Beide Sätze werden vermöge einer Abbildung von  $\mathfrak{F}$  auf das System  $\mathfrak{B}$  der Borelschen Teilmengen eines Intervalls auf den besonders behandelten Fall  $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$  zurückgeführt. (2) überträgt I auf abzählbar additive beschränkte  $q$  beliebigen Vorzeichens. Aus II folgt die Existenz eines Maximums von  $p$  unter der Nebenbedingung  $q(A) \leq \epsilon$  (mit festem  $\epsilon > 0$ ) und damit die Existenz einer Lösung eines in der Neyman-Pearson'schen Theorie der Prüfung einer gewissen statistischen Hypothese auftretenden Problems. Nimmt  $q = c p$  mit festem  $c > 0$  an der Stelle  $A^*$  aus  $\mathfrak{F}$  sein Minimum an, so ist  $A^*$  eine Lösung zu  $\epsilon = q(A^*)$ . *K. Krickeberg.*

**Sparre Andersen, Erik:** Inhalt und Maß in Produktmengen. *Mat. Tidsskr. B* **1944**, 19—23 (1944) [Dänisch].

Konstruktion des Produktinhaltes oder Produktmaßes beliebig vieler, durch  $\mu_i(E_i) = 1$  normierter Inhalte oder Maße  $\mu_i$  in Räumen  $E_i$ . *K. Krickeberg.*

**Areškin, G.:** Über die Theorie vielfacher Integrale in abstrakten Räumen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 5, 357—363 (1944) [Georgisch und Russisch].

Es seien  $R_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) Räume,  $f_k$  ( $k = 1, \dots, n - 1$ ) stetige Abbildungen von  $R_k$  auf  $R_{k+1}$ ,  $\mu(x^{k+1})$  für  $x^{k+1} \in R_{k+1}$  ein auf den Borelschen Teilmengen von  $f_k^{-1}(x^{k+1})$  definiertes Maß,  $\mu_n$  ein Maß auf  $R_n$ ,  $F^k$  reell und für  $x^{k+1} \in R_{k+1}$   $\mu(x^{k+1})$ -integrierbar auf  $f_k^{-1}(x^{k+1})$ , es gelte ferner  $F^{k+1}(x^{k+1}) = \int_{f_k^{-1}(x^{k+1})} F^k d\mu(x^{k+1})$ .

Untersuchung (ohne Beweise) des Integrals  $\int_{R_n} \left( \int_{f_n^{-1}(x^n)} \left( \dots \left( \int_{f_1^{-1}(x^2)} F^1 d\mu(x^2) \right) \dots \right) d\mu(x^n) \right) d\mu_n$ . *A. Császár.*

**Kakutani, Shizuo:** An extremum problem in product measure. Ann. of Math., II. Ser. 43, 742—756 (1942).

Ist  $\varphi(x, y)$  meßbar im Bereich  $0 \leq x, y \leq 1$  mit  $0 \leq \varphi(x, y) \leq 1$ , so sei  $A(\varphi) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y) dx dy$  und  $V(\varphi) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y) \varphi(y, z) dx dy dz$ . Im Bereich  $0 \leq \alpha \leq 1$  werden die Funktionen  $\lambda(\alpha) = \sup\{V(\varphi); A(\varphi) = \alpha\}$  und  $\mu(\alpha) = \inf\{V(\varphi); A(\varphi) = \alpha\}$  explizit angegeben.  $V$  nimmt die betreffenden Extremwerte bei charakteristischen Funktionen gewisser einfacher Mengen (Inneres von Polygonen) an. *K. Krickeberg.*

**Tautz, G.:** Approximation von absolut additiven Mengenfunktionen durch absolut stetige. Deutsche Math. 6, 553—558 (1943).

Verf. definiert zunächst einen auf absolut additive Mengenfunktionen anwendbaren Integrationsprozeß und zeigt, daß die mit seiner Hilfe über eine Folge von  $B$ -meßbaren Mengen, die sich auf einen Punkt zusammenziehen, gebildeten Mittelwerte der absolut additiven Mengenfunktion  $F$  schwach gegen  $F$  konvergieren.

*J. Radon.*

**Knichal, Vladimir:** Sur la distribution des mesures sur une sphère à  $n$  dimensions. Časopis Mat. Fys. 71, 45—54 (1946) [mit tschechischer Zusammenfassg.].

Let  $K_n$  be the unit sphere  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$  in  $R_{n+1}$ . Let  $\mu$  denote the  $n$ -dimensional measure of subsets of  $K_n$ . Let  $\nu$  be any finite non-negative countably additive measure defined for all Borel subsets of  $K_n$ . For every Borel set  $M \subset K_n$ , there exist two proper orthogonal transformations  $\beta$  and  $\beta'$  of  $R_{n+1}$  such that  $\nu(\beta M) \leq \nu(K_n) \mu(M)/\mu(K_n) \leq \nu(\beta' M)$ . *E. Hewitt.*

**Jeffery, R. L. and H. W. Ellis:** Cesàro totalization. Trans. roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 36, 19—44 (1942).

**Jeffery, R. L. and D. S. Miller:** Convergence factors for generalized integrals. Duke math. J. 12, 127—142 (1945).

**Bosanquet, L. S.:** Some properties of Cesàro-Lebesgue integrals. Proc. London math. Soc., II. Ser. 49, 40—62 (1945).

Généralisations de l'intégrale de Lebesgue ou de la totalisation de Denjoy, obtenues en remplaçant les limites ordinaires par des limites de Cesàro ou des limites plus générales. Propriétés des fonctions obtenues. *A. Revuz.*

**Jeffery, R. L.:** Perron integrals. Bull. Amer. math. Soc. 48, 714—717 (1942).

**McShane, E. J.:** On Perron integration. Bull. Amer. math. Soc. 48, 718—726 (1942).

Intégration par parties pour les intégrales de Perron. *A. Revuz.*

**O'Neill, Anne F.:** Contributions to the theory of derivatives. Duke math. J. 12, 89—99 (1945).

Übertragung einiger Begriffe und Sätze der Theorie der reellen Funktionen auf Funktionen  $f(x)$ ,  $x$  reell,  $f(x)$  aus einem partiell geordneten linearen Raum.

*A. Császár.*

**Rosenthal, Arthur:** On interval-functions and associated set-functions. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. 5, 153—156 (1945).

Bericht über den § 19 des Buches von Hahn-Rosenthal [Set Functions (dies. Zbl. 33, 53)], der die Differentiation einer Intervallfunktion  $\chi$  nach einer abzählbar additiven Mengenfunktion  $\psi$  und die Untersuchung der  $\chi$  (hinsichtlich  $\psi$ ) zugeordneten Mengenfunktion  $\varphi$  zum Gegenstand hat.  $\varphi$  ist, falls vorhanden, das  $\psi$ -Integral einer Derivierten von  $\chi$  nach  $\psi$ .

*K. Krickeberg.*

**Henstock, R.:** On interval functions and their integrals. J. London math. Soc. 21, 204—209 (1946).

Modification de la définition des intégrales supérieure et inférieure de Burkill afin qu'elles soient toujours additives.

*A. Revuz.*

**Choquet, Gustave:** Primitive d'une fonction par rapport à une fonction à variation non bornée. C. r. Acad. Sci., Paris 218, 495—497 (1944).

**Zahorski, Zygmunt:** Sur les dérivées des fonctions partout dérivables. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 415—417 (1946).

Vgl. dies. Zbl. 38, 206.

**Zahorski, Zygmunt:** Problèmes de la théorie des ensembles et des fonctions. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 449—451 (1946).

Vgl. dies. Zbl. 33, 255.

**Germeier, G.:** Sur les nombres dérivés symétriques. Mat. Sbornik, n. Ser. 12 (54), 121—145 (1943) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Ist  $f(x)$  auf der Menge  $E$  meßbar und bedeutet  $\bar{D}f(x)$  bzw.  $Df(x)$  die obere bzw. untere symmetrische Derivierte von  $f(x)$  (die außerhalb  $E$  überhaupt nicht definiert ist), so gilt fast überall in  $E$  entweder  $\bar{D}f = \underline{D}f =$  endlich, oder  $\bar{D}f = +\infty$ ,  $\underline{D}f = -\infty$ . Ähnliche Sätze für zweite symmetrische Derivierte. *A. Császár.*

**Roger, Frédéric:** Sur un problème de M. Denjoy. C. r. Acad. Sci., Paris 214, 942—944 (1942).

Existiert  $f'(x_0)$ , so wird  $D_2^+ f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} [f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)] \cdot 2(x - x_0)^2$  definiert, und ähnlicherweise definiert man  $D_{2+}$ ,  $D_2^-$ ,  $D_{2-}$ . Beispiel einer Funktion, die einer Lipschitz-Bedingung genügt und für die auf einer Menge von positivem Maß  $D_2^+ = D_{2+} = +\infty$ ,  $D_2^- = D_{2-} = -\infty$  gilt. *A. Császár.*

**Sélivanoff, N. A.:** Note sur les fonctions dérivées. Bull. (Izvestija) math. mech. Inst. Univ. Tomsk 3, 125—127 (1946) [Russisch und Französisch].

Hauptergebnis: Das Produkt einer beschränkten Ableitung und einer stetigen Funktion ist eine Ableitung.

*A. Császár.*

**Salem, R.:** On some singular monotonic functions which are strictly increasing. Trans. Amer. math. Soc. 53, 427—439 (1943).

The author gives a simple new direct construction of a singular function  $f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , continuous in  $[0, 1]$ , monotone increasing and singular in  $[0, 1]$ , that is, such that  $f(x) = f(x')$  whenever  $x = x'$ , and such that  $f'(x) = 0$  almost everywhere in  $[0, 1]$ . The author states that all other constructions of analogous functions are either not simple, or not direct [See for another simple direct construction L. Cesari, this Zbl. 5, 248]. The author considers then the function  $\Phi(x)$  defined by H. Minkowski in order to establish a one-one correspondence between the rational numbers and the quadratic irrationals. The author proves that  $\Phi(x)$  is a monotone strictly increasing and singular function, and that  $\Phi(x)$  is Lipschitz, where  $\alpha = \frac{1}{2} \ln 2 \ln \theta$ , and  $\theta = \frac{1}{2}(5^{1/2} + 1)$  is the Fibonacci number. Farey sequences are used in the discussion.

*L. Cesari.*

**Yang, Cheng-Ning:** On the uniqueness of Young's differentials. Bull. Amer. math. Soc. 50, 373—375 (1944).

Das Hauptergebnis ist enthalten in Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung (dies. Zbl. 22, 123), insbes. Bd. 2, S. 113.

*A. Császár.*



Poor, Vincent C.: On the Hamilton differential. Bull. Amer. math. Soc. 51, 945—948 (1945).

Die reelle Funktion  $f(x)$  des  $n$ -dimensionalen Vektors  $x$  hat in  $x_0$  ein Differential im Sinne von Hamilton, wenn  $\varphi(\lambda) = f(x_0 + \lambda h)$  für beliebiges  $h$  eine Ableitung bei  $\lambda = 0$  besitzt. Bedingungen dafür, daß aus der Existenz eines Differentials im Sinne von Hamilton die Existenz des Differentials im Sinne von Rainich [Amer. J. Math. 46, 71—94 (1924), 78] folgt. A'. Császár.

Dieudonné, Jean: Dérivées et différences des fonctions de variables réelles. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 61, 231—248 (1944).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß  $\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n)$  für  $h_1, h_2, \dots, h_n \rightarrow 0$  konvergent bzw. beschränkt bzw. positiv sei, wo  $\Delta f(x_0; h_1) = f(x_0 + h_1) - f(x_0)$ ,  $\Delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n) = \Delta^{n-1} f(x_0 + h_n; h_1, \dots, h_{n-1}) - \Delta^{n-1} f(x_0; h_1, \dots, h_{n-1})$ . Als Korollarien ergeben sich bekannte Sätze (s. z. B.: T. Popoviciu, dies. Zbl. 9, 59). Auch Differenzen der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen werden ähnlicherweise untersucht. J. Aczél.

Tibaldo, Lina: Sulla differenziabilità quasi regolare delle funzioni di tre variabili. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 13, 78—88 (1942).

Dreidimensionales Analogon eines Satzes von Radó (dies. Zbl. 18, 314) und Caccioppoli und Scorza Dragoni (dies. Zbl. 20, 135). A'. Császár.

Myshkis (Myškis), A.: On the existence of the total differential on the boundary of a plane domain. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 48, 82—85 (1945).

Myshkis (Myškis), A.: On the existence of the complete differential on the boundary of a plane domain. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 359—392 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Es seien  $G \subset R_2$  eine offene Menge,  $A$  ein Randpunkt von  $G$ ,  $f(P)$  eine auf  $G + A$  definierte reelle Funktion. Hauptergebnis: Ist  $f(P)$  in  $A$  stetig und streben die vier extremen partiellen Derivierten nach  $x$  (bzw. die nach  $y$ ) gegen  $a$  (bzw. gegen  $b$ ), wenn  $P \in G$ ,  $P \rightarrow A$ , so besitzt  $f(P)$  in  $A$  das Differential  $a dx + b dy$  dann und nur dann, wenn  $\lim_{P \rightarrow A} \lim_{Q \rightarrow A} [l(I')/l(P, Q)] < \infty$ ;  $l(I')$  ist die Länge einer rektifizierbaren Kurve  $I' \subset G$ , die  $P$  und  $Q$  verbindet. A'. Császár.

Zygmund, A.: Smooth functions. Duke math. J. 12, 47—76 (1945).

A function  $F(x)$  is said to be smooth at a point  $x_0$  (or to satisfy condition  $\lambda$ ) if (1)  $\Delta(h)/h = o(1)$  as  $h \rightarrow 0$  where  $\Delta(h) = F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0)$ ;  $F$  is said to satisfy condition  $\lambda$  if (2)  $\Delta(h)/h = O(1)$  as  $h \rightarrow 0$ . The function  $F$  is said to satisfy conditions  $\lambda^*$ ,  $\lambda^*$  in an interval if (1) and (2) hold uniformly in an interval;  $F$  is said to satisfy condition  $\lambda_p$ , or  $\lambda_p$ , if  $F(x) \in L^p$ ,  $p \geq 1$ , and  $\int_0^{2\pi} |\Delta(h)|^p dx = o(h)$  as  $h \rightarrow 0$ , or  $= O(h)$  as  $h \rightarrow 0$ . If  $F(x)$  is continuous and smooth in  $(a, b)$ , then  $F''(x)$  exists in a set which is everywhere dense in every sub-interval  $[\alpha, \beta]$  and is of the power of the continuum there. The author proves that  $F'(x)$  has there the Darboux property, that is,  $F'(x)$  takes in  $[\alpha, \beta]$  all intermediate values between  $F'(\alpha)$  and  $F'(\beta)$ . Other results: If  $f(x)$  is periodic and continuous at a point  $x_0$ , then the conjugate  $F^*(x)$  of the integral  $F(x)$  of  $f(x)$  is smooth at the same point. If  $f(x)$  is periodic and satisfies condition  $\lambda^*$ , or  $\lambda^*$ , so does its conjugate  $f^*(x)$ . A number of further results, extensions to properties  $\lambda_p$ ,  $\lambda_p$ , and applications are given. L. Cesari.

Tsuji, Masatsugu: On Tonelli's theorems on a sequence of rectifiable curves. Japanese J. Math. 14, 401—410 (1941).

Umformung von Theoremen über approximative Konvergenz aus Tonellis Fondamenti di calcolo delle variazioni I. 92—105; 186—187 (Bologna 1921). G. Aumann.

**Bouligand, Georges:** Recherche opératoire de courbes et surfaces rectifiables. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 120—122 (1946).

Die Aufgabe, alle rektifizierbaren Kurven  $y = y(x)$  zu bestimmen mit vorgegebener Bogenlänge  $s(x)$  (bei beschränktem Differenzenquotient  $\leq 1$ ), wird durch das  $L$ -Integral  $y(x) = \int_0^x \sigma(t) (s'(t) - 1)^{1/2} dt$  gelöst, wobei  $\sigma(t) = \pm 1$  und meßbar. Beim entsprechenden Problem für Flächen mit vorgegebenem Bogenelement treten analoge Vorzeichenfunktionen auf. *G. Aumann.*

**Colucci, Antonio:** Sulla rappresentazione conforme delle superficie rettificabili. Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser. **11**, 93—98 (1941).

Flächen mit einer Parameterdarstellung mit Lipschitzbedingung gestatten ebene Abbildungen, die im Sinne des Oberflächenmaßes fast überall konform sind. *G. Aumann.*

**Vidal, E.:** Studium einiger Definitionen des Inhalts einer krummen Fläche. Euclides, Madrid **3**, 145—149 (1943) [Spanisch].

**Viola, T.:** Sulla definizione della lunghezza d'una curva. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **1**, 724—728 (1946).

Für einen einfachen Bogen im euklidischen  $E_3$  sind die Längendefinitionen von Jordan und Peano-Minkowski gleichwertig [vgl. G. Nöbeling, dies. Zbl. **27**, 261 (1943)]. *Otto Haupt.*

**Zwirner, G.:** A proposito di una interpretazione geometrica del lemma fondamentale del calcolo integrale. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **15**, 139—143 (1946).

Eine stetige Raumkurve, die in allen Punkten zu der  $(XY)$  Ebene parallele Tangenten hat und deren Projektion in dieser Ebene rektifizierbar ist, liegt vollständig in einer zu der  $(XY)$  Ebene parallelen Ebene. *J. Aczél.*

**Scorza-Dragoni, Giuseppe:** Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **15**, 8—24 (1946).

Für eine gewisse Klasse  $s$  von Flächen  $S = r(u, v)$  im  $E_3$  mit endlichem Lebesgueschen Flächenmaß  $A(S) = \iint r'_u \times r'_v du dv$  wird gezeigt: Es ist  $A(S)$  identisch (für  $S \in s$ ) mit jedem reellen  $f(S)$ ,  $S \in s$  von folgender Art: (1)  $f \geq 0$ , (2)  $f$  unterhalb stetig, (3)  $f$  ist  $\sigma$ -additiv für gewisse spezielle Zerlegungen von  $S$ , (4)  $f(S) = f(S')$  für kongruente  $S, S' \in s$ , (5)  $f(S) = A(S)$  für Polyeder  $S \in s$ . *Otto Haupt.*

**Mambriani, A.:** Su due notevoli integrali del Tonelli. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **23**, 51—68 (1944).

$f(x, y)$  im Quadrat  $Q$  reelle, stetige Funktion: Tonelli-Integral  $S_x(f)$  = Lebesgue-Integral der Totalvariation von  $f$  bei festem  $y$ ; analog  $S_y(f)$ . Ferner  $D_r$ ,  $r = 1, 2, \dots$  Triangulation von  $Q$ , so daß der maximale Durchmesser der Teile von  $D_r$  mit  $r \rightarrow \infty$  gegen Null geht,  $z = f_r(x, y)$  das der „Flächen“  $z = f(x, y)$  einbeschriebene Polyeder, dessen Projektion  $D_r$  ist. Es werden  $D_r$  angegeben, so daß  $S_x(f) = \lim S_x(f_r)$  oder auch  $S_x(f) = \lim S_x(f_r)$  und entsprechend für  $S_y$ . *Otto Haupt.*

**Young, L. C.:** A lemma in the theory of surfaces. J. London math. Soc. **19**, 209—212 (1944).

Zu jedem Polyeder  $S$  vom Flächeninhalt  $j(S) = N$ , dessen Begrenzung innerhalb einer Kugel vom Radius  $a$  liegt, und beliebigem  $\varepsilon > 0$  existieren geschlossene Polyeder  $S', S''$  mit  $j(S') \leq \varepsilon N$ ,  $j(S'') = j(S')$  sowie ein Polyeder  $S_0$  mit  $S \subset S' \subset S_0 \subset S''$ , so daß  $S_0$  und  $S'$  in einer konzentrischen Kugel vom Radius  $a \cdot \exp(\varepsilon^{-1})$  liegen. Dabei bedeutet z. B.  $T = S \subset S'$ , daß für alle stetigen  $F(x, J)$  mit  $F(x, qJ) = q F(x, J)$ ,  $q > 0$  gilt:  $L_T(F) = L_S(F) + L_{S'}(F)$ , wobei  $L_T(F) = \iiint F(x(u, v), J(u, v)) du dv$  und  $T = (x(u, v))$ , ferner  $J(u, v)$  das Tripel der Jacobischen Determinanten von  $x(u, v)$ ; und entsprechend für  $L_S(F)$ ,  $L_{S'}(F)$ . *Otto Haupt.*

**Busemann, Herbert:** Intrinsic area. Proc. nat. Acad. Sci. USA **32**, 5—8 (1946).

Definition eines  $n$ -dimensionalen Maßes  $a_n(S)$  für Flächen  $S = x(P)$ , wo

$x = x(p) \in R$ ,  $p \in P$ ;  $R$  metrisch;  $P$  metrisch, separabel mit bogenverknüpfter vollständiger Hülle;  $x(p)$  gleichmäßig stetig. Eigenschaften: (1)  $a_n(S)$  unabhängig von der Parametrisierung  $x(p)$ ; (2) für  $n$ -dimensionale Polyeder  $S$  ist  $a_n(S)$  der elementare Inhalt; (3)  $a_n(S)$  ist nur von der Geometrie in  $x(p)$  abhängig; (4) ist  $x'(p)$  eine entsprechende Abbildung von  $P$  in  $R'$  und  $x'(p) x'(p_1) \leq b x(p) x(p_1)$ , so ist  $a_n(x'(P)) \leq b^n a_n(x(P))$ . — In Riemannschen Räumen und für  $S$  der Klasse  $C'$  ist  $a_n$  durch (2)–(4) eindeutig bestimmt und gleich dem üblichen Integral.

Otto Haupt.

**Radó, T.: On semi-continuity.** Amer. math. Monthly 49, 445–450 (1942).

Expository article presented at the annual meeting of the Math. Assoc. of America with a special aim to show, on the one hand, how the semi-continuity (s. c.) originated abstractly (by 1900) and on the other hand how various and natural are the applications of this notion. The s. c. functions being limits of monotonic sequences of continuous functions, are „stepping stones between c. and measurable functions ... [and] ... may be used to construct a most beautiful and pedagogically sound theory of measurable functions and their integrals... Various examples are presented. So the upper s. c. is shown to be naturally tied with the potentials of negative mass-distributions and subharmonic functions. The problem of equivalence of definition of area of continuous surfaces is stressed in approaching a surface by any polyhedra and inscribed polyhedra respectively. The lower s. c. is shown to be linked with the direct method in the Calculus of variations. For more details v. the authors surveys, this Zbl. 7, 118; 16, 249.

G. Kurepa.

**Morse, A. P. and John F. Randolph: The  $\Phi$  rectifiable subsets of the plane.** Trans. Amer. math. Soc. 55, 236–305 (1944).

Für die Punktmengen des euklidischen  $E_2$  sei  $\Phi$  eine Maßfunktion im Sinne von Carathéodory ( $\Phi \geq 0$ , monoton,  $\sigma$ -vereinigungsbeschränkt, additiv für Mengen positiven Abstandes). Die Menge  $A \subset E_2$  heißt rektifizierbar, wenn  $A$  Teilmenge einer streng rektifizierbaren  $B \subset E_2$  ist, d. h. eines eindeutigen Streckbildes  $B = f(J)$ , wobei  $f$  einer Lipschitzbedingung  $|f(t') - f(t'')| \leq M |t' - t''|$  genügt; es heißt  $C$   $\Phi$ -rektifizierbar, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein streng rektifizierbares  $B$  gehört mit  $\Phi(C \cap (E_2 - B)) < \varepsilon$ . Die  $\Phi$ -Rektifizierbarkeit wird gekennzeichnet durch 8 gleichwertige „Dichteigenschaften“ bezüglich  $\Phi$ ; außerdem werden Beziehungen angegeben zwischen der  $\Phi$ - und  $L$ -Rektifizierbarkeit, wobei  $L$  das lineare Maß von Carathéodory bezeichnet.

Otto Haupt.

**Federer, H.: Surface area. I. II.** Trans. Amer. math. Soc. 55, 420–437, 438–456 (1944).

II. Teil. Definition eines „ $k$ -dimensionalen“ Maßes  $q$  im  $E_n$  ( $k \leq n$ ), welches als Verallgemeinerung des linearen Carathéodoryschen Maßes  $L$  im  $E_n$  aufgefaßt werden kann. — Es seien:  $f$  Lebesgue-meßbare Abbildung von  $E_k$  in  $E_n$ ;  $T \subset E_k$  Lebesgue-meßbare Menge;  $p(M)$  die Mächtigkeit der Menge  $M$ , falls diese endlich, sonst  $p(M) = +\infty$ ;  $N(f, T, y) = p\{T \cap |f(x) - y|\}; J f(x)$  die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Unterdeterminanten (maximaler Ordnung) der Funktionalmatrix von  $f$  gebildet vermittelt das approximative Differentials von  $f$  Satz: Vor. Für  $x \in T$  sei  $\lim_{z \rightarrow x} \overline{\text{appr}} |f(z) - f(x)|/|z - x| < +\infty$ . Beh.  $\int_{E_k} N(f, T, y) dq(y) = \int_T J f(x) dx$ . — Diese Gleichung wird, insbes. bei  $k = 2$  und  $k = n = 1$ , auch unter modifizierten Vor. bewiesen. — I. Teil. Für  $k = 1$ ,  $n = 2$  wird u. a. gezeigt: Ist  $g$  stetige reelle Funktion über dem Rechteck  $R$  und  $S = (x, y, z = g(x, y))$ ,  $(x, y) \in R$ , so ist  $q(S)$  gleich dem Lebesgueschen Flächeninhalt von  $S$ . — Ist  $h$  stetige Abbildung von  $J = (a \leq x \leq b)$  in  $E_2$ , so gilt  $\int N(h, J, y) dL(y) = \text{Totalvariation von } h \text{ in } J$  (wobei  $L$  lin. Carathéodory-Maß).

Otto Haupt.



**Federer, Herbert:** Coincidence functions and their integrals. Trans. Amer. math. Soc. **59**, 441—466 (1946).

I. Sei  $L_r$  das  $r$ -dimensionale Lebesguesche Maß im euklid.  $E_r$ . Sei  $U \subset E_k$  bzw.  $V \subset E_{n-k}$   $L_k$ - bzw.  $L_{n-k}$ -meßbar,  $f$  bzw.  $g$  Abbildung von  $U$  bzw.  $V$  in  $E_n$ . Sei  $W(f, U; g, V)$  die Mächtigkeit der Menge aller  $(u, v) \in U \times V$  mit  $f(u) = g(v)$ . Sei  $T(z)$  die Translation  $z \rightarrow z + x$ ,  $x \in E_n$  und  $(\mathfrak{G}_n$  bzw.  $\mathfrak{H}_n$  die Gruppe der orthogonalen (den Nullpunkt festlassenden) bzw. abstandstreuen Abbildungen  $P$  bzw.  $P: T(z)$  von  $E_n$  auf sich. Bei geeigneter Metrisierung von  $\mathfrak{H}_n$  ist  $\mathfrak{H}_n$  topologische, kompakte Gruppe, deren Haarsches Maß  $h_n$  sei,  $h_n(\mathfrak{G}_n) = 1$ . Für Lipschitzfunktionen  $f, g$  gilt dann

$$\int_{\mathfrak{G}_n} \int_{E_n} W(f, U; P: T(z)(g), V) dL_n(z) dh_n(P) = b(k, n) \int_U f(u) dL_k(u) \int_V g(v) dL_{n-k}(v),$$

wobei die Integrale rechter Hand die Inhalte der „Flächen“  $f(U)$  bzw.  $g(V)$  sind und die durch  $k, n$  eindeutig bestimmte Konstante  $b(k, n)$  mittels der Gammafunktion darstellbar ist. Für spezielle Fälle vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie (dies. Zbl. **14**, 325; **16**, 277). — II. Neue Inhaltsdefinition für alle stetigen,  $k$ -dimensionalen Flächen. — III. Beweis des Gauß-Greenschen Satzes für jede beschränkte, offene Menge des  $E_n$ , deren Begrenzung endliches  $(n-1)$ -dimensionales Hausdorffmaß besitzt (vgl. nachf. Referat). *Otto Haupt.*

**Federer, Herbert:** The Gauss-Green theorem. Trans. Amer. math. Soc. **58**, 44—76 (1945).

Seien  $x, z, u$  Punkte bzw. Vektoren im euklid.  $E_k$  und  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , ihre Komponenten nach den Koordinatenachsen,  $K(x, r)$  die Kugel um  $x$  mit Radius  $r$  und  $H(x, r, u)$  diejenige Halbkugel von  $K(x, r)$ , für deren Punkte  $z$  des Skalarprodukt  $(z - x)u > 0$  ist,  $|u| = 1$ . Falls  $\lim_{r \rightarrow 0+} |H(x, r, u) - S| = 0$  für  $r \rightarrow 0+$ , wo  $S \subset E_k$ , „weist  $u$  in  $S^+$ . Wenn  $u$  in  $E_k - S$  und  $-u$  in  $S$  weist, heißt  $u$  äußere Normale  $u(x, S)$  an  $S$  in  $x$ ; es ist  $u(x, S)$ , wenn vorhanden, eindeutig bestimmt. Soweit die äußere Normale nicht vorhanden, wird  $u(x, S) = 0$  gesetzt. — Sei  $F$  das früher (vgl. das vorletzte Referat) erklärte  $(k-1)$ -dimens. Maß (welches für  $k=2$  sich auf das lineare Carathéodory-Maß reduziert). Für  $S \subset E_k$  wird  $W_j(S)$  erklärt als das System aller reellen Funktionen  $f|D$  mit  $S \subset D$  der folgenden Art:  $\int f(x) u_j(x, S) dF(x)$  und  $\int_S D_j f(x) dx$  sind endlich,

wobei  $D_j$  die partielle Ableitung in Richtung des  $j$ -ten Koordinatenvektors; ist es existiert ein  $V \subset E_{k-1}$  mit  $V \rightarrow 0$  und mit  $f(Y(b)) - f(Y(a)) = \int_a^b D_j f(Y(t)) dt$ ,

wo  $Y(t) = (y_1, \dots, y_{j-1}, t, y_j, \dots, y_{k-1}) \in S$ ,  $y = (y_1, \dots, y_{k-1}) \in E_{k-1} - V$ ,  $a \leq t \leq b$ . — Satz. Für beschränktes, offenes  $A \subset E_k$ ,  $F(\bar{A} - A) < +\infty$ ,  $f \in W_k(\bar{A})$ , gilt  $\int_A D_k f(x) dx = \int f u_k(x, A) dF(x)$ , falls  $A - A$  einer gewissen weiteren Bedingung (B) genügt, bezüglich deren auf die Arbeit zu verweisen ist; (B) ist für  $k=2$  von selbst für solche  $A$  erfüllt; ob auch für  $k \geq 3$ , ist offen. — Im I. Teil der Arbeit wird überdies ein Satz über Transformation von Integralen bewiesen.

*Otto Haupt.*

**Westberg, R.:** On the integral theorems of Gauß and Stokes. Fysiogr. Sällsk. Lund. Förl. **13**, Nr. 15 (1943).

Im Schrifttum gibt es eine große Anzahl von Formeln, die mehr oder minder unmittelbar aus den nach Gauß und Stokes benannten Integralsätzen hergeleitet werden können. Es wird gezeigt, daß alle diese Formeln in zwei einfachen allgemeinen Sätzen enthalten sind, die ebenfalls als Sätze von Gauß und Stokes bezeichnet werden sollen. Der Satz von Gauß lautet:  $\int_V P\{V, p\} dV = \int_F P\{df, p\}$ .

Hierin bedeutet  $P\{u, p\}$  eine Funktion, die linearhomogen von einem Vektor  $u$ ,

und in irgendeiner Weise von Skalaren, Vektoren, Tensoren, die zusammenfassend mit  $p$  bezeichnet sind, abhängt.  $V$  ist ein Raumteil,  $F$  seine Begrenzungsfläche,  $dV$  das Element des Raumes,  $df$  der nach außen gerichtete Vektor des Flächenelements. Der Satz von Stokes lautet:  $\int_F P\{df \times V, p\} = \int_S P\{ds, p\}$ . Hierin ist  $F$  ein Flächenstück,  $S$  seine Umrißkurve,  $ds$  ihr Bogenelement. Schließlich werden noch die Gestalten der beiden Formel für den zweidimensionalen Raum angegeben.

*L. Schrutka.*

**Artin, Emil:** On the independence of line integrals on the path. Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 489—490 (1941).

**Aronszajn, N. and G. H. Hardy:** Properties of a class of double integrals. Ann. of Math., II. Ser. 46, 220—241 (1945).

Sia  $\kappa(\xi, \eta)$ , ( $0 \leq \xi < +\infty$ ,  $0 \leq \eta < +\infty$ ) una funzione misurabile, positiva, e positivamente omogenea di grado  $2r - 2$ , tale che esistano finiti gli integrali  $\int_0^{+\infty} \kappa(1, \eta) d\eta$ ,  $\int_0^{+\infty} \kappa(\xi, 1) d\xi$ . Sia  $X$  la classe delle funzioni  $\chi(\xi, \eta)$ , per le quali esiste finito l'integrale  $K(\chi) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \kappa(\xi, \eta) |\chi(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta$ , e si indichino rispettivamente con  $\Phi, \Psi, \Delta$  le sottoclassi di  $X$ , per le quali è rispettivamente  $\chi(\xi, \eta) = \varphi(\xi)$ ,  $\chi(\xi, \eta) = \psi(\eta)$ ,  $\chi(\xi, \eta) = \varphi(\xi) - \psi(\eta)$ . Data una funzione di  $\Delta$ , il problema in questione ha come oggetto la determinazione di una costante  $\gamma$  in modo che le funzioni  $\varphi(\xi) - \gamma$ , e  $\psi(\eta) - \gamma$  appartengano rispettivamente a  $\Phi$  e a  $\Psi$ . L'A. dimostra che per  $r \neq 0$  il problem ammette sempre soluzione, mentre per  $r = 0$  la soluzione può mancare. A tal uopo l'A., mediante elementari cambiamenti di variabile riconduce l'integrale  $K(\chi)$  alla forma

$$K(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{r(x+y)} h(y-x) |w(x, y)|^2 dx dy. \quad S. Cinquini.$$

**Goffman, Casper:** The approximation of arbitrary biunique transformations. Duke Math. J. 10, 1—4 (1943).

Bezeichnungen:  $Q$  abgeschlossenes Quadrat.  $m$  bzw.  $\bar{m}$  Lebesguesches Maß bzw. äußeres Maß;  $\varepsilon > 0$ ;  $d(x, y)$  = Entfernung der Punkte  $x, y \in Q$ ;  $f, g$  eindeutige Abbildung von  $Q$  auf sich;  $A, B$  Teilmengen von  $Q$  mit  $\text{Min}(\bar{m}(A), \bar{m}(B)) > (1 - \varepsilon) m(Q)$ . Es heißt  $f$   $\varepsilon$ -approximiert durch  $g$ , wenn  $A, B$  existieren mit  $d(f(p), g(p)) < \varepsilon$  und  $d(f^{-1}(q), g^{-1}(q)) < \varepsilon$  für jedes  $p \in A$  und jedes  $q \in B$ . — Sätze: (1) Jedes  $f$  ist  $\varepsilon$ -approximierbar durch ein homöomorphes  $g$ . — (2) Zu jedem, überdies meßbaren  $f$  und jedem  $\varepsilon$  existieren  $A, B$ , so daß  $f$  bzw.  $f^{-1}$  stetig ist in  $A$  bzw. in  $B$ ; dabei kann  $B = f(A)$  angenommen werden. *Otto Haupt.*

**Helsel, R. G. and P. M. Young:** Characterization theorems for integral means. Duke math. J. 10, 259—269 (1943).

Bezeichnungen:  $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f(x+a) da$ ,  $0 < h < 2^{-1}$ ,  $h \leq x \leq 1-h$ ;  $f_h^k(x, y) = \frac{1}{4hk} \int_{-h}^{+h} \int_{-k}^{+k} f(x+a, y+b) da db$ ,  $0 < h, k < 2^{-1}$ ,  $h \leq x \leq 1-h$ ,  $k \leq y \leq 1-k$ ;  $C^n$  bzw.  $L^p$  Klasse der  $F(x)$  oder  $F(x, y)$  mit stetigen Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  einschl. bzw. mit meßbarem  $F$  und summierbarem  $F^p$ ,  $p \geq 1$ . Sätze: Angabe verschiedener notwendiger und zugleich hinreichender Bedingungen (B) dafür, daß zu  $F$  ein  $f$  existiert (a) mit  $f \in C^n$  bzw. (b) mit  $f \in L^p$  und mit  $F = f_h$  oder  $F = f_h^k$ . Beispiele solcher Bedingungen (B): (I) für  $F = f_h$ : (a)  $F \in C^{n+1}$  bzw. (b)  $F$  absolut stetig mit  $F' \in L^p$ . — (II) für  $F = f_h^k$ : (a) (1)  $F$  absolut stetig in  $x$  für jedes  $y$  und in  $y$  für jedes  $x$ ; (2)  $F'_x \in C^n$  und absolut stetig in  $y$  für jedes  $x$ ; (3) entsprechend für  $F'_y$ ; (4)  $F''_{xy}, F''_{yx} \in C^n$ . — (b) Ersetze  $C^n$  durch  $L^p$  und „für jedes  $x$  bzw.  $y$ “ durch „für fast jedes  $x$  bzw.  $y$ “. *Otto Haupt.*

Cesari, Lamberto: Su di un teorema di T. Radó sulle trasformazioni continue. Ist. Veneto Sci. Lett. Arti. Atti. Cl. Sci. mat. natur. **101**, 377—403 (1942).

Der von T. Radó (dies. Zbl. **15**, 418) bewiesene Satz ist auch ohne die Vor.  $N(w_0) = 1$  richtig. *Otto Haupt.*

Helsel, R. G. and T. Radó: The transformation of double integrals. Trans. Amer. math. Soc. **54**, 83—102 (1943).

Unter die früher (Radó-Reichelderfer, dies. Zbl. **24**, 387) bewiesene Formel  $\iint H(t(w)) J(w, T) = \iint H(z) u(z, T, R)$  bzw. unter ihre Vor. fallen alle bekannten Transformationsformeln für Doppelintegrale. *Otto Haupt.*

Cesari, L.: Un criterio per la misurabilità degli insiemi. Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **1**, 1256—1263 (1946).

Eine reelle Funktion  $f(x, y)$  der reellen Variablen  $x, y$ , welche für jedes feste  $x$   $L_1$ -meßbare Funktion von  $y$  ist, braucht nicht  $L_2$ -meßbar zu sein ( $L_n$  bezeichnet das  $n$ -dimens. Lebesguesche Maß). Es wird eine zusätzliche Bedingung angegeben, deren Erfülltsein durch  $f$  die  $L_2$ -Meßbarkeit von  $f$  garantiert. *Otto Haupt.*

Guarnieri, Angel J.: Über Riemanns Funktion  $\sum_1^\infty (n x)/n^2$  und  $\sum_1^\infty (2^n x)/4^n$ . Revista Un. mat. Argentina **7**, 135—139 (1941) [Spanisch].

Herrera, Félix Eduardo and Manuel Balanzat: Ausdehnung der Dirichletschen Funktion auf das komplexe Gebiet. Revista Un. mat. Argentina **8**, 155—159 (1942) [Spanisch].

Balanzat, Manuel: Über eine Anwendung der Methode der Verdichtung von Singularitäten. Revista Un. mat. Argentina **8**, 17—19 (1942) [Spanisch].

(1) Franklin, Philip: Measurable functions. J. Math. Physics **23**, 23—44 (1944).

(2) Gageiev, B.: Generalization of Baire's theorem. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **38**, 3—5 (1943).

(3) Kline, S. A.: The representation of Baire's classes by transfinite sums of continuous functions. J. London math. Soc. **20**, 4—7 (1945).

(4) Pospíšil, Bedřich: Eine Bemerkung über Funktionenfolgen. Časopis Mat. Fys. **70**, 119—121 (1941) [mit tschechischer Zusammenfassg.].

(1) Besicovitch almost periodic function is Besicovitch equivalent with a function having derivatives of all orders. — (2)  $f, g$  being Baire functions on  $M$  of class  $\alpha(f)$ ,  $\alpha(g)$  respectively so that for some  $N \subset M$   $f(x) = g(x)$  on  $M - N$ , then the condition  $\alpha(f) \leq \alpha(g)$  is investigated; so for  $\alpha(f) = 1$  one has  $\alpha(g) \leq \alpha(f)$  if and only if  $N \sim K$  be  $F_{\sigma G}$  relatively to  $M$  for each Borel set  $K$ . — (3) Proof of a Lavrentieff theorem [v. Fundamenta Math. **5**, 123—129 (1924)]. — (4) To each sequence  $g_n$  of Lebesgue (Borel) measurable functions correspond a like function  $g$  and a sequence  $f_n$  of continuous functions so that  $g_n = f_n(g)$ . *G. Kurepa.*

Balanzat, Manuel: Über eine Limesfunktion stetiger Funktionen. Revista Un. mat. Argentina **7**, 140—143 (1941) [Spanisch].

Goodstein, R. L.: A theorem in uniform convergence. Math. Gaz. **30**, 287—290 (1946).

Beweise eines bekannten Satzes von Dini über die gleichmäßige Konvergenz einer monotonen Folge stetiger Funktionen. *K. Zeller.*

Ritt, J. F.: A family of functions and its theory of contact. Bull. Amer. math. Soc. **49**, 109—113 (1943).

Sei  $f(x)$  analytisch in  $x_0$ ,  $g(x)$  Zweig einer Funktion aus der Funktionenfamilie  $F$ ,  $f(x) = g(x)$  nebst den ersten  $s$  Ableitungen in  $x_0$  dem Betrage nach beliebig klein,  $r$  sei die größte aller auftretenden Zahlen  $s$ . Dann hat die Familie  $F$  mit der Funktion  $f(x)$  „eine Berührung  $r$ -ter Ordnung in  $x_0$ “. Verf. betrachtet



die Familie  $\prod_1^n (x - a_i)^{p_i}$  ( $a_i$  beliebig,  $p_i$  positiv,  $i = 1, \dots, n$ ) und die Funktion  $f(x) = 0$ . Die Zahl  $r$  ist hier unabhängig von  $x_0$ , und zwar ist  $r \leq [p_1 + \dots + p_n] + n - 1$ . Das Gleichheitszeichen gilt, wenn keine Teilfolge der  $p_n$  eine ganzzahlige Summe hat. W. Hahn.

(1) **Beckenbach, E. F.:** On a characteristic property of linear functions. Bull. Amer. math. Soc. **51**, 923—930 (1945).

(2) **Bing, R. H.:** Converse linearity conditions. Amer. J. Math. **68**, 309—318 (1946).

(1) zeigt, daß, falls  $\{f(x)\}$  eine Klasse von Funktionen ist, die in  $[a, b]$  stetig sind und die Eigenschaft haben, daß es für jedes Punktepaar  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  ( $x_1, x_2 \in [a, b]$ ) genau eine Funktion  $f(x) = f|x; x_1, y_1; x_2, y_2|$  der Klasse gibt, für die  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$  gilt, dann muß jede in  $[a, b]$  stetige Funktion  $(x)$ , bei der es zu jedem  $a < x_0 < b$  ein positives  $h_0 = h_0(x_0)$  ( $x_0 - h_0, x_0 + h_0 \in [a, b]$ ) gibt derart, daß  $g(x_0) = f[x_0; x_0 - h_0, g(x_0 - h_0); x_0 + h_0, g(x_0 + h_0)]$  ist, ein Element der Klasse  $\{f(x)\}$  sein. Hieraus folgt, daß, falls  $g(x)$  stetig in  $[a, b]$  ist und es zu jedem  $x_0$  ein  $h_0(x_0)$  gibt derart, daß  $2g(x_0) = g(x_0 - h_0) + g(x_0 + h_0)$  gilt, dann  $g(x)$  linear ist. In (2) werden außer der Verallgemeinerung der obenstehenden Bedingung weitere notwendigen Kriterien für die Linearität von Funktionen

gegeben, die in einem offenem Intervall  $[a, b]$  stetig sind:  $\int_a^b f(x) dx$  existiert und für jedes  $x_0$  gibt es 1. zwei Zahlen  $h$  und  $k$  ( $a \leq x_0 - h < x_0 < x_0 + k < b$ )

derart, daß  $k^2[h f(x) - \int_{x_0-h}^{x_0} f(x) dx] = h^2[\int_{x_0}^{x_0+k} f(x) dx - k f(x)]$  ist, oder 2. ein  $h$  derart,

daß  $f(x_0) = \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) dx$  usw. Dagegen gibt es in halbgeschlossenen bzw. offenen

Intervallen beschränkte und derivierbare Funktionen derart, daß es für jedes  $x_0$  ein  $h = h(x_0)$  gibt, für das  $2f(x_0) = f(x_0 - h) + f(x_0 + h)$  gilt und  $f(x)$  doch in keinem Teilintervall linear ist. J. Aczél.

**Coe, C. J.:** Problems on maxima and minima. Amer. math. Monthly **49**, 33—37 (1942).

**Rodov, A.:** Relations between upper bounds of derivatives of functions of a real variable. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. math. **10**, 257—270 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Relationen zwischen  $M_0, M_i, M_n, M_{n+1}, M_{n+2}$  mit  $0 < i < n$  und  $M_k = \sup |f^{(k)}(x)|$  bei beschränkten  $f(x), f'(x), \dots, f^{(n+2)}(x)$ . J. Aczél.

**Kimball, W. S.:** Partial derivatives of derivatives. II. Philos. Mag., VII. Ser. **32**, 137—154 (1941).

Teil I der Arbeit s. dies. Zbl. **26**, 396.

**Popoff, Kyrille:** Sur une extension de la notion de dérivée. II. Monatsh. Math. **51**, 115—152 (1944).

Teil I der Arbeit s. dies. Zbl. **21**, 306. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der vom Verf. definierten verallgemeinerten Ableitung (dies. Zbl. **18**, 300). Verschiedene Anwendungen. Die in dies. Zbl. **27**, 50 bei  $g(x, t) = 1/t$  definierten verallgemeinerten Ableitungen  $D_n(f, x)$  werden bei allgemeineren Gewichtsfunktionen  $g(x, t)$  betrachtet und ihre Rechenregeln zusammengestellt. Anwendung auf komplexe Funktionen. A. Császár.

**Gallego Diaz, J.:** Über einen neuen Ableitungsbegriff. Euclides, Madrid **3**, 31—33 (1943) [Spanisch].

**Hruska, V.:** Une note sur les fonctions aux valeurs intermédiaires. Časopis Mat. Fys. **71**, 67—69 (1946) [mit tschech. Zusammenfassg.].

Es wird bewiesen: Falls  $F(x)$  und  $G(x)$  im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  überall derivierbar sind, ferner (1)  $G'(x)$  streng monoton und (2)  $G'(a) = 0$  ist, so hat die Funktion  $h(x) = F'(x) G'(x)$  die Darboux'sche Eigenschaft, das heißt, nimmt sie zwei Werte  $A \neq B$  an, so auch jeden Zwischenwert. — In einer Bemerkung zeigt V. Jarník, daß man (1) und (2) durch die Bedingung  $G'(x) \neq 0$  in  $(a, b)$  ersetzen kann. [Bemerkung des Ref.: Im Text wird unnötigerweise  $G'(x) \neq 0$  im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  gefordert. In diesem Falle würde der Satz von Jarník den von Hruska nicht enthalten.] Der Beweis von Hruska stützt sich auf den Darboux'schen Satz, der von Jarník ist davon unabhängig; er beruht auf dem Satz von Rolle und hat also auch diesen Darboux'schen Satz zur Folge.

J. Aczél.

Gama, Lelio L.: Note sur la démonstration du théorème de Rolle. Anais Acad. Brasil. Ci. 13, 345—346 (1941).

Maties, I. V.: Über unbestimmte Ausdrücke. Revista mat. Timișoara 23, 123—124 (1943) [Rumänisch].

Alaci, V.: Über unbestimmte Ausdrücke. Revista mat. Timișoara 23, 124—126 (1943) [Rumänisch].

Die Arbeiten befassen sich mit der Anwendung der L'Hôpital'schen Regel auf Ausdrücke der Form  $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)}$ , wenn  $u(a) = v(a) = 0$  ist; sie geben Beispiele, in denen dieser Grenzwert nicht den Wert 1 annimmt.

H. Geppert.

Dresden, Arnold: The derivatives of composite functions. Amer. math. Monthly 50, 9—12 (1943).

Tola Pasquel, José: Über einen elementaren Weg, die Theorie der Konvexität, der Wendepunkte und der Maxima und Minima reeller Veränderlicher darzustellen. Revista Univ. católica Perú 10, 132—135 (1942) [Spanisch].

Fraile Ovejero, A.: Ableitung und Integration der absolut genommenen Funktionen einer reellen Variablen und ein neuer Integrationssummand. Euclides, Madrid, 3, 186—188 (1943) [Spanisch].

Verf. macht die elementare Bemerkung, daß  $|f(x)|' = f'(x) |f|^{-1}$  in den zulässigen Punkten ist, eine analoge Formel für unbestimmte Integration gilt und dementsprechend Ausdrücke der Form  $\sum k_i |u_i| u_i^{-1}$ , die bis auf Unstetigkeiten 1. Art konstant sind, als Integrationskonstanten fungieren.

H. Geppert.

Fraile Ovejero, A.: Über die absoluten Funktionen. Euclides, Madrid 3, 605—608 (1943) [Spanisch].

Verf. integriert die Differentialgleichungen

$$y' + |\varphi_1(x)| y = |\varphi_2(x)| \quad \text{und} \quad y' + \varphi_1(|x|) y = \varphi_2(|x|).$$

H. Geppert.

Fraile, Arturo: Differentiation and integration of absolute values of functions of a real variable. Revista Un. mat. Argentina 10, 84—92 (1945) [Spanisch].

Mahajani, G. S.: A note on Riemann integration. J. Univ. Bombay, n. Ser. 10, Part 3, 9—11 (1941).

Fort, Tomlinson: Taylor's formula and Stirling's numbers. Nat. Math. Mag. 19, 163—170 (1945).

Nicolesco, Miron: Sur la seconde formule de la moyenne. Mathematica, Timișoara 22, 182—203 (1946).

Der Weierstraß'sche Integralmittelwertsatz wird verallgemeinert auf Lebesguesche Doppelintegrale mit Hilfe einer Verallgemeinerung der partiellen Integration für Doppelintegrale.

G. Aumann.

Cioranescu, Nicolas: Une nouvelle formule de moyenne intégral-différentielle. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 46, 107—112 (1944).

Wenn  $M[f] = \int p f dx / \int p dx$ , wo  $p$  eine nichtnegative Funktion bezeichnet, so gilt für differenzierbare Funktionen  $f, g, q, \varphi$ , wovon  $q$  und  $\varphi$  im gleichen

Sinne streng monoton sind:  $\frac{M[f g] - M[f] M[g]}{M[\varphi \psi] - M[\varphi] M[\psi]} = \frac{f'(\xi) g'(\xi_1)}{\varphi'(\xi) \psi'(\xi_1)}$  mit  $\xi$  und  $\xi_1$  aus dem gemeinsamen Definitionsintervall. Anwendungen werden mitgeteilt.

G. Aumann.

Pompeiu, D.: Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis. *Mathematica, Timișoara* 22, 143—146 (1946).

Hemmingsen, Erik: On Weierstrass sums for integrals involving second derivatives. *Rep. math. Colloquium, II. Ser.* 3, 31—33 (1941).

● Mahdavi Ardebili, Mohammad Hassan: Étude de certaines intégrales multiples de la théorie des probabilités géométriques. Thèse, Université de Genève 1940. 54 p.

Erim, Kerim: Über die Darstellung mehrfacher Integrale. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* 5, 191—214 (1941) [Deutsch mit türk. Zusammenfassg.].

Cansado, Enrique: Stieltjes-Lebesgue integral and its applications to statistics. *Mem. Mat. Inst. „Jorge Juan“*, Nr. 3. 66 p. (1946).

Umformung der mehrfachen Stieltjes-Integrale in sukzessive Integrale

J. M<sup>a</sup>. Orts.

Roy, S. N.: On a certain class of multiple integrals. *Bull. Calcutta math. Soc.* 37, 69—76 (1945).

Viene data una formula ricorrente per il calcolo di certi integrali  $p$ -upli presentatisi in un problema di statistica. L'integrando è un determinante il cui termine generale è della forma  $x_r^{m_r}(1 + x_r^{-n_r})$ .

L. Giuliano.

van Veen, S. C.: Riemannsche Doppelintegrale. *Mathematica, Zutphen. B* 10, 1—17 (1941) [Holländisch].

Sastry, B. S.: The limiting points of the set of the upper and the lower sums in Riemann integration. *Math. Student* 8, 148—150 (1940).

Kopal, Zdeněk: Theoretical light-curves of close eclipsing systems. *Proc. Amer. philos. Soc.* 85, 399—431 (1942).

Kopal, Zdeněk: Theoretical light-curves of close eclipsing systems. II. *Astrophys. J.* 96, 20—27 (1942).

Kopal, Zdeněk: The calculation of rotation factors for eclipsing binary systems. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 28, 133—140 (1942).

Levi, Beppo: Eine Aufgabe über elliptische Integrale. *Math. Notae* 6, 167—190 (1946) [Spanisch].

Cattaneo, Paolo: Esercizi sugli iperspazi. *Matematiche* 1, 104—112 (1946).

Guarnieri, Angel J.: Über das Integral  $\int (1 - x^2)^{-2/3} dx$ . *Revista Un. mat. Argentina* 9, 122—131 (1943) [Spanisch].

Wilson, R.: On the evaluation of  $\int \frac{dx}{(x-e)^{n+1} \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ . *Edinburgh math. Notes* Nr. 32, 13—14 (1941).

Pollard, W. G.: Evaluation of surface integrals by electrical images. *Amer. math. Monthly* 49, 604—609 (1942).

Piccone, Mauro: Complementi analitici e numerici ad una ricerca di Signorini sul moto di un sistema soggetto a resistenza idraulica a forza di richiamo. *Ist. Veneto Sci. Lett. Arti, Atti, Cl. Sci. mat. natur.* 101, 473—492 (1942).

Es sei  $(1-y)e^{x+y} = 1+x$ ,  $y > 0$ . Verf. untersucht das Verhalten von  $z(x) = \int_{-x}^{y(x)} e^{s/2} \{(1-s)e^s - (1+x)e^{-x}\}^{-1/2} ds$  für  $x \rightarrow 0, 1$  und  $\infty$ .

Young, L. C.: A further inequality for Stieltjes integrals. *J. London math. Soc.* 18, 78—82 (1943).

Erfüllen die periodischen Funktionen  $f$  und  $g$  mit der Periode 1 gewisse „integrierte Lipschitzbedingungen“, so existiert ihre Faltung  $F(x) = \int_0^1 f(x+t)g(t)dt$ .



Für eine spezielle rechtsseitige Derivierte von  $F$  an der Stelle  $x = 0$  und für den Unterschied dieser Derivierten gegen den Differenzenquotienten werden universelle Abschätzungen angegeben. Ähnliches wird auch für  $\int f dg$  durchgeführt; dabei sind  $f$  und  $g$  von beschränkter  $\Phi$ - und  $\Psi$ -Variation (dies. Zbl. 19, 15). Die Ergebnisse finden Anwendung auf Konvergenzkriterien für Fouriersche Reihen in der letztgenannten Arbeit des Verf.

G. Aumann.

Boas jr., R. P.: A differential inequality. Bull. Amer. math. Soc. 51, 95—96 (1945).

Sei  $0 \leq x \leq a$ ,  $f'(x)$  absolut stetig,  $f(0) = f'(0) = 0$ , und  $f''(x) \leq K(x)|f'(x)| + x^{-1}L(x)|f(x)|$  fast überall mit nichtnegativen, in  $(0, a)$  integrierbaren  $K(x)$  und  $L(x)$ . Dann gilt, wenn  $f$  nicht in einer Umgebung von 0 identisch verschwindet,

$$f'(x) < 0 \text{ für } 0 < x < c \text{ mit } c = \sup \left\{ x: \int_0^x [K(\xi) + L(\xi)] d\xi < 1 \right\}.$$

G. Aumann.

Bellman, Richard: A note on periodic functions and their derivatives. J. London math. Soc. 18, 140—142 (1943).

Ist  $f(x)$  von der Periode  $2\pi$  mit  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ , und  $(k-1)$ -mal absolut-stetig differenzierbar, so gilt  $\left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^m dx \right\}^{1/m} \leq A_k \left\{ \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)|^m dt \right\}^{1/m}$  für  $m = 2, 4, 6, \dots$  mit nur von  $k$  abhängendem  $A_k$ .

G. Aumann.

Zygmund, A.: Proof of a theorem of Littlewood and Paley. Bull. Amer. math. Soc. 51, 439—446 (1945).

$$\text{Mit } g(\Theta) = \left\{ \int_0^1 (1-\varrho) |\Phi'(\varrho e^{i\Theta})|^2 d\varrho \right\}^{1/2} \text{ gilt } \left( \int_0^{2\pi} [g(\Theta)]^\lambda d\Theta \right)^{1/\lambda} \leq C_\lambda \left( \int_0^{2\pi} |\Phi(e^{i\Theta})|^\lambda d\Theta \right)^{1/\lambda}.$$

Für  $\lambda > 1$  wurde dies von Littlewood-Paley (dies. Zbl. 15, 254) bewiesen. Der vorliegende Beweis geht über die Stationen  $\lambda = 2$ ,  $0 < \lambda \leq 2$  und  $\lambda > 2$ .

G. Aumann.

Obrechhoff, Nikola: Quelques inégalités nouvelles sur les dérivées des fonctions. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 531—533 (1946).

Gegenstand ist das asymptotische Verhalten der  $n$ -ten Ableitung von Funktionen  $f(x)$  für  $x \rightarrow +\infty$ .

G. Aumann.

Obrechhoff, Nikola: Sur quelques inégalités pour les dérivées des fonctions d'une variable réelle et pour les différences des suites. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 397—399 (1946).

Bellman, Richard: An integral inequality. Duke math. J. 10, 547—550 (1943).

Behandelt Ungleichungen vom Carlsonschen Typus (s. Kjellberg, dies. Zbl. 60, 260).

G. Aumann.

Shohat, J. A. and A. V. Bushkovitch: On some applications of the Tchebycheff inequality for definite integrals. J. Math. Physics 21, 211—217 (1942).

Die genannten Anwendungen beziehen sich auf eine Abschätzung des Restes in der Taylor-Formel und des Fehlers bei der Simpsonschen Regel.

G. Aumann.

Cioranescu, Nicolas: Quelques formules d'équivalence ou de moyenne. Mathematica, Timişoara 22, 91—101 (1946).

$$\text{Ist } \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b f_3(x) dx, \text{ so gibt es ein } \xi \text{ mit } a < \xi < b \text{ und } \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b f_3(x) dx, \text{ und ähnliche Sätze.}$$

G. Aumann.

Laguardia, Rafael: Über die Erweiterung einer Ungleichung von Tchebycheff. Bol. Fac. Ing. Montevideo 3 (Año 10), 229—231 (1946) [Spanisch].

Für in  $[a, b]$  im gleichen Sinne monotone  $f$  und  $g$  und für ein  $\alpha$  mit  $\alpha(a) \leq \alpha(x) \leq \alpha(b)$  für  $a \leq x \leq b$  ist  $\int_a^b f g d\alpha \cdot \int_a^b d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \cdot \int_a^b g d\alpha$ .

G. Aumann.

**Zygmund, A.:** Two notes on inequalities. *J. Math. Physics* **21**, 117—123 (1942).

1) Ist  $q = T(f)$  eine lineare Transformation von Funktionen  $f| [a, b]$  eines linearen Funktionensystems auf Funktionen  $q| [x, \beta]$ , wobei  $\int_a^\beta |dq(\xi)| \leq M \int_a^b |df(x)|$  mit einer passenden Konstanten  $M$  für alle  $f$ , dann gilt allgemein

$$\int_a^\beta \left\{ \sum_1^n [dq_r(\xi)]^2 \right\}^{1/2} \leq M \int_a^b \left\{ \sum_1^n [df_r(x)]^2 \right\}^{1/2}.$$

2) Ist  $P(z)$  ein Polynom in  $z$  vom Grad  $n$  und  $p > 1$ , so gilt

$$\left( \int_0^{2\pi} |P'(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \leq n C_p \left( \int_0^{2\pi} |\Re[P(e^{i\theta})]|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Für die Konstante  $C_p$  wird die scharfe Schranke angegeben. *G. Aumann.*

**Mikusiński, Jean G.:** Sur l'inégalité différentielle  $|f^{(n)}(x)| \leq m |f(x)|$ . *C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 359—361 (1946).

**Sircar, H.:** On the inequality satisfied by the derivative of order  $n$  of a function. *Bull. Calcutta math. Soc.* **37**, 21—23 (1945).

Es wird  $\inf \{f^{(n)}(x) : a \leq x \leq b\}$  abgeschätzt durch Integralausdrücke, in welche  $f$  und die Funktionen eines Orthonormalsystems über  $[a, b]$  eingehen. *G. Aumann.*

**Kharadze, A. K.:** Sur l'identité d'Euler-Lagrange et de l'inégalité de Bouniakowski-Schwarz. *Soobščenia Akad. Nauk Gruzinskoj SSR* **3**, 1—8 (1942) [Russisch mit georg. und französ. Zusammenfassg.].

In Verallgemeinerung von

$$\frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy = \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx - \left[ \int_a^b f g dx \right]^2$$

gilt

$$(*) \quad \frac{1}{3} \int_a^b \int_a^b \int_a^b |[f(x), g(y), h(z)]|^2 dx dy dz = \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx \int_a^b h^2 dx - \int_a^b f g dx \int_a^b g h dx \int_a^b h f dx,$$

worin

$$[f(x), g(y), h(z)] = f(x)g(y)h(z) + \omega f(y)g(z)h(x) + \omega^2 f(z)g(x)h(y)$$

eine sogenannte „Quasideterminante“ bedeutet ( $\omega$  ist eine primitive dritte Einheitswurzel). Der Beweis von (\*) geht über den einer entsprechenden Identität für endliche Summen. Das Analogon zu (\*) für vierfache Integrale wird ebenfalls behandelt. *G. Aumann.*

**Visser, C.:** A simple proof of certain inequalities concerning polynomials. *Nederl. Akad. Wet., Proc.* **48**, 276—281 = *Indagationes Math.* **7**, 81—86 (1945).

Die Ungleichungen  $\max \{|P(x)| : -1 \leq x \leq 1\} \geq 2^{-n+1}$  und  $\int_{-1}^1 |P(x)| dx \geq 2^{-n+1}$  gelten für jedes Polynom  $P(x) = x^n + \dots$  vom Grad  $n$ . *G. Aumann.*

**Dinghas, Alexander:** Über eine algebraische Identität zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von  $n$  positiven Zahlen. *Math. Z.* **49**, 563—564 (1944).

**Walsh, C. E.:** A proof of the „theorem of means“. *Edinburgh math. Notes* Nr. **33**, 17—18 (1943).

**Stubban, John Olav:** Über arithmetische und geometrische Mittel. *Norsk. mat. Tidsskr.* **26**, 116—117 (1944) [Norwegisch].

**Kreis, H.:** Arithmetisches und geometrisches Mittel. *Elemente Math.* **1**, 37—38 (1946).

Frucht, Roberto: Über einige Ungleichungen. Math. Notae 3, 41—46 (1943) [Spanisch].

Bekannte Abschätzungen des arithmetischen und geometrischen Mittels. *G. Aumann.*

Iyengar, K. V.: A deepening of the binomial inequality. J. Mysore Univ. Sect. B 3, 135—138 (1942).

Es sei  $x > 0$  und  $\neq 1$ ,  $n > 0$ , ferner bezeichne  $m$ ,  $M$ ,  $a$ ,  $g$ ,  $h$  bzw. das Minimum, Maximum, arithmetische, geometrische, harmonische Mittel der beiden Zahlen  $n$  und  $n x^{n-1}$ . Es wird angegeben, in welchen der durch die obigen Werte abgegrenzten Intervalle die Zahl  $(x^n - 1)/(x - 1)$  liegt. *G. Aumann.*

Frazer, H.: Note on Hilbert's inequality. J. London math. Soc. 21, 7—9 (1946).

In der Hilbertschen Ungleichung  $\sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^m \frac{a_s a_t}{s+t+1} \leq \pi \sum_{s=0}^m a_s^2$  kann der Faktor  $\pi$  durch den kleineren  $(m+1) \sin(\pi/(m+1))$  ersetzt werden. *G. Aumann.*

Beckenbach, E. F.: An inequality of Jensen. Amer. math. Monthly 53, 501—505 (1946).

Bei festen  $a_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ist  $(\sum_j a_j^t)^{1/t}$  für  $t > 0$  konvex. *G. Aumann.*

Popoviciu, Tiberiu: Über einige Ungleichungen. Gaz. mat., București 51, 81—85 (1946) [Rumänisch].

Ist  $f(0) = 0$ ,  $f$  stetig für  $x \geq 0$ , und  $(-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x)$  wachsend für  $x > 0$ , dann gilt für positive  $x_1, \dots, x_n$  die Ungleichung  $\sum_{k=1}^n \{(-1)^{k-1} \sum^* f(x_{j_1} + \dots + x_{j_k})\} > 0$ , wobei  $\sum^*$  die Summation über alle Kombinationen  $j_1, \dots, j_k$  von je  $k$  der Zahlen  $1, \dots, n$  bedeutet. Es werden Anwendungen auf elementare und zahlentheoretische Funktionen besprochen. *G. Aumann.*

(1) Hukuhara, Masuo: Sur la fonction  $S(x)$  de M. E. Kamke. Japanese J. Math. 17, 289—298 (1941).

(2) Woods, Cecil L.: A restricted class of convex functions. Bull. Amer. math. Soc. 52, 117—128 (1946).

(3) Beckenbach, E. F. and R. H. Bing: On generalized convex functions. Trans. Amer. math. Soc. 58, 220—230 (1945).

(4) Popoviciu, Tiberiu: Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur. IX. Inégalités linéaires et bilinéaires entre les fonctions convexes. Quelques généralisations d'une inégalité de Tchebycheff. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 43, 84—121 (1941).

(5) Popoviciu, Tiberiu: Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur. X. Sur quelques propriétés des différences divisées et des polynômes de Lagrange. Ann. sci. Univ. Jassy, Sect. I 28, 161—207 (1942).

(6) ● Popoviciu, Tibère: Les fonctions convexes. Actual. sci. industr. Nr. 992. Paris: Hermann et Cie. 1944. 76 p.

Teil VIII der Arbeit von Popoviciu s. dies. Zbl. 24, 22. Diese Arbeiten beschäftigen sich mit verschiedenen Spezialisierungen und Verallgemeinerungen der konvexen Funktionen. (1) zeigt, daß eine stetige, in  $(0, \dots, 0)$  verschwindende Funktion  $S(x_1, \dots, x_n)$  für die  $\bar{D}^n S[x_1(t), \dots, x_n(t)] \leq S[x'_1(t), \dots, x'_n(t)]$  bei beliebiger Wahl des derivierbaren Funktionen- $n$ -tupels  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  immer gültig ist (vgl. E. Kamke, dies. Zbl. I, 273), stetig, konvex und homogen vom ersten Grade für positive Faktoren ist, und umgekehrt. (2) betrachtet, sich den Untersuchungen von T. Radó anschließend (dies. Zbl. 11, 206), eine Klasse von Funktionen  $f(x)$ , für die  $2^{-1} \log(B/b) \leq M$  ist, wo  $B$  bzw.  $b$  die kleinste obere bzw. die größte untere Schranke von  $f(x)$  auf  $(x_1, x_2)$  ist, und untersucht, für welche  $(\lambda, \mu)$  die Gültigkeit



von  $\left[ \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t)^\alpha dt \right]^{1/\alpha} \leq \left[ \frac{f(x-h)^\beta + f(x+h)^\beta}{2h} \right]^{1/\beta}$  bzw. der umgekehrten Ungleichung aus der Konvexität bzw. Konkavität einer Funktion  $f$  dieser Klasse folgt. Diese Bedingungen sind:  $\beta \geq \max[(\alpha+2)/2, \beta(\alpha, M)]$  bzw.  $\beta \leq \min[(\alpha+2)/3, \beta(\alpha, M)]$ , wo  $\beta(\alpha, M)$  eine vom Verf. implizit angegebene Funktion ist. (3) verallgemeinert die üblichen Definitionen der konvexen Funktionen, indem die Sehnen durch zweiparametrische Kurvenscharen ersetzt werden. Und zwar ist  $F_{12}(x)$  die durch die Punkte  $(x_1, f(x_1))$ ,  $(x_2, f(x_2))$  gehende Kurve der Schar, so wird  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq F_{12}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$  gefordert (vgl. Beckenbach, dies. Zbl. 16, 352). Es wird bewiesen, daß hieraus die Gültigkeit aller ähnlichen Ungleichungen mit rationalen Gewichtsmitteln folgt, und daß die Beschränktheit solcher Funktionen von oben in  $(a, b)$  oder gar nur in einer Teilmenge von positiver Masse dieses Intervalles ihre Stetigkeit zur Folge hat. Die drei Veröffentlichungen von T. Popoviciu befassen sich mit konvexen Funktionen  $n$ -ter Ordnung, das heißt Funktionen, bei denen alle Differenzenquotienten  $(n+1)$ -ter Ordnung positiv sind. Und zwar gibt Verf. in (4) Untersuchungen über Vorzeichen, Verschwinden und Ungleichungen für Funktionale, die auf diesem Funktionenraume operieren; in (5) untersucht er den Zusammenhang dieser konvexen Funktionen höherer Ordnung mit den Lagrangeschen Interpolationspolynomen, deren Grundpunkte dieselben sind wie die der positiven Differenzenquotienten höherer Ordnung der betrachteten Funktionen. Die Monographie (6) gibt eine Zusammenfassung der Theorie dieser Funktionen. Die Kapitel dieses Buches sind: Einleitung. Einführende Begriffe und Bezeichnungen. I. Funktionen  $n$ -ter Ordnung. II. Verschiedene Eigenschaften der Funktionen  $n$ -ter Ordnung (Ungleichungen). III. Verallgemeinerung der Funktionen  $n$ -ter Ordnung und IV. Konvexe Funktionen zweier oder mehrerer Veränderlichen. — Das inhaltvolle, gut brauchbare Büchlein endet mit einer etwa 106 Titel enthaltenden Bibliographie. J. Aczél.

**Chlodovsky, L.:** The differential properties of functions with one non-negative finite difference of order  $n$ . C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 47, 620—622 (1945).

Hauptergebnis: Ist  $f(x)$  in allen abgeschlossenen Teilintervallen eines offenen Intervalles  $(a, b)$  beschränkt, und bleibt dort die  $n$ -te Differenz ( $n \geq 2$ ) nicht-negativ, so ist die Funktion mit ihren ersten  $n-2$  Derivierten stetig und es existieren auch von rechts bzw. von links stetige nicht-abnehmende rechts- bzw. linksseitige Ableitungen  $(n-1)$ -ter Ordnung. Ein Hilfssatz besagt, daß, falls die Funktion  $f(x)$  im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  beschränkt und von nicht-negativer  $n$ -ter Differenz ist, sie entweder mit ihrem  $(n-1)$ -ten Interpolationspolynom zusammenfällt (mit äquidistanten Grundpunkten) oder in dem  $k$ -ten Grundpunktintervall über bzw. unter dem  $n$ -ten Interpolationspolynom liegt, je nachdem  $(k+n)$  eine gerade oder ungerade Zahl ist. — Beweise nur skizziert. J. Aczél.

**Perelmann, M.:** Sur le module de continuité des fonctions analytiques. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski. 83 (Ser. mat. Nauk 12). 62—86 (1941) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

**San Juan, R.:** Zerlegungsmethoden in der Theorie der quasianalytischen Funktionen. Revista Univ. Madrid. Ci. 2, 4 p. (1942) [Spanisch].

Cf. ee Zbl. 28, 355.

J. Horváth.

**Ganapathy Iyer, V.:** On singular functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 8, 94—108 (1944).

**Vicente Gonçalves, J.:** Le théorème de M. S. Bernstein. Portugaliae Math. 5, 135—136 (1946).

1. Proofs of the theorem that every totally monotonic function is analytic. —  
2. In the first named paper  $f(x)$ , infinitely differentiable, is singular if  $f(x) \not\equiv 0$

and if there exists  $a$ , such that  $f^{(n)}(a) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). If  $f^{(n)}(x) \geq 0$  for a sequence  $\{n_i\}$ , then  $f(x)$  is not singular. — If  $C\{A_n\}$  is not quasi-analytic and  $E$  is a given closed, nowhere dense set, then there exists  $f(x) \in C\{A_n\}$  such that  $f^{(n)}(x) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) precisely at the points of  $E$ . *J. Horváth.*

Ghika, Al.: Sur la nature fonctionnelle des fonctions quasi-analytiques générales. *Mathematica, Timișoara* **20**, 148—165 (1944); **21**, 19—44 (1945).

Soit  $e_i \subset E$ ,  $e_i \neq E$ ,  $E = \bigcup_i e_i$ . Une classe  $A$  de fonctions sur  $E$  est „quasi-analytique générale” si  $x(p) = x'(p)$  pour les  $p$  appartenant à l'un des  $e_i$  entraîne  $x(p) = x'(p)$  pour tout  $p \in E$  ( $x, x' \in A$ ). Exemples. *J. Horváth.*

(1) Mandelbrojt, S.: Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions. *Rice Inst. Pamphlet* **29**, Nr. 1, 142 p. (1942).

(2) ● Bang, Theger: Über quasianalytische Funktionen. Diss., Universität Kopenhagen: 1946. 101 S. [Dänisch].

(3) Soula, Jacques: Sur les fonctions d'une variable réelle qui admettent des dérivées de tout les ordres. *C. r. Acad. Sci., Paris* **223**, 711—712 (1946).

(4) Mandelbrojt, S. and F. E. Ulrich: On a generalization of the problem of quasi-analyticity. *Trans. Amer. math. Soc.* **52**, 265—282 (1942).

(5) Mandelbrojt, Szolem: Sur les fonctions indéfiniment dérivables. *C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 577—579 (1946).

(6) Mandelbrojt, S.: Some theorems connected with the theory of infinitely differentiable functions. *Duke math. J.* **11**, 341—349 (1944).

(7) Lévine, B. and M. Lifschetz: Quasi-analytic functions represented by Fourier series. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **9** (51), 693—711 (1941) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(8) Mandelbrojt, S.: Quasi-analyticity and properties of flatness of entire functions. *Duke math. J.* **9**, 647—661 (1942).

We shall refer by (M) to Mandelbrojt, this Zbl. **48**, 52 and by (B) to Bang, this Zbl. **51**, 44. — 1.  $M_n$  being a sequence of positive umbers, let  $C\{M_n\}$  denote the class of infinitely differentiable (i. d.) functions  $f(x)$ , which verify  $|f^{(n)}(x)| \leq k^n M_n$ , for  $x$  in an interval  $I$ . The first half of (1) deals with some simple cases of the problem as to when  $C\{M_n\} \subset C\{M'_n\}$ , whose solution is different according to whether  $I$  is open, closed, semi-infinite or infinite. For a complete treatment see (M) Chap VI. The case  $I = (-\infty, \infty)$  is also treated in the first pages of (2). — 2.  $C = C\{M_n\}$  is quasi-analytic (q. a.) if from  $f_1(x) \in C$ ,  $f_2(x) \in C$ ,  $f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) it follows  $f(x) \equiv 0$ . Let  $M_n^c$  be the greatest logarithmically convex minorant of  $M_n$ ; in order that  $C\{M_n\}$  be q. a. it is necessary and sufficient that either  $\lim M_n^{1/n} = \infty$  or that (\*)  $\sum (M_n^{c/n} / M_{n+1}^c) = \infty$  (Denjoy-Carleman theorem). This condition (\*), given in (1) and (2), is new. (1) reproduces a variant of the classical proof of the sufficiency of (\*). (1) and (2) give independently a new, elementary proof of the necessity of (\*) and (2) also gives a real variable proof of its sufficiency, based on a generalization of Taylor's formula, consisting in a summation thereof. (6) gives an other elementary proof of the necessity of (\*) [cf. (M) pp. 99—113]. (B) contains an other real variable proof of the sufficiency of (\*).

If  $f(x)$  belongs to  $C\{M_n\}$ ,  $f^{(m)}(x_n) = 0$  and  $\lim \{(\sum_{n=1}^N |x_n - x_{n-1}|) / (\sum_{n=1}^N (M_n^{c/n} / M_{n+1}^c))\} = 0$  (in particular if  $C\{M_n\}$  is q. a. and  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| < \infty$ ), then  $f(x) \equiv 0$  (2), cf. (B)].

This generalizes a result of Soula (this Zbl. **14**, 398). (3) gives inverse theorems, e. g. if  $a < c < b$  and there is no sequence  $x_n \rightarrow c$  for which  $f^{(n)}(x_n) = 0$ , then there exist  $a < \alpha < c < \beta < b$  such that  $f(x)$  shall be q. a. (BD) (i. e. in the Bernstein-Denjoy sense) in  $(\alpha, \beta)$ . Q. a. (BD) means that  $f(x) \in C\{M_n\}$  where  $\lim (M_n/n!)^{1/n} = \infty$ . — Further results of (2): If  $f(x)$  is q. a. (i. e. belongs to a q. a. class) in  $I: a < x < b$

and  $f^{(n)}(a) \geq 0$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), then  $f(x)$  is analytic in  $I$  (Borel's conjecture). For other proof see (B). If  $\sum M_n^c/M_{n+1}^c < \infty$  then there exists (i)  $|c_n| \leq M_n$  such that there exist two q. a. functions  $f_1(x) \neq f_2(x)$ , so that  $f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0) = c_n$ , (ii)  $|c'_n| \leq M_n$  such that  $f^{(n)}(x_0) = c'_n$  for exactly one q. a. function, (iii)  $|c''_n| \leq M_n$  so that for no q. a. function  $f^{(n)}(x_0) = c''_n$ . (2) contains a wealth of other results which can not be reproduced here. (4) and (5) deal with the problem of „generalized quasi-analyticity“, cf. (M) Chap. IV. — 3. (7) generalizes a theorem of Mandelbrojt (this Zbl. 13, 110, pp. 101—116 of this book), reproduced in (1), according to which if an integrable function  $f(x)$  is „small“ in the neighbourhood of a point and its Fourier series is „sufficiently lacunary“, then  $f(x) = 0$ . (cf. Levin, this Zbl. 36, 55; Hirschman and Jenkins, this Zbl. 38, 45; Kahane and Lalaguë, this Zbl. 38, 46; Kahane, this Zbl. 50, 64. (8) gives a theorem on entire functions, which implies a special case of the theorem of (7) and also the Denjoy-Carleman theorem. — 4. (1) reproduces a theorem of Mandelbrojt (this Zbl. 23, 55) according to which every i. d. function is the sum of two q. a. functions. (2) proves that every function of  $C\{M_n + M'_n\}$  can be written as a sum of a function in  $C\{M_n\}$  and a function in  $C\{M'_n\}$ , if and only if  $M_n$  and  $M'_n$  can be chosen in such a way that if we draw the two polygons with vertices  $(n, \log M_n)$  and  $(n, \log M'_n)$ , then the greatest minorant of the two polygons is convex. The proof uses special cases of the Bernstein inequality on derivatives of entire functions of exponential type and the Bohr-Favard-Lewitan inequality on derivatives of functions whose spectrum is bounded away from zero. Proof for these special cases are given (cf. Bang, this Zbl. 25, 174). It follows that every i. d. function is the sum of two q. a. (BD) functions. — 5. Part II. of (1) exposes two theorems of Mandelbrojt on the smallest argument of the singularity of a Taylor series on its circle of convergence (this Zbl. 16, 308; 18, 140) and the generalization by Denjoy (this Zbl. 21, 332) of the geometrical principle involved in the proof. *J. Horváth*.

**Bourion, G.:** Fonctions quasi analytiques (**P**) dans le champ complexe. Bull. Sci. math., II. Sér. 69, 137—148 (1945).

**Bourion, G.:** Sur la ramification des fonctions quasi analytiques (**P**). Bull. Sci. math., II. Sér. 69, 191—196 (1945).

### Allgemeine Reihenlehre:

**Tigănoiu, A. I.:** Gemischte Folgen. Revista mat. Timișoara 24, 40—44 (1943) [Rumänisch].

**Visa, E.:** Über Summationen. Revista mat. Timișoara 23, 76—78 [Rumänisch].

**Salinas, B. R.:** Methode zur Summation einiger Ausdrücke. Euclides. Madrid 3, 343—348 (1943) [Spanisch].

**Gimenez-Cacho, L.:** Summation eines Typus von Reihen. Euclides. Madrid 3, 505—506 (1943) [Spanisch].

**Aubert, Karl E.:** Summation of some series of binomial coefficients by means of Cauchy's integral formula. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 17, Nr. 21, 86—88 (1944).

**Aubert, Karl E.:** Summierung einiger Reihen von Binomialkoeffizienten auf der Grundlage der Cauchyschen Integrallformel. Norsk mat. Tidsskr. 27, 76—86 (1945) [Norwegisch].

**Kosambi, D. D.:** A note on frequency distribution in series. Math. Student 8, 151—155 (1940).

**Schuh, Fred:** Ist das Cauchysche Konvergenzkriterium schärfer als das d'Alembertsche? Mathematica, Zutphen. A 13, 5—15 (1944) [Holländisch].



Schuh, Fred: Untersuchung der Konvergenz oder Divergenz der Reihe

$\sum_{n=a}^{\infty} \log \{1 + (-1)^n \prod_{j=0}^P (\log_j n)^{k_j}\}$ . Mathematica, Zutphen, A 13, 21—24 (1944) [Holländisch].

Menger, Karl: Methods of presenting  $e$  and  $\pi$ . Amer. math. Monthly 52, 28—33 (1945).

Soddy, F.: The three infinite harmonic series and their sums (with topical reference to the Newton and Leibniz series for  $\pi$ ). Proc. roy. Soc. London, Ser. A 182, 113—129 (1943).

Guinand, A. P.: An asymptotic series for computing  $\pi$ . Math. Gaz. 29, 214—218 (1945).

Selmer, Ernst S.: Unendliche Produkte für  $\pi$ . Norsk mat. Tidsskr. 28, 20 (1946) [Norwegisch].

Dalzell, D. P.: On  $22/7$ . J. London math. Soc. 19, 133—134 (1944).

Aus einer elementaren Identität gewinnt Verf. durch Integration die Ungleichungen  $1\,1260 < 22\,7 - \pi < 1\,630$  und findet eine Reihendarstellung für  $\pi$  in der Form  $\pi = 22/7 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , bei der die  $a_n$  kleiner werden als die Glieder einer geometrischen Reihe vom Verhältnis  $1/1024$ . V. Garten.

Babini, José: Eine Klasse von Reihenentwicklungen für die Zahl  $e$ . Math. Notae 6, 40—44 (1946) [Spanisch].

Aufstellung von Entwicklungen der Gestalt  $e = \frac{1}{K} \sum_0^{\infty} \frac{1}{n! f(n) f(n+1)}$ , wobei das Polynom  $f(x)$  von beliebigem Grad  $p$  als Lösung einer linearen Differenzgleichung 2. Ordnung gefunden wird und die rationale Zahl  $k$  von den Wurzeln von  $f(x)$  abhängt. V. Garten.

Féraud, Lucien: Sur la distribution rectangulaire et les nombres de Bernoulli. C. r. Soc. Physique Genève 62, 71—75 (1945).

Boas jr., Ralph P.: Über die Folge  $\{\cos n_k x\}$ ,  $n_k \rightarrow \infty$ . Math. Notae 5, 41 (1945) [Spanisch].

Puri, Amrit Sagar: An identity and some deductions. Math. Student 13, 41—42 (1945).

Bemerkungen über rekursiv definierte Zahlenfolgen V. Garten.

Tagamlitzki, Yaroslav: Sur les suites vérifiant certaines inégalités. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 940—942 (1946).

Genügt  $a_0, a_1, a_2, \dots$  den Ungleichungen  $|A^n a_n| \leq |A^n q^n|$  mit  $0 < q < 1$ , dann ist  $a_r = A q^r$  mit  $|A| \leq 1$ . Als Anwendung: Aus  $|f^{(n)}(x)| \leq e^{-x}$  für  $x \geq 0$  und  $n = 0, 1, \dots$  folgt  $f(x) = A e^{-x}$  mit  $|A| \leq 1$ . G. Aumann.

Popoviciu, Tiberiu: Über monotone Reihen. Pozitiva 1, 41—45 (1940) [Rumänisch mit französ. Zusammenfassg.].

Jede Folge von  $n!$  ( $n \geq 3$ ) Gliedern enthält eine monotone Teilfolge von  $n$  Gliedern. Existenz einer Zahl  $N_n$  derart, daß zwar jede Folge von  $N_n$  Gliedern eine monotone Teilfolge von  $n$  Gliedern enthält, aber eine Folge von  $N_n - 1$  Gliedern vorhanden ist, die keine monotone Teilfolge von  $n$  Gliedern besitzt. V. Garten.

Egerváry, E.: A remark on the length of the circle and on the exponential function. Acta Sci. math., Szeged 11, 114—118 (1946).

Elementare parallele Beweise für: (1) Die Längen von einem Kreis eingeschriebenen Polygonen konvergieren, wenn alle Seitenlängen unbeschränkt abnehmen, (2)  $\prod_1^n (1 + a_i^{(n)})$  konvergiert, wenn  $a_i^{(n)} > 0$ ,  $\sum_1^n a_i^{(n)} = 1$  und  $\text{Max}_{1 \dots n} a_i^{(n)} \rightarrow 0$ . Anwendungen. Th. Kaluza.

**Pettineo, B.:** Interdipendenza tra serie convergenti e serie divergenti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 934—937 (1946).

Sei  $R_n = U_n^{-1}$  ( $U_n \neq 0$ ). Sind die  $R_n$  Reste einer konvergenten Reihe, so sind die  $U_n$  Teilsummen einer bestimmt divergenten Reihe, und umgekehrt. Dies ergibt eine Dualität zwischen Konvergenz- und Divergenzkriterien. Verf. erläutert das am Satz von Abel-Dini und Verallgemeinerungen dieses Satzes, die den logarithmischen Kriterien entsprechen [siehe Knopp, Unendliche Reihen, 4. Aufl. (dies. Zbl. 31, 118), insbes. S. 299]. *K. Zeller.*

**Kamber, Franz:** Formules exprimant les valeurs des coefficients des séries de puissances inverses. Acta math. 78, 193—204 (1946).

$T$  bzw.  $S_n$  seien Potenzreihen in  $y$  bzw.  $x$ . Gilt (für ein  $m$ )  $x^m = y^m (1 + mT)$ , so bestehen Beziehungen  $y^n = x^n (1 + nS_n)$ . Dabei sind  $m$  und  $n$  beliebig komplex. Verf. bestimmt die Koeffizienten der  $S_n$  aus denen von  $T$ . *K. Zeller.*

**Moore, E. H.:** Classes of sequences of positive numbers. Bull. Amer. math. Soc. 52, 192—219 (1946).

Bearbeitet von H. H. Goldstine und T. H. Hildebrandt. Zur Definition der Klassen verwendet Verf. die Eigenschaften  $\lim a_n < \infty$ ,  $a_n \rightarrow 0$ ,  $a_n \rightarrow \infty$ ,  $\sum a_n < \infty$ ,  $\sum a_n = \infty$ ; die Transformation  $a_n \rightarrow a_n^q$  ( $q$  reell) sowie gewisse Durchschnitts-, Vereinigungs- und Komplementbildungen.  $P \times Q$  wird definiert als die Menge der Folgen der Form  $\{a_n b_n\}$  mit  $\{a_n\} \in P$ ,  $\{b_n\} \in Q$ ; weiter  $PQ$  als die Menge der Folgen  $\{c_n\}$ , für die  $\{c_n b_n\} \in P$  bei beliebigem  $\{b_n\} \in Q$  gilt. Multiplikationstafel für  $P \times Q$  (vgl. die Sätze über Konvergenzfaktoren in  $l^p$ ). Beziehungen zwischen den Räumen. Aussagen wie (einfachstes Beispiel):  $PQ \supset R$  ist äquivalent zu  $R \times Q \subset P$  und zu  $P/R \supset Q$ . *K. Zeller.*

**Schildrop, Edgar B.:** Des suites adjointes et des séries adjointes à une série donnée. Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I 1944, Nr. 4, 19 p. (1945).

Vermöge der (gleichbedeutenden) Beziehungen  $a_{n+1} q_{n+1} = a_n (q_n - 1)$  oder  $a_{n+1} q_{n+1} = q_1 a_1 - s_n$  ( $s_n$  = Teilsummen von  $\sum a_n$ ,  $a_n > 0$ ,  $q_n > 1$ ) entsprechen jedem  $\{q_n\}$  unendlich viel konvergente Reihen  $\sum a_n$  und jeder konvergenten Reihe  $\sum a_n$  unendlich viele  $\{q_n\}$ . Verf. nennt  $\{q_n\}$  bzw.  $\sum q_n^{-1}$  eine zu  $\sum a_n$  adjungierte Folge bzw. Reihe. — Nähere Untersuchung dieses Zusammenhangs. Einige Konvergenzaussagen. *K. Zeller.*

**Levi, F. W.:** Rearrangement of convergent series. Duke math. J. 13, 579—585 (1946).

Verf. untersucht diejenigen Permutationen  $H$  der Reihenglieder, die die Summe jeder bzw. einer festen konvergenten Reihe ungeändert lassen. Bedingungen für diese Eigenschaft, gruppentheoretische Betrachtungen, Einführung einer Hüllentopologie. Verallgemeinerungen: Hyperkomplexe Glieder, Summierbarkeit statt Konvergenz. *K. Zeller.*

**Rogers, C. A.:** Linear transformations which apply to all convergent sequences and series. J. London math. Soc. 21, 123—128 (1946).

**Rogers, C. A.:** Addendum to „Linear transformations which apply to all convergent sequences and series“. J. London math. Soc. 21, 182—185 (1946).

Theorem I: Konvergiert  $\sum_k a_k(\omega) s_k$  für  $\omega = \omega(\{s_k\})$  bei beliebiger Nullfolge  $\{s_k\}$ , so ist  $\sum_k |a_k(\omega)| < \infty$  für  $\omega > \bar{\omega}$ . Ähnlich Theorem II. — Im Addendum vereinfachter Beweis mittels Banachräumen. — Vgl. Tamarkin (dies. Zbl. 11, 207) und Agnew (dies. Zbl. 22, 146). *K. Zeller.*

**Sheffer, I. M.:** Systems of linear equations of analytic type. Duke math. J. 11, 167—180 (1944).

Sei  $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Verf. charakterisiert und untersucht die-

jenigen Transformationen, bei denen  $\lim |c_n|^{1/n} = h$  oder  $\leq h$  aus  $\lim |x_n|^{1/n} = r$  oder  $\leq r$  folgt ( $h = \infty$ ,  $r = \infty$  zugelassen).

K. Zeller.

Allen, H. S.: *T-transformations which leave the core of every bounded sequence invariant*. J. London math. Soc. **19**, 42—46 (1944).

Ist  $C_n$  die kleinste konvexe Menge, die  $x_n, x_{n+1}, \dots$  enthält, so wird nach Knopp  $\bigcap C_n$  der Kern der Folge  $\{x_n\}$  genannt. Sei  $y_n = \sum_k a_{nk} x_k$ . Genau dann gilt für jedes beschränkte  $\{x_n\}$  die Beziehung  $\text{Kern } \{x_n\} = \text{Kern } \{y_n\}$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{nk}| = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$  für alle  $k$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = 1$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K} a_{nk} = 1$  für jede unendliche Teilmenge  $K$  der Menge der natürlichen Zahlen.

Literatur: Winn, dies. Zbl. **6**, 53 und **4**, 346; Raff, dies. Zbl. **7**, 248. K. Zeller.

Karamata, J.: *A note on convergence factors*. J. London math. Soc. **21**, 162—166 (1946).

Die  $e_\nu$  seien Konvergenzfaktoren für die Reihe  $\sum u_\nu$  (mit  $u_\nu \searrow 0$ ), d. h.  $s_{n+1} = \sum_{\nu=1}^n e_\nu u_\nu$  konvergiere oder „divergiere nicht zu stark“.  $\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^n e_\nu \rightarrow 0$  gilt dann unter gewissen Bedingungen [z. B.  $s_n = s + o(n u_{n-1})$ ,  $u_n = O(u_{2n})$ ]. Beweismethode: Konvergenztreue Matrixtransformationen. Vgl. Rademacher [Math. Z. **11**, 276—288 (1921)], W. H. J. Fuchs [Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **7**, 27—30 (1942)].

K. Zeller.

Vermes, P.: *Product of a T-matrix and a  $\gamma$ -matrix*. J. London math. Soc. **21**, 129—134 (1946).

Transformiert die Matrix  $A$  jede konvergente Folge in eine konvergente Folge,  $G$  jede konvergente Reihe in eine konvergente Folge (jeweils mit demselben Grenzwert), so hat  $H = AG$  die bei  $G$  genannte Eigenschaft. Weitere Zusammenhänge zwischen  $G$  und  $H$ . Beispiele.

K. Zeller.

Nigam, Tapeshwari Prasad: *On  $\gamma$ -transformations of series*. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **6**, 123—127 (1940).

● Teghem, Jean: *Sur des procédés de sommation issus de la transformation d'Euler*. Thesis, Université Libre de Bruxelles, 1946. 88 p.

Hyslop, J. M.: *Note on certain related conditions in the theory of Cesàro summability*. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **6**, 166—171 (1940).

Garabedian, H. L.: *Hausdorff matrices*. Amer. math. Monthly **46**, 390—410 (1939).

Hildebrandt, T. H.: *Remarks on the Abel-Dini theorem*. Amer. math. Monthly **49**, 441—445 (1942).

Goddard, L. S.: *A problem in the summation of series*. Proc. Cambridge philos. Soc. **39**, 200—202 (1943).

Goddard, L. S.: *On the summation of certain trigonometric series*. Proc. Cambridge philos. Soc. **41**, 145—160 (1945).

Sei (1)  $S_n^1(x) = \alpha^2 n^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/x)}{m^4(m^2 - \alpha^2 n^2)}$ , (2)  $T_n^1(x) = \alpha^2 n^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/x)}{m^{1/2}(m^2 - \alpha^2 n^2)^{3/2}}$  ( $x > 1$ ;  $n$  positiv ganz). Darstellung der in der elektromagnetischen Theorie auftretenden Reihen  $S_n^1(x)$ ,  $T_n^1(x)$  für ganzzahliges  $x$  mittels Partialbruchzerlegung in Form eines endlichen Ausdruckes. Die Berechnung von (1), (2) für beliebige  $x > 1$  wird mittels Rekursionsformeln auf  $S_n^1$ ,  $S_n^2$ ,  $T_n^1$ ,  $T_n^2$  und  $\Theta_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/x)}{m^k}$  ( $k = 2, 3, \dots$ )

bzw. auf Bernoullische Polynome und endliche trigonometrische Summen zurückgeführt. Integraldarstellung von  $S_n^1$ ,  $T_n^1$  und asymptotische Entwicklung für große  $x$ . Tabellen für spezielle Werte.

V. Garten.



**Tchélidzé (Čelidze), V.:** Le théorème d'Abel pour une série double. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskij SSR 4, 201—206 (1943) [Russisch mit georg. u. französ. Zusammenfassg.].

Schärfere Aussagen siehe Verf. (dies. Zbl. 35, 40) und Ogieveckij (dies. Zbl. 37, 326). K. Zeller.

**Chen, Kien-Kwong:** Some one-sided Tauberian theorems. Anais Acad. Brasil. Ci. 17, 249—259 (1945).

Umkehrsätze der Form  $A \rightarrow C_k$  (Abel  $\rightarrow$  Cesàro).

K. Zeller.

**Dufresnoy, Jacques:** Extension de deux théorèmes de M. Fejér. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 945—946 (1946).

Umkehrsätze für das Abelverfahren.

K. Zeller.

**Rosenblatt, Alfred:** Über einige Taubersche Sätze. Revista Ci. 47, 583—600 (1945) [Spanisch].

Verallgemeinerung eines Satzes von Tauber über das Abelverfahren.

K. Zeller.

**Bosanquet, L. S.:** Note on the converse of Abel's theorem. J. London math. Soc. 19, 161—168 (1944).

Aus  $\lim_{s \rightarrow +0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = 0$  und  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\lambda_n < \lambda_m < (1+\delta)\lambda_n} |a_{n+1} + \dots + a_m| = 0$  folgt  $\sum a_n = 0$ . Darin sind verschiedene ältere Umkehrsätze enthalten. Ausführliche Literaturangaben. K. Zeller.

**Neder, Ludwig:** Über den Zusammenhang zweier Sätze von Lebesgue und Toeplitz. Math. Z. 49, 576—578 (1944).

Verf. weist auf den Zusammenhang zweier Sätze von Lebesgue (1°) und Toeplitz (2°) über konvergenztreue Integral- bzw. Matrixtransformationen hin. Jedoch trifft seine Behauptung, daß 2° unmittelbar aus 1° folgt, nicht zu.

K. Zeller.

**Picone, Mauro:** Sul limite del quoziente di due funzionali reali. Boll. Un. mat. Ital., II. Ser. 5, 120—123 (1943).

Unter geeigneten Voraussetzungen schließen bei einem Limitierungsverfahren die Häufungsgrenzen der Urfolge diejenigen der Transformaten ein. Dies wird mit der Regel von l'Hospital in Verbindung gebracht.

K. Zeller.

**Silverman, L. L. and O. Szász:** On a class of Nörlund matrices. Ann. of Math., II. Ser. 45, 347—357 (1944).

Untersuchung der Nörlundverfahren ( $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{-1} \sum_{v=0}^n p_{n-v} x_v$  mit  $P_n = \sum_{v=0}^n p_v$ ), bei denen  $p_v = 0$  für fast alle  $v$  gilt, insbesondere  $p_v = 1$  ( $0 \leq v \leq k$ ),  $p_v = 0$  sonst ist (Verfahren  $Z_k$ ). Ergebnisse über Vertauschbarkeit, Vergleich der Wirkfelder (untereinander und mit den Cesàro-Verfahren), absolute Summierbarkeit, Summierbarkeit des Cauchyprodukts, Umkehrung der Transformation  $\Delta I \rightarrow (1 - \Delta) Z_k$ .

K. Zeller.

● **Szász, Otto:** Introduction to the theory of divergent series. Department of Mathematics, Graduate School of Arts and Sciences, Cincinnati, Ohio: University of Cincinnati 1944. V, 72 p. § 1, 25.

**Szász, Otto:** Some new summability methods with applications. Ann. of Math., II. Ser. 43, 69—83 (1942).

Aufstellung von Regularitätsbedingungen für die folgenden, aus dem Abel-schen abgeleiteten Limitierungsverfahren: I.  $A_n = \sum_{v=0}^n u_v x_n^v$ . II.  $B_n = \sum_{v=0}^n s_v x_n^v (1 - x_n)$ , wobei  $s_n = \sum_{v=0}^n u_v$  und  $x_n \rightarrow 1$  entlang einem Weg innerhalb des Einheitskreises, der nicht tangential zum Einheitskreis verläuft, zu nehmen ist, III.  $A(\varrho, \theta) =$

$\sum_{v=0}^{\infty} u_v \Re\{x_v\} = \sum_{v=0}^{\infty} u_v \varrho^v \cos v \Theta$  ( $\varrho \rightarrow 1$ ,  $\Theta \rightarrow 0$ ). IV.  $A_n(\varrho_n, \Theta_n) = \sum_{v=0}^n u_v \varrho_n^v \cos v \Theta_n$  ( $\varrho_n \rightarrow 1$ ,  $\Theta_n \rightarrow 0$ ). Die mit dem Lebesgueschen Verfahren assoziierte Transformation  $A_n(x_n) = \sum_{v=0}^n u_v \frac{\sin v x_n}{v x_n}$  wird für reelle positive  $x_n \rightarrow 0$  auf ihre Regularität hin untersucht und es wird für sie ein Tauberscher Satz mitgeteilt: Aus  $A_n(x_n) \rightarrow s$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} |1 - x_n| (|x_n|^{-n} - 1) (1 - |x_n|)^{-1} < 1$  folgt (bei reellen oder komplexen  $x_n$ )  $s_n \rightarrow s$ . Die eingeführten Verfahren werden auf Fouriersche Reihen angewandt. V. Garten.

Szász, Otto: On Abel and Lebesgue summability. Bull. Amer. math. Soc. **49**, 885—893 (1943).

Szász, Otto: On Lebesgue summability and its generalization to integrals. Amer. J. Math. **67**, 389—396 (1945).

Eine Reihe  $\sum_1^{\infty} a_n$  heißt  $L$ -summierbar zum Wert  $s$ , wenn  $F(t) = \sum_1^{\infty} a_v \frac{\sin v t}{v}$  in einem Intervall  $0 < t < \pi$  konvergiert und  $t^{-1} F(t) \rightarrow s$  für  $t \rightarrow 0$ . Ist  $\sum_1^{2n} (|a_v - a_v|) = O(1)$ , so gilt: Die Aussagen  $t^{-1} F(t) = O(1)$ ,  $\sum_1^n a_v v^n = O(1)$  ( $v \rightarrow 1 - 0$ ),  $s_n = \sum_1^n a_v = O(1)$  sind gleichbedeutend; ist  $\sum a_v$  Abel-summierbar, so  $L$ -summierbar; ist  $\sum a_v$  konvergent, so ist  $\sum a_v \frac{\sin v t}{v}$  gleichmäßig konvergent in  $(0, \pi)$ . Ist eine Reihe  $\sum a_v$  für ein  $\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$   $C_{1-\alpha}$ -summierbar und ist  $\sum_1^n v^{-\alpha} = O(n^{1-\alpha})$ , so ist  $\sum a_n$   $L$ -summierbar. Verallgemeinerungen der  $L$ -Summierbarkeit auf Integrale werden erwähnt. A. Peyerimhoff.

Rényi, Alfred: On a Tauberian theorem of O. Szász. Acta Sci. math., Szeged **11**, 119—123 (1946).

Ist  $\sum a_k$  Abel-summierbar und existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^n k |a_k|$ , so ist  $\sum a_k$  konvergent. Die Existenz des Limes kann dabei nicht durch die schwächere Voraussetzung der Beschränktheit ersetzt werden. Die Konvergenzbedingung wird noch in etwas allgemeinerer Gestalt gegeben. Vgl. Szász, J. London math. Soc. **3**, 254—262 (1928). K. Zeller.

Hardy, G. H. and J. E. Littlewood: Notes on the theory of series. XXII. On the Tauberian theorem for Borel summability. J. London math. Soc. **18**, 194—200 (1943).

Teil XXI s. dies. Zbl. **17**, 162. „Ist  $\sum a_n$  Borel-summierbar und  $\sqrt[n]{n a_n}$  beschränkt, so konvergiert  $\sum a_n$ “. Dies wird auf neue Weise bewiesen, wobei an entscheidender Stelle der Vitalische Konvergenzsatz gebraucht wird. Der Beweis ist dargestellt bei Hardy (dies. Zbl. **32**, 58). K. Zeller.

Hardy, G. H. and J. E. Littlewood: Notes on the theory of series. XXIV. A curious power-series. Proc. Cambridge philos. Soc. **42**, 85—90 (1946).

Teil XXIII *ibid.* **40**, 103—107 (1944).

Sei  $\Theta$  eine beliebige irrationale Zahl.  $S(a_n) = \sum a_n x_n^{\Theta} \sin n \pi \Theta$ ,  $T(a_n) = \sum a_n x^n \sin \pi \Theta \sin 2\pi \Theta \cdots \sin n \pi \Theta$ . Im Fall  $a_n = 1$  gilt: Ist  $\varrho$  der Konvergenzradius von  $S(1)$ , so ist der Konvergenzradius von  $T(1)$   $\varrho/2$ . Für fast alle  $\Theta$  ist  $\varrho = 1$ , also der Konvergenzradius von  $T(1)$   $1/2$ , und für fast alle  $\Theta$  ist

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \log |\operatorname{cosec} v \pi \Theta| = \log 2.$$

Wenn (1) zutrifft, gelten entsprechende Aussagen für die Konvergenzradien von  $S(a_n)$ ,  $T(a_n)$  mit  $a_n \equiv 1$ . V. Garten.

- (1) Pollard, Harry: Subseries of a convergent series. Bull. Amer. math. Soc. 49, 730—731 (1943).  
 (2) Buck, R. Creighton: A note on subsequences. Bull. Amer. math. Soc. 49, 898—899 (1943).  
 (3) Buck, R. Creighton and Harry Pollard: Convergence and summability properties of subsequences. Bull. Amer. math. Soc. 49, 924—931 (1943).  
 (4) Buck, R. Creighton: Limit points of subsequences. Bull. Amer. math. Soc. 50, 395—397 (1944).  
 (5) Day, M. M.: Cluster points of subsequences. Bull. Amer. math. Soc. 50, 398—404 (1944).

(1) Mit Hilfe der Rademacherschen Funktionen  $R_n(x)$  werden die Teilreihen einer gegebenen Reihe  $\sum u_n$  den Punkten des Intervalls  $0 \leq x \leq 1$  vermöge

$$(*) \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - R_n(x)}{2} u_n \text{ zugeordnet. Notwendig und hinreichend dafür, daß } (*)$$

auf einer Menge von positivem Maß konvergiert, ist die Konvergenz der beiden Reihen  $\sum u_n = s$  und  $\sum u_n^2$ . Ist die Bedingung erfüllt, so konvergiert (\*) fast überall und es gilt die von Hill [Bull. Amer. math. Soc. 48, 103—108 (1942)]

herrührende Mittelwertformel  $\int_0^1 \varphi(x) dx = s/2$ . (2) Unter Anwendung eines Satzes

von Steinhaus wird ein sehr allgemeiner Umkehrsatz aufgestellt, der aber infolge seiner großen Allgemeinheit wohl kaum ein praktisch anwendbares Kriterium liefert: Eine Folge konvergiert, sobald ein reguläres Matrixverfahren existiert, das jede Teilfolge der gegebenen Folge limitiert. (3) Eine Folge  $s_n$  konvergiert dann und nur dann, wenn fast alle ihrer Teilfolgen konvergieren. Aus  $C_1\text{-}\lim s_n = S$  und  $\sum s_n^2/n^2 < \infty$  folgt die  $C_1$ -Limitierbarkeit zum gleichen Wert  $S$  für fast alle Teilfolgen. Sind fast alle Teilfolgen einer Folge  $s_n$   $C_1$ -limitierbar, so existiert  $C_1\text{-}\lim s_n = s$  und fast alle Teilfolgen sind zum gleichen Wert  $s$  limitierbar. Eine beschränkte Folge ist dann und nur dann  $C_1$ -limitierbar, wenn es fast alle ihre Teilfolgen sind. Dabei ist zu beachten: Eine Menge von Teilfolgen enthält „fast alle“ Teilfolgen, wenn bei der Abbildung der Teilfolgen von  $s_n$  auf die Punkte  $t$  des Intervalls  $0 < t \leq 1$  mittels dyadischer Entwicklung der Zahl  $t$  die Bildmenge der Punkte  $t$  das Maß 1 besitzt. (4) Die Menge der Häufungspunkte einer mehrfachen Folge stimmt mit der Menge der Häufungspunkte fast jeder Teilfolge überein. (5) Weiterführung und Verallgemeinerung dieser Ergebnisse unter Heranziehung spezifisch topologischer Begriffsbildungen.

V. Garten.  
**Rajagopal, C. T.:** On converse theorems of summability. Math. Gaz. 30, 272—276 (1946).

Beweise bekannter Umkehrsätze für  $R(\lambda_n, 1)$  und  $D(\lambda_n)$ . K. Zeller.

**Rajagopal, C. T.:** Postscript to „Convergence theorems for series of positive terms“. J. Indian math. Soc., n. Ser. 5, 113—116 (1941).

Bezieht sich auf die in dies. Zbl. 20, 14 besprochene Arbeit.

**Rajagopal, C. T.:** Remarks on some generalizations of Cauchy's condensation and integral tests. Amer. math. Monthly 48, 180—185 (1941).

**Rajagopal, C. T.:** On Abel's divergence test for series of positive terms. Math. Student 8, 118—123 (1940).

**Rajagopal, C. T.:** The Abel-Dini and allied theorems. Amer. math. Monthly 51, 566—570 (1944).

**Rajagopal, C. T.:** On the limits of oscillation of a function and its Cesàro means. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 7, 162—167 (1946).

Die Häufungsgrenzen einer langsam schwankenden Funktion werden durch die der  $C$ -Transformierten abgeschätzt.

K. Zeller.



Rajagopal, C. T.: A note on the oscillation of Riesz means of any order. J. London math. Soc. **21** (1946), 275—282 (1947).

Abschätzungen für die Häufungsgrenzen der Riesz-Transformierten einer Reihe  $\sum u_n$ , wenn die  $u_n$  einer gewissen  $O_k$ - bzw.  $O$ -Bedingung genügen. K. Zeller.

Minakshisundaram, S. and C. T. Rajagopal: On a Tauberian theorem of K. Ananda Rau. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **17**, 153—161 (1946).

Umkehrsätze für das Rieszverfahren, bei denen aus einer Größenbeschränkung der Transformierten auf eine Größenbeschränkung der Teilsummen geschlossen wird (mit  $O$ -,  $o$ -, Lückenbedingungen u. a.). K. Zeller.

Chandrasekharan, K.: The second theorem of consistency for absolutely summable series. J. Indian math. Soc., n. Ser. **6**, 168—180 (1942).

Chandra Sekharan, K.: Bessel summation of series. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **17**, 219—229 (1943).

Chandrasekharan, K.: The absolute Bessel-summability of series. Bull. Calcutta math. Soc. **34**, 187—196 (1942).

Chandrasekharan, K.: Bessel-summability of the product of two series. J. Indian math. Soc., n. Ser. **7**, 31—35 (1943).

Minakshisundaram, S.: A new summation process. Math. Student **11**, 21—27 (1943).

Ausführliche Untersuchung von Summierungsverfahren der Form

$$(J_\mu, \lambda_n, r) \cdot \sum u_k = \lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{k=0}^{\infty} u_k [\mu! 2^\mu (\lambda_k t)^{-\mu} J_\mu(\lambda_k t)]^r,$$

wo  $J_\mu$  die Besselfunktion erster Art ist. Taubersätze. Vergleich mit den Cesàro-Verfahren. K. Zeller.

Agnew, Ralph Palmer: A simple and natural notation for the theory of summability of series and sequences. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A **5**, 195—202 (1946).

Agnew, R. P.: Summability of power series. Amer. math. Monthly **53**, 251—259 (1946).

Genaue Bedingungen dafür, daß ein Matrixverfahren jede Potenzreihe mit einem Konvergenzradius größer als  $R \geq 1$  summiert. A. Peyerimhoff.

Agnew, Ralph Palmer: Abel transforms of Tauberian series. Duke math. J. **12**, 27—36 (1945).

Verschärfung der beim Abelschen Verfahren von H. Hadwiger (dies. Zbl. **28**, 391) angegebenen Tauberschen Konstanten. A. Peyerimhoff.

Agnew, Ralph Palmer: Analytic extension by Hausdorff methods. Trans. Amer. math. Soc. **52**, 217—237 (1942).

Agnew, Ralph Palmer: On Hurwitz-Silverman-Hausdorff methods of summability. Tôhoku math. J. **49**, 1—14 (1942).

Greenberg, H. J. and H. S. Wall: Hausdorff means included between  $(C, 0)$  and  $(C, 1)$ . Bull. Amer. math. Soc. **48**, 774—783 (1942).

Definiert  $\chi(t)$  ein permanentes Hausdorffverfahren  $H(\chi)$  und ist  $r$  die untere Grenze der Zahlen  $\rho$  mit  $\chi(t) = 1$  für  $\rho < t < 1$  [ $\chi(t)$  ohne hebbare Singularitäten], so wird die geometrische Reihe durch  $H(\chi)$  summiert im Kreis  $|z - (1 - r^{-1})| = r^{-1}$ , außerhalb nicht (ebenso verhält sich das Euler-Knopp'sche Verfahren  $E_r$ ). Anwendung auf die analytische Fortsetzung von Potenzreihen. Das Verfahren  $\mathfrak{H}$  (collective Hausdorff method) wird als Vereinigung aller permanenten Hausdorffverfahren erklärt. Ist  $\{n_i\}$  eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit  $n_{i+1}, n_i \rightarrow \infty$  und ist  $\sum u_k$   $\mathfrak{H}$ -summierbar und  $u_n = 0$  für  $n \neq n_i$ , so ist  $\sum u_n$  konvergent. Aus Voraussetzungen über die Nullstellen der Momentfunktion

$\mu(z) = \int_0^1 t^z d\chi(t)$  werden Vergleichssätze für Hausdorffverfahren abgeleitet.

Ist  $\Phi(u)$  in  $0 \leq u \leq \infty$  von beschränkter Schwankung und  $\Phi(\infty) - \Phi(0) = 1$ , so ist  $\alpha(z) = \int_0^\infty \frac{1}{1+uz} d\Phi(u)$  eine reguläre Momentfunktion, und für das Hausdorffverfahren  $[H, \alpha(n)]$  gilt  $C_0 \subseteq [H, \alpha(n)] \subseteq C_1$ , falls  $\Phi(u)$  monoton ist.

*A. Peyerimhoff.*

**Agnew, Ralph Palmer:** A genesis for Cesàro methods. Bull. Amer. math. Soc. **51**, 90—94 (1945).

Beweis des bekannten Satzes [E. Ullrich, Math. Z. **25**, 382—387 (1926)], daß genau die Cesàroschen Verfahren gleichzeitig Hausdorff- und Nörlundverfahren sind. (Vgl. auch L. L. Silverman, dies. Zbl. **16**, 20.)

*A. Peyerimhoff.*

**Agnew, Ralph Palmer:** Summability of subsequences. Bull. Amer. math. Soc. **50**, 596—598 (1944).

**Agnew, Ralph Palmer:** On cores of bounded divergent complex sequences and of their transforms by square matrices. Revista Ci. **47**, 87—103 (1945).

Ist  $A$  ein reguläres Matrixverfahren und  $\{x_n\}$  eine beschränkte komplexe Folge, dann gibt es eine Teilfolge  $\{y_n\}$ , so daß jeder Häufungswert von  $\{x_n\}$  auch Häufungswert der  $A$ -Transformierten von  $\{y_n\}$  ist. Genaue Bedingungen, wann ein Matrixverfahren den Kern jeder beschränkten Folge verkleinert.

*A. Peyerimhoff.*

**Agnew, Ralph Palmer:** Euler transformations. Amer. J. Math. **66**, 313—338 (1944).

**Agnew, Ralph Palmer:** On sequences with vanishing even or odd differences. Amer. J. Math. **66**, 339—340 (1944).

**Fuchs, W. H. J.:** A theorem on finite differences with an application to the theory of Hausdorff summability. Proc. Cambridge philos. Soc. **40**, 188—196 (1944).

**Pollard, Harry:** Sequences with vanishing even differences. Duke math. J. **12**, 303—304 (1945).

Das Eulersche Limitierungsverfahren  $E(r): \sigma_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} s_k$  wird für komplexe  $r$  eingehend von Agnew untersucht; u. a. Fragen der Limitierbarkeit von  $\{z^n\}$ , Vergleich mit anderen Verfahren, Verträglichkeit der Verfahren  $E(r)$ . Zusammenhang mit Eulerschen Reihentransformationen, Summierbarkeit von Potenzreihen. Anwendung: Satz über Differenzen: ein Teil dieses Satzes wird erweitert von Pollard; eine wesentliche Verallgemeinerung gibt Fuchs: Ist  $0 < a_1 < a_2 < \dots$ ,  $n(R)$  die Anzahl der  $a_i$ , die  $R$  nicht übersteigen,  $\{s_n\}$  eine Folge komplexer Zahlen, so folgt aus  $n(R) \geq R/2$  ( $R > R_0$ ),  $s_n = o(n^K)$ ,  $\Delta^p s_0 = 0$  für  $p = a_1, a_2, \dots$ , daß  $s_n = P(n)$  ist, wo  $P(x)$  ein Polynom eines Grades  $\leq K$  ist. Anwendung auf Hausdorffverfahren.

*A. Peyerimhoff.*

**Agnew, R. P. and J. D. Hill:** Summability of bounded sequences. Duke math. J. **11**, 573—574 (1944).

**Agnew, Ralph Palmer:** Convergence fields of methods of summability. Ann. of Math., II. Ser. **46**, 93—101 (1945).

**Agnew, Ralph Palmer:** A simple sufficient condition that a method of summability be stronger than convergence. Bull. Amer. math. Soc. **52**, 128—132 (1946).

**Hill, J. D.:** Summability of sequences of 0's and 1's. Ann. of Math., II. Ser. **46**, 556—562 (1945).

Der Raum der beschränkten Folgen, die durch ein permanentes Matrixverfahren limitierbar sind, ist i. a. nicht separabel. Beim Beweis ergibt sich, daß fast alle Folgen, die nur 0 und 1 enthalten, Cesàro-limitierbar sind. Hill untersucht die Summierbarkeit dieser Folgen durch allgemeine Matrixverfahren. Agnew nennt Bedingungen, unter denen langsam schwankende Folgen durch ein reguläres

Matrixverfahren limitierbar sind. Anwendungen auf die Folge  $1, -1, 1, -1, \dots$  u. a. Es wird eine Bedingung für Matrixverfahren angegeben, welche die Existenz einer limitierbaren divergenten Folge nach sich zieht (allgemeiner bei K. Zeller, dies. Zbl. 46, 64).

A. Peyerimhoff.

Hill, J. D.: Some properties of summability. Duke math. J. 9, 373—381 (1942).

Hill, J. D.: Some properties of summability. II. Bull. Amer. math. Soc. 50, 227—230 (1944).

Genaue Bedingungen, wann ein Matrixverfahren Indexverschiebung (bei den limitierbaren Folgen) erlaubt. Vergleichs- und Verträglichkeitssätze für allgemeine Matrixverfahren. (Bei den Verträglichkeitssätzen ist Perfektheit des schwächeren Verfahrens die wesentliche Voraussetzung.) Ist  $A$  ein reguläres Matrixverfahren und  $B$  der Raum der limitierbaren beschränkten Folgen, so gibt es zu jedem separablen Teilraum  $S$  von  $B$  eine Matrix  $A'$ , deren Zeilen aus  $A$  genommen sind, so daß alle Folgen aus  $S$   $A'$ -limitierbar sind. Ist  $A$  perfekt und wird eine beschränkte divergente Folge limitiert, so auch eine unbeschränkte. Die Voraussetzung der Perfektheit ist überflüssig nach K. Zeller [Math. Z. 53, 463—487 (1951) (dies. Zbl. 45, 334)].

A. Peyerimhoff.

Hill, J. D.: Nörlund methods of summability that include the Cesàro methods of all positive orders. Amer. J. Math. 67, 94—98 (1945).

Szász, Otto: On some summability methods with triangular matrix. Ann. of Math., II. Ser. 46, 567—577 (1945).

Agnew, Ralph Palmer: Tauberian theorems for Nörlund summability. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., Revista Vol. 3, Nr. 5, 517—520 (1946).

Durch Spezialisierung eines Satzes von Mazur [Math. Z. 28, 599—611 (1928)] werden genaue Bedingungen angegeben, wann ein Nörlundverfahren stärker als ein Cesàrosches Verfahren  $C_\alpha$  ist. Das Nörlundverfahren mit  $p_n = \cosh \sqrt[n]{n}$  ist stärker als  $C_\alpha$ ,  $\alpha$  beliebig. Es werden gewisse Klassen von Dreiecksverfahren [z. B.  $a_{n+1} = (1-x)x_n^p$  ( $p < \alpha$ ),  $a_{n+1} = x_n^n$ ,  $x_n \rightarrow 1$ ] untersucht und Bedingungen abgeleitet, wann sie stärker als alle  $C_r$ -Verfahren sind. Ist  $n p_n / P_n = O(1)$  ( $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$ ,  $p_n > 0$ ), so ist jede  $(N, p_n)$ -summierbare Reihe  $\sum u_n$  mit  $u_n P_n / p_n > -K$  konvergent.

A. Peyerimhoff.

San Juan, R.: Differentiation and Integration asymptotischer Reihen. Revista Univ. Madrid. Ci. 2, 18 p. (1942) [Spanisch].

Rankin, R. A.: A note on a particular type of asymptotic series. Philos. Mag., VII. Ser. 36, 860—861 (1945).

Restgliedabschätzungen bei asymptotischen Reihen. A. Peyerimhoff.

Garabedian, H. L.: The Cesàro kernel transformation. Amer. math. Monthly 49, 296—301 (1942).

Integraltransformationen, die — als Limitierungsverfahren aufgefaßt — stärker als  $C_\alpha$  ( $\alpha$  fest) sind. K. Zeller.

● Garabedian, H. L. and H. S. Wall: Topics in continued fractions and summability. Northwestern University Studies in Mathematics and the Physical Sciences, no. 1: Mathematical Monographs, vol. 1, p. 87—132. Graduate School, Northwestern University, Evanston, Ill., 1941. \$ 2,25.

Pedersen, Peder: Kettenbruchentwicklung für  $\pi$ . Mat. Tidsskr. B 1945, 142—144 (1945) [Dänisch].

Es werden die ersten 96 Teilnehmer des regelmäßigen Kettenbruches von  $\pi$  berechnet. Die Abweichung von  $\pi$  ist dabei kleiner als  $1,6 \cdot 10^{-100}$ . J. Mall.

Davis, C. S.: On some simple continued fractions connected with  $e$ . J. London math. Soc. 20, 194—198 (1945).



Die regelmäßigen Kettenbruchentwicklungen von  $\exp(k^{-1})$  und  $\exp(2k^{-1})$  werden durch eine aus Hermites Transzendentenbeweis von  $e$  stammende Methode gewonnen. Die Näherungsbrüche werden aus bestimmten Integralen gewonnen. *J. Mall.*

**Cabannes, Henri:** Étude des fractions continues ayant leurs quotients en progression géométrique. *Revue sci.* **83**, 230—233 (1945).

Bei Kettenbrüchen, deren Teilnenner entweder arithmetische oder geometrische Reihen bilden, werden Zähler und Nenner des  $n$ -ten Näherungsbruches abgeschätzt und der Kettenbruch als Quotient zweier Reihen dargestellt. *J. Mall.*

**Schwerdtfeger, H.:** Möbius transformations and continued fractions. *Bull. Amer. math. Soc.* **52**, 307—309 (1946).

Verf. hat den Beweis von Lane [*Bull. Amer. math. Soc.* **51**, 246—250 (1945)] (dies. Zbl. **60**, 163) unter Verwendung der sogenannten reinen Transformation und durch Verwendung der Begriffe anziehender, abstoßender und indifferenter Fixpunkte weiter vereinfacht und den endgültigen Satz nur mit Hilfe der Möbiustransformation ausgedrückt. *J. Mall.*

**Ryde, Folke:** Der Algorithmus der monotonen, nichtwachsenden Kettenbrüche. *Ark. Mat. Astr. Fys.* **31A**, Nr. 19, 18 S. (1945).

Behandelt wird die Entwicklung rationaler Zahlen  $r > 1$  in einen Kettenbruch mit monotonen, nichtwachsenden ganzzahligen Teilzählern und Teilennern der Form

$$a + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \dots + \frac{k}{l} + \frac{l}{1}, \text{ wo } a \geq b \geq c \geq \dots \geq k \geq l \geq 1.$$

Es wird gezeigt, daß gewisse rationale Zahlen nicht in dieser Form entwickelt werden können, während andere auf mehr als eine Art entwickelt werden können. Insbesondere wird bewiesen, daß kein  $r$  existiert ( $1 < r < 154$ ), das mehr als eine Entwicklung in Form eines monotonen, nichtwachsenden Kettenbruches besitzt. Es wird auch ein Algorithmus für die entstehenden Entwicklungen abgeleitet. *J. Mall.*

**Ryde, Folke:** Über die rekursorische Berechnung der monotonen, nichtwachsenden Kettenbrüche. *Ark. Mat. Astr. Fys.* **31 B**, Nr. 12, 6 S. (1945).

Es werden Rekursionsformeln abgeleitet für die Funktion  $Nm(r)$ , wo  $Nm(r)$  die Zahl der Entwicklungen einer gegebenen rationalen Zahl  $r > 1$  in einen monotonen, nichtwachsenden Kettenbruch bedeutet. (Siehe vorausgeh. Arbeit.)

*J. Mall.*

**Hukamehand:** Proofs of some wellknown theorems in continued fractions. *Math. Student* **13**, 98—101 (1945).

Die Beweise werden für Kettenbruchentwicklungen quadratischer Irrationalzahlen gegeben. *J. Mall.*

**Krishnaswami Ayyangar, A. A.:** Theory of the nearest square continued fraction. *J. Mysore Univ. Sect. A* **1**, 21—32 (1940), 97—117 (1941).

Diese Arbeiten behandeln einen besonderen halbregelmäßigen Kettenbruchalgorithmus, der etwas verwandt ist mit dem Algorithmus nach nächsten Ganzen. Die Entwicklung wird für den allgemeineren irrationalen quadratischen Ausdruck  $(P + \sqrt{R})/\omega$  definiert und stützt sich mutmaßlich auf Bhaskara's zyklische Methode, die Pellsche Gleichung zu lösen, obwohl im einzelnen keine Verbindung damit hergestellt wird. *J. Mall.*

**Bradshaw, J. W.:** Modified continued fractions. *Amer. math. Monthly* **49**, 513—519 (1942).

Die Schnelligkeit der Konvergenz von Kettenbrüchen, deren Teilnenner  $b_r$  rationale Funktionen von  $r$  sind, läßt sich vergrößern durch Einführung geeigneter rationaler Funktionen für den letzten Teilnenner  $b_n$  des Näherungsbruches  $A_n/B_n$  (Anwendung auf den Eulerschen Kettenbruch für  $\pi/2$ ). *J. Mall.*

Ballieu, R.: Sur des suites de nombres liées à une fraction continue régulière. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 29, 165—174 (1943).

Es sei  $A = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  ein regelmäßiger Kettenbruch und  $A_i = (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots)$  sowie  $A'_i = (a_i, a_{i-1}, \dots, a_1)$ . Untersucht werden die Häufungsstellen der Folgen  $\{A_i\}$  und  $\{A'_i\}$ . J. Mall.

Bissinger, B. H.: A generalization of continued fractions. Bull. Amer. math. Soc. 50, 868—876 (1944).

Bissinger, B. H. and F. Herzog: An extension of some previous results on generalized continued fractions. Duke math. J. 12, 655—662 (1945).

Herzog, F. and B. H. Bissinger: A generalization of Borel's and F. Bernstein's theorems on continued fractions. Duke math. J. 12, 325—334 (1945).

Der regelmäßige Kettenbruch  $\frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \dots$  kann entstanden gedacht werden als das Ergebnis einer fortgesetzten Iteration der Funktion  $f(t) = 1/t$  in der Form (1)  $f(a_1 - f(a_2 - \dots))$ , wobei die  $a_i$  positive ganze Zahlen sind. Die erste Arbeit untersucht die Eigenschaften des unendlichen Prozesses (1), wenn  $f$  ein Glied einer Funktionenklasse  $F$  oder besonders  $F_p$  sein darf. Dabei ist  $F$  die Klasse aller monoton abnehmenden Funktionen  $f(t)$ , definiert für  $t > 1$  mit  $f(t) = 1$  und  $f(\infty) = 0$ , wobei die Geraden, die irgendwelche zwei Punkte auf der Kurve  $y = f(x)$  verbinden, flacher zur  $x$ -Achse liegen als eine Gerade mit der Neigung  $-1$  zur  $x$ -Achse.  $F_p$  ist diejenige Unterklasse von  $F$ , in der  $f(t)$  linear ist zwischen ganzen Zahlenwerten von  $t$ . Wenn  $x$  eine Zahl zwischen 0 und 1 ist, so läßt sie sich als Grenzwert verallgemeinerter Kettenbrüche, deren Näherungsbrüche die Gestalt

$$\begin{aligned}x_1 &= f(a_1) \\x_2 &= f(a_1 + f(a_2)) \\x_3 &= f(a_1 + f(a_2 + f(a_3))) \dots\end{aligned}$$

haben, darstellen. Die  $a_i$  ergeben sich aus einer Verallgemeinerung des Euklidischen Algorithmus. Es werden über diesen verallgemeinerten Kettenbruch verschiedene Sätze bewiesen. In den folgenden beiden Arbeiten werden Ergebnisse über klassische Kettenbrüche auf die verallgemeinerten Kettenbrüche übertragen.

J. Mall.

Lane, Ralph E.: The convergence and values of periodic continued fractions. Bull. Amer. math. Soc. 51, 246—250 (1945).

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz des periodischen Kettenbruches mit komplexen Elementen

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_k}{b_k} + \frac{a_1}{b_1} + \dots$$

werden mit evtl. Zuhilfenahme einer linearen gebrochenen Transformation  $S$ , durch die der Kettenbruch durch Iteration erzeugt gedacht werden kann, abgeleitet. J. Mall.

Lane, Ralph E.: The value region problem for continued fractions. Duke math. J. 12, 207—216 (1945).

Bei dem Kettenbruch  $\frac{1}{|1|} + \frac{a_1}{|1|} + \frac{a_2}{|1|} + \dots$  mögen die  $a_n$  alle innerhalb des gegebenen Gebietes  $E$  liegen. Es wird für eine ausgedehnte Klasse von Funktionen ein allgemeiner Satz bewiesen, unter welchen Bedingungen dann die Näherungsbrüche innerhalb eines Gebietes  $V$  liegen. J. Mall.

Bankier, J. D. and W. Leighton: Numerical continued fractions. Amer. J. Math. 64, 653—668 (1942).

Verallgemeinerung der Ergebnisse über periodische Kettenbrüche der Form  $b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots$  mit komplexen Elementen  $a_i$  und  $b_i$ . J. Mall.

Cowling, V. F., W. Leighton, and W. J. Thron: Twin convergence regions for continued fractions. Bull. Amer. math. Soc. 50, 351—357 (1944).

Das Hauptergebnis ist folgender Satz: Es sei  $k$  irgendeine positive Zahl  $> 1$  und  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  positive Zahlen  $< k$ . Es sei weiter  $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ . Wenn dann  $r_{2n} \geq 2[k + \varepsilon_1 - \cos \theta_{2n}]$  und  $r_{2n-1} \leq k - \varepsilon$  ist ( $n = 1, 2, \dots$ ), so konvergiert der Kettenbruch  $1 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \dots$ . J. Mall.

Glass, T. F. and W. Leighton: On the convergence of a continued fraction. Bull. Amer. math. Soc. 49, 133—135 (1943).

Leighton, W. and W. J. Thron: Continued fractions with complex elements. Duke Math. J. 9, 763—772 (1942).

Es werden Konvergenzkriterien für die Kettenbrüche  $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots$  und  $1 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \dots$  aufgestellt, sowie mit Hilfe der Theorie der normalen Familien die durch den Kettenbruch  $1 + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \dots$  dargestellten analytischen Funktionen untersucht. J. Mall.

Leighton, W. and W. J. Thron: On the convergence of continued fractions to meromorphic functions. Ann. of Math., II. Ser. 44, 80—89 (1943).

Die Konvergenz des Kettenbruches  $\frac{1}{1} + \frac{z_2}{1} + \frac{z_2(z_2 - 1)}{1} + \dots$  wird mit Hilfe der Näherungsbrüche  $A_n/B_n$  untersucht und die Ergebnisse werden auf die Kettenbrüche  $\frac{1}{1} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{1} + \dots$  und  $1 + \frac{a_1 x}{1} + \frac{a_2 x}{1} + \dots$  wo  $a_r$  und  $x$  komplex sind, angewandt. J. Mall.

Leighton, W. and W. J. Thron: On value regions of continued fractions. Bull. Amer. math. Soc. 48, 917—920 (1942).

Es wird das Gebiet bestimmt, innerhalb dessen die Näherungsbrüche des Kettenbruches  $1 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \dots$  liegen, wenn die Elemente  $a_i$  innerhalb des von der Parabel  $\varrho \leq 2d(1-d)/(1-\cos \theta)$  begrenzten Gebietes liegen,  $\frac{1}{2} \leq d < 1$ . J. Mall.

Thron, W. J.: Convergence regions for the general continued fraction. Bull. Amer. math. Soc. 49, 913—916 (1943).

Thron, W. J.: Two families of twin convergence regions for continued fractions. Duke math. J. 10, 677—685 (1943).

Es werden Konvergenzgebiete der Kettenbrüche  $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots$  und  $1 + \frac{c_1^2}{1} + \frac{c_2^2}{1} + \dots$  untersucht mit Anwendungen auf die Kettenbrüche  $\frac{a_1}{b_1 + z} + \frac{a_2}{b_2 + z} + \dots$  und  $1 + \frac{c_1^2 x}{1} + \frac{c_2^2 x}{1} + \dots$ . J. Mall.

Thron, W. J.: A family of simple convergence regions for continued fractions. Duke math. J. 11, 779—791 (1944).

Bei einem Kettenbruch  $1 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \dots$  mögen die  $a_1, a_2, \dots$  der Folge  $A$  angehören. Es werden notwendige Bedingungen dafür aufgestellt, daß  $A$  eine Konvergenzfolge ist und entsprechende Anwendungen auf die Konvergenz des Kettenbruches gemacht. J. Mall.

Thron, W. J.: Twin convergence regions for continued fractions  $b_0 + K(1/b_n)$ . Amer. J. Math. 66, 428—438 (1944).

Zwei Gebiete  $B_0$  und  $B_1$  seien definiert durch die Bedingungen:  $b_{2n} = r e^{i\theta} \in B_0$ , wenn  $r \geq (1 + \varepsilon) f(\theta)$ ,  $b_{2n+1} = r e^{i\theta} \in B_1$ , wenn  $r \geq (1 + \varepsilon) g(\theta)$  wobei  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Zahl ist und die Funktionen  $f(\theta)$  und  $g(\theta)$  für  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  positiv und beschränkt sind. Bei einem Kettenbruch  $b_0 + K(1/b_n)$ , bei dem  $\sum |b_n| = \infty$  und wenigstens ein  $b_{2n+1} \neq 0$  ist, erhält man als notwendige Be-



dingung, daß  $B_0$  und  $B_1$  Paare von Konvergenzgebieten sind, die Beziehung:  $f(\theta)g(\pi-\theta) \geq 4$ . Wenn  $g(\theta) = 4/f(\pi-\theta)$  ist, so sind die Gebiete  $B_0$  und  $B_1$  Paare von Konvergenzgebieten, wenn die Komplemente (in bezug auf die komplexe Ebene) von beiden Gebieten konvex sind. Anwendungen werden gemacht. *J. Mall.*

Wall, H. S.: The behavior of certain Stieltjes continued fractions near the singular line. *Bull. Amer. math. Soc.* 48, 427—431 (1942).

If  $0 < h_n < 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , and  $\sum |h_n - \frac{1}{2}|$  converges, the function  $f(z)$  represented by the continued fraction  $\frac{1}{1 + \frac{(1-h_1)h_2z}{1 + \frac{(1-h_2)h_3z}{1 + \dots}}}$  approaches a finite continuous limit  $a(s)$  as  $z \rightarrow -s$  ( $s \geq 1$ ) from the upper half-plane and the limit  $a(s)$  as  $z \rightarrow -s$  from the lower half-plane. The function  $f(z)$ , which is analytic in the  $z$ -plane exterior to the cut along the real axis from  $z = -1$  to  $z = -\infty$ , is bounded in absolute value in that region. *E. Frank.*

(1) Hellinger, E. D. and H. S. Wall: Contributions to the analytic theory of continued fractions and infinite matrices. *Ann. of Math.*, II. Ser. 44, 103—127 (1943).

(2) Wall, H. S. and Marion Wetzel: Contributions to the analytic theory of *J*-fractions. *Trans. Amer. math. Soc.* 55, 373—392 (1944).

(3) Wall, H. S. and Marion Wetzel: Quadratic forms and convergence regions for continued fractions. *Duke math. J.* 11, 89—102 (1944).

(4) Dennis, Joseph J. and H. S. Wall: The limit-circle case for a positive definite *J*-fraction. *Duke math. J.* 12, 255—273 (1945).

These four papers are concerned with *J*-continued fractions

$$(J) \quad \frac{1}{|b_1 + z|} - \frac{a_1^2}{|b_2 + z|} - \frac{a_2^2}{|b_3 + z|} - \dots$$

In (1) the  $a_p$  are real and positive, the  $b_p$  are complex numbers with non-negative imaginary parts. Conditions for the convergence of (J) are given. The nature of the function represented by (J) is discussed, its asymptotic and integral representation, analogous to the theory of Stieltjes, and the connection to the moment problem. The results are obtained by means of infinite sequences of linear transformations in one variable and in infinitely many variables, and infinite *J*-matrices associated with (J). In (2) the results of (1) are extended to include the cases where the  $a_p$  and  $b_p$  are complex numbers. Here all (J) are positive definite, i. e., the quadratic forms  $\sum_{r=1}^p I(b_r - z) \bar{z}_r^2 - 2 \sum_{r=1}^{p-1} I(a_r) \bar{z}_r \bar{z}_{r+1}$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , are positive definite for  $I(z) > 0$  ( $\bar{z}_r$  real). In (3) a necessary and sufficient condition that (J) be positive definite for  $y > 0$  is found, i. e.,  $\beta_p \geq 0$ ,  $\alpha_p^2 = \beta_p \beta_{p+1} (1 - g_{p-1}) g_p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , where  $\alpha_p$ ,  $\beta_p$ , and  $y$  are the imaginary parts of  $a_p$ ,  $b_p$ , and  $z$ , and  $g_p$  are real numbers such that  $0 < g_{p-1} \leq 1$ . It is also shown that (J) converges uniformly over every bounded closed region in  $I(z) > 0$ , provided  $\liminf |a_p| < \infty$ . This result leads to an extension of the "parabola theorem" and the "value region problem". In (4) some of the results in (2), (3) are proved in a different way, and known results extended. In particular, it is shown that in the limit-circle case the convergence of (J) or of its reciprocal for a single value of  $z$  implies the convergence of (J) or of its reciprocal for every value of  $z$  to a meromorphic limit function. *E. Frank.*

Wall, H. S.: Continued fractions and bounded analytic functions. *Bull. Amer. math. Soc.* 50, 110—119 (1944).

A new proof is given of the theorem that the sequence  $\{c_p\}$  is totally monotone if and only if the power series  $\sum (-1)^p c_p z^p$  has a continued fraction expansion of the form  $\frac{g_0}{1} - \frac{g_1 \bar{z}}{1} + \frac{(1 - g_1) g_2 z}{1} - \frac{(1 - g_2) g_3 \bar{z}}{1} + \dots$ , where  $g_0 = 0$ ,  $0 < g_p < 1$ ,  $p = 1, 2, \dots$ . The proof is based on the characterization of Schur for analytic

functions bounded in the unit circle and the Stieltjes integral representation of F. Riesz for analytic functions with positive real parts. *E. Frank.*

Wall, H. S.: Note on the expansion of a power series into a continued fraction. Bull. Amer. math. Soc. 51, 97—105 (1945).

An algorithm is given for the expansion of the power series  $\sum_0^\infty c_n z^{-n-1}$  into the continued fraction  $\frac{a_0}{b_1 + z} - \frac{a_1}{b_2 + z} - \frac{a_2}{b_3 + z} - \dots$ , such that the power series expansion for the  $n$ -th approximant  $A_n/B_n$  of the continued fraction gives the first  $2n$  terms of the given power series. The construction of such an algorithm is equivalent to the construction of a sequence of polynomials  $B_p$  orthogonal relative to an operator  $S$  which operates on a polynomial by replacing  $z^p$  by  $c_p$ . *E. Frank.*

Wall, H. S.: Note on a certain continued fraction. Bull. Amer. math. Soc. 51, 930—934 (1945).

The continued fraction  $\frac{1}{1} + \frac{az}{1} + \frac{bz}{1} + \frac{(a+1)z}{1} + \frac{(b+1)z}{1} + \frac{(a+2)z}{1} + \dots$ , where  $a$  and  $b$  are complex constants not zero or negative integers, converges to a meromorphic function over any bounded closed region of the  $z$ -plane exterior to the negative half of the real axis. This result is used to extend several continued fraction expansions of integrals to complex values of the parameters. *E. Frank.*

Wall, H. S.: Continued fraction expansion for functions with positive real parts. Bull. Amer. math. Soc. 52, 138—143 (1946).

Let  $K$  denote the region of the complex  $z$ -plane exterior to the cut along the real axis from  $-1$  to  $-\infty$ . Let  $E$  denote the class of functions  $F(z)$  such that  $F(z)$  is analytic over  $K$ , and  $R(F(z)) > 0$  over  $K$ . Then the class  $E$  is coextensive with the class of functions representable in the form

$$\frac{c(1+z)^{\frac{1}{2}}}{1 + ir_0(1+z)^{\frac{1}{2}}} + \frac{g_1 z}{1 + ir_1(1+z)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1-g_1)g_2 z}{1 + ir_2(1+z)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1-g_2)g_3 z}{1 + ir_3(1+z)^{\frac{1}{2}}} + \dots$$

where  $c > 0$ ,  $0 < g_p < 1$ ,  $-\infty < r_{p-1} < +\infty$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , or as a terminating continued fraction of this form, in which the last  $g_p$  which appears may be equal to unity. The continued fraction converges uniformly over every bounded closed region within  $K$ . *E. Frank.*

Wall, H. S.: A theorem on arbitrary  $J$ -fractions. Bull. Amer. math. Soc. 52, 671—679 (1946).

Wall, H. S.: Reciprocals of  $J$ -matrices. Bull. Amer. math. Soc. 52, 680—685 (1946).

Wall, H. S.: Bounded  $J$ -fractions. Bull. Amer. math. Soc. 52, 686—693 (1946).

These papers are concerned with  $J$ -continued fractions

$$\frac{1}{b_1 + z} - \frac{a_1^2}{b_2 + z} - \frac{a_2^2}{b_3 + z} - \dots$$

Theorems are given for the convergence of  $(J)$  in which the  $a_p$  ( $\neq 0$ ) and the  $b_p$  are complex numbers, theorems on the existence of reciprocals of  $J$ -matrices are extended to the case where the  $J$ -matrices are positive definite, and conditions are given for the convergence of  $(J)$  which are bounded, i. e.,  $|a_p| \leq M/3$ ,  $|b_p| \leq M/3$ ,  $p = 1, 2, \dots$ . *E. Frank.*

Frank, Evelyn: Corresponding type continued fractions. Amer. J. Math. 68, 89—108 (1946).

$C$ -fractions, or corresponding type continued fractions, are continued fractions of the form  $(C) \frac{1}{1} + \frac{a_1 z^{\alpha_1}}{1} + \frac{a_2 z^{\alpha_2}}{1} + \dots$ , in which the  $a_p$  are complex numbers and the  $\alpha_p$  are positive integers. (I) An algorithm is given for the rapid expansion of a power series  $P(z) = \sum c_p z^p$  into a  $C$ -fraction. (II) If in the Padé table for a power series  $P(z)$  there are two equal approximants, then there must be a square

block of  $(r+1)^2$  equal approximants. Padé determined necessary and sufficient conditions for the order  $r$  of a block to be zero. Here this theorem is extended to cover arbitrary orders. (III) From a consideration of the geometrical arrangement of the blocks in the Padé table and their relationship to the exponents  $\alpha_p$  in the  $C$ -fraction, conditions are given for the regularity of the  $C$ -fraction. (IV) Regular power series are characterized in terms of their coefficients. (V) Formulas for transformations of  $C$ -fractions are derived. Conditions are given on the exponents  $\alpha_p$  and the coefficients  $a_p$  in order that (C) and the continued fractions

$$1 + a_1 z^{\alpha_1} + \frac{b_1 z^{\beta_1}}{1} + \frac{b_2 z^{\beta_2}}{1} + \dots; \frac{1}{1 + \frac{d_1 z^{\delta_1}}{1} + \frac{d_2 z^{\delta_2}}{1} + \dots}; 1 - C z^{\alpha_1} + \frac{c_1 z^{\alpha_1}}{1} + \frac{c_2 z^{\alpha_2}}{1} + \dots$$

shall all be equal in the sense that the corresponding power series of these continued fractions are all identical with one another. E. Frank.

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Bernstein, Serge: Sur la meilleure approximation sur tout l'axe réel des fonctions continues par des fonctions entières de degré fini. I.—V. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 51, 331—334, 487—490; 52, 563—566; 54, 103—108, 475—478 (1946).

Eine ganze Funktion  $S_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!}$  heißt vom Grade  $p$ , wenn  $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = p$  ist. Für eine auf der reellen Achse beschränkte Funktion läßt sich ein  $S_p(x)$  so finden, daß  $\sup |f(x) - S_p(x)| \equiv A_p f(x)$  ein Minimum wird. Verf. stellt eine Reihe von Sätzen auf, die die Theorie der Annäherung  $A_p f(x)$  als eine natürliche Erweiterung der Theorie der besten Annäherung  $E_n f(x)$  durch Polynome  $n$ -ten Grades erscheinen läßt; insbesondere werden Grenzbeziehungen zwischen den Bildungen  $A_p$  und  $E_n$  untersucht. Im einzelnen: 1)  $A_p f(x) = 0$  ist notwendig und hinreichend für gleichmäßige Stetigkeit von  $f(x)$  [vgl. dazu auch Kober, Trans. Amer. math. Soc. 54, 70—82 (1943)]. 2) Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $S_p(x)$  die Funktion bester Annäherung ist. 3) Ein Kriterium für die Funktion bester Annäherung, das mit den Zeichenwechseln der Differenz  $f(x) - S_p(x)$  an gewissen Argumenten arbeitet. 4) Ausdehnung der Begriffsbildung auf Approximation periodischer Funktionen durch trigonometrische Summen. 5) Abschätzungen für die Koeffizienten  $a_k$ , unter der Voraussetzung  $S_p(x) \leq x - b/x^m$  ( $b > 0$ ,  $m$  positiv ganz), durch die Zahlen  $b, k, m, p$ . 6) Ist  $2q > 0$ ,  $f(x) = o(x^{-2q})$  und bedeutet  $E_n[f(x); L; (a x^2 + h)^q; \lambda]$  die beste Annäherung von  $f(x)$  durch Polynome  $n$ -ten Grades  $R_n(x)$ , für die in  $|L| < |x| < |\lambda|$  die Ungleichung  $|R_n(x)| \leq a x^2 + h^q$  gilt, so ist  $\lim E_n[f(x); L; (a x^2 + h)^q; n/p] = A_p f(x)$ , falls  $L$  schnell genug gegen Null strebt. 7) Approximation einer ganzen Funktion  $F(x)$  vom Grade  $p$  mit  $F(x) = o(x)$ , die an den Stellen  $k\pi/n$  vorgegeben ist und dort gewissen Abschätzungen genügt, durch trigonometrische Summen. 8) Ausdehnung der Betrachtung von 6) auf den Fall 7). 9) Ist  $|F_p(x)| < H(x)$  [ $H(x)$  eine gerade Funktion der Ordnung Null mit nichtnegativen Koeffizienten und  $H(0) > 0$ ], so existiert eine Folge von Polynomen  $P_n(x)$  so, daß  $|F_p(x) - P_n(x)| < \exp[-\frac{1}{2} n c^{3/2}]$ , wobei  $-np^{-1}(1-c) \leq x \leq +np^{-1}(1-c)$ ,  $c > 0$ ,  $n$  hinreichend groß. 10) Limesbeziehungen zwischen  $E_n$  und  $A_p$  für die Funktionen der in 9) erklärten Klasse. W. Hahn.

Bernstein, Serge: Démonstration nouvelle et généralisation de quelques formules de la meilleure approximation. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 54, 663—664 (1946).

Es ist (vgl. vorstehendes Referat)  $A_p(x^2 + a^2)^s \sim 2^s a^{-p+1} a^{s-1} p^{-s-1} |I'(-s)|$  ( $s \neq 0$ ). — Ist  $f(x)$  in  $a < x < b$  stetig und existieren für  $x \rightarrow a$  und  $x \rightarrow b$  gleichmäßig stetige Ableitungen von nichtnegativer (u. U. verschiedener) Ordnung, so ist  $A_p f(x)$  für jedes  $p$  beschränkt und strebt mit  $p \rightarrow \infty$  gegen Null. W. Hahn.



Ibraghimoff, I. I.: Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation d'une fonction qui possède un point critique réel. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 49, 238—240 (1945).

Ibraghimoff, I.: Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation d'une fonction ayant un point singulier réel. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 429—460 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Bernstein, S.: Complément au travail de I. Ibraghimoff „Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation d'une fonction ayant un point singulier réel“. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 461—462 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Herleitung von asymptotischen Formeln für die beste Annäherung (durch Polynome  $n$ -ten Grades) für die Funktion  $(a-x)^s \ln^m(a-x)$  sowie von genaueren Abschätzungen für  $n^{2s}(\ln n)^{1-m} E_n[(1-x) \ln^m(1-x)]$  und verwandten Bildungen. Fallunterscheidungen, je nachdem  $s$  und  $m$  ganzzahlig sind oder nicht und  $a > 1$  oder  $a = 1$  ist. — Bernštejn bemerkt, daß die Hauptformel Ibraghimoffs vom Typ  $E_n[(c-x)^k \Phi(x)] \cong |\Phi(c)| E_n[(c-x)^k]$  [ $\Phi(c) \neq 0$ ] ist und für eine allgemeine Funktionenklasse gilt, die im Inneren einer Ellipse mit Ausschluß des Punktes  $c$  regulär ist. Auch die Funktion  $(c-x)^k$  läßt sich durch eine allgemeinere Funktion ersetzen. W. Hahn.

Nikolsky, S.: On the best approximation of functions satisfying Lipschitz's conditions by polynomials. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 295—322 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Nikolsky, S.: Sur la meilleure approximation au moyen des polynômes des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 52, 7—9 (1946).

Bernstein, S.: Généralisation d'un résultat de S. M. Nikolsky. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 53, 583—585 (1946).

Es genüge  $f(x)$  in  $-1 \leq x \leq +1$  einer Lipschitzbedingung  $|f(x+h) - f(x)| \leq Mh$ . Dann gilt für die beste Annäherung durch Polynome  $n$ -ten Grades

$$\sup E_n(f) = M\pi/2n - \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = o(n \ln n)^{-1}, \quad \varepsilon_n > 0.$$

Die Aussage läßt sich nicht verbessern. — Es gibt eine Funktion mit  $\limsup n E_n(f) = M\pi/2$ . — Ist  $U_n(f, x)$  die  $n$ -te Partialsumme der Entwicklung von  $f(x)$  nach den Tschebyscheffschen Polynomen  $P_k(x) = \cos k \arccos x$ , so gilt  $\sup |f(x) - U_n(f, x)| = 4M\pi^{-2} n^{-1} \ln n \sqrt{1-x^2} + o(1/n)$  gleichmäßig in  $-1 \leq x \leq +1$ . Auch diese Aussage kann nicht verbessert werden: es gibt zu jedem  $x$  eine Funktion  $f(x)$ , die nicht von  $n$  abhängt, derart daß

$$|f(x) - U_n(f, x)| > 4M \ln n (\pi^2 n)^{-1} \sqrt{1-x^2} (1-\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Bernštejn betrachtet den Fall, daß  $f(x)$  zur Klasse  $(\alpha)$  ( $\alpha \geq 1$ ) gehört [d. h. daß  $|f(x+h) - f(x)| \leq h^\alpha$  ist] und zeigt, daß für  $\sup E_n(f) = c_n(\alpha) (n+1)^{-\alpha}$  die Beziehung  $c_n(\alpha) \leq \lim c_n(\alpha) = c(\alpha) = \sup_{f(x) \in (\alpha)} A_1 f(x)$  gilt. (Wegen  $A_1 f(x)$  vgl. dies. Zbl. 60, 167, 1. Referat.) W. Hahn.

● Nikolsky, S.: Approximations of periodic functions by trigonometrical polynomials. Trudy mat. Inst. Steklov. 15, 76 p. (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Nikolsky, S.: On interpolation and best approximation of differentiable periodic functions by trigonometrical polynomials. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. math. 10, 393—410 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Nel primo lavoro viene studiata l'approssimazione, mediante le somme parziali delle serie di Fourier e le loro medie  $(C, 1)$ , di funzioni  $f(x)$  periodiche di periodo  $2\pi$ , la cui derivata  $r$ -esima soddisfa alla condizione  $|f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)| \leq K|h|^\alpha$ . Nella seconda Memoria, chiamata  $W^{(r)}$  la classe delle funzioni  $f(x)$  periodiche

di periodo  $2\pi$ , per le quali quasi dappertutto è  $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ , si prova che esiste una funzione  $\tilde{f}(x)$  di  $W^{(r)}$  che verifica l'uguaglianza  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_n r^n E_n[\tilde{f}] = A_r$ , ove  $E_n[f]$  è la migliore approssimazione di  $f(x)$  mediante polinomi trigonometrici di ordine  $n$ , e  $A_r$  è una costante positiva dipendente soltanto da  $r$ . *S. Cinquini.*

**Geronimus, J.:** On polynomials orthogonal on the circle, on trigonometric moment-problem and on allied Carathéodory and Schur functions. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. 39, 291—295 (1943).

**Geronimus, J.:** On polynomials orthogonal on the circle, on trigonometric moment-problem and on allied Carathéodory and Schur functions. *Mat. Sbornik*, n. Ser. 15 (57), 99—130 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

**Geronimus, J.:** On the trigonometric moment problem. *Ann. of Math.*, II. Ser. 47, 742—761 (1946).

Il primo lavoro è una Nota preliminare del secondo, nel quale vengono stabiliti alcuni risultati relativi ai sistemi di polinomi  $P_n(z)$  definiti dalle condizioni

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(z) \overline{P_m(z)} d\sigma(\Theta) = c_{n,m}, \text{ ove } z = e^{i\Theta}, \text{ e } \sigma(\Theta) \text{ è la funzione distribuzione,}$$

i cui momenti sono  $c_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\Theta} d\sigma(\Theta)$ . Nel terzo lavoro la teoria dei polinomi ortogonali sul cerchio unità e quella delle frazioni continue sono applicate alla soluzione del problema del momento trigonometrico in analogia al problema di Hamburger. *S. Cinquini.*

**Turetzky, A.:** Asymptotical inequalities for trigonometrical polynomials satisfying a differential relation at a certain system of points. *Izvestija Akad. Nauk SSSR. Ser. mat.* 10, 487—512 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

**Korovkin, P. P.:** Sur les polynomes orthogonaux le long d'un contour rectifiable dans le cas de la présence d'un poids. *Mat. Sbornik*, n. Ser. 9 (51), 469—485 (1941) [Russisch mit français. Zusammenfassg.].

● **Achiezer, N.:** Vorlesungen über Approximationstheorie. Charkov 1940. 136 p. [Russisch].

(1) **Blanuša, Danilo:** Die Umkehrung der Orthogonalisierungsformel. *Rad Hrvatske Akad. Znanosti i Umjetnosti, Razved mat.-prirodoslov.* 86, 62—74 (1945) [Kroatisch].

(2) **Blanuša, Danilo:** Die Umkehrung der Orthogonalisierungsformel. *Bull. Intern. Acad. Croate, Cl. Sci. math. nat.* 35, 100—102 (1945).

(2) Auszug aus (1). Ist  $f_i$  ein System komplexer, linear unabhängiger Funktionen,  $f_{ik}$  die inneren Produkte,  $F_r$  die Determinante der  $f_{ik}$  ( $i, k = 1, \dots, r$ ) und  $F_r^{ik}$  das algebraische Komplement des Elementes  $f_{ik}$ , so liefert die Formel  $q_r = (F_r F_{r-1})^{-1/2} \sum_{i=1}^r F_r^{ir} f_i$  bekanntlich ein System normierter Orthogonalfunktionen. Verf. zeigt, daß die Formel  $f_r = \sum_{i=1}^r (F_i F_{i-1})^{-1/2} \sum_{k=1}^i F_i^{ik} f_{rk}$  das Problem löst, aus Orthogonalfunktionen nichtorthogonale mit gegebenen  $f_{ik}$  herzustellen, und gibt eine geometrische Interpretation dieses Prozesses. *W. Hahn.*

**Blanuša, Danilo:** Der Einfluß der Unstetigkeiten einer Funktion und ihrer Ableitungen auf ihr Fouriersches Spektrum. *Bull. internat. Acad. Croate, Cl. Sci. math. natur.* 35, 82—88 (1945).

● **Jackson, Dunham:** Fourier series and orthogonal polynomials. (Carus Monograph Series, Nr. 6.) Oberlin, Ohio: Mathematical Association of America 1941. XII + 234 p. \$ 2.00, (\$ 1.25 to members. Non-members order from Open Court Publishing Co., La Salle, Ill.).

Kober, H.: A note on approximation by rational functions. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 7, 123—133 (1946).

1. If  $f(x) \in L^p(-\infty, \infty)$ ,  $1 < p < \infty$ , the partial sums of its development according to the orthogonal sequence  $\{(\alpha - x)^n (\bar{\alpha} - x)^{-n-1}\}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) converge to  $f(x)$  in  $L^p$ . — 2.  $\{(x - \alpha_n)^{-1}, (x - \beta_n)^{-1}\}$ ,  $J(\alpha_n) > 0$ ,  $J(\beta_n) < 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , is total in  $L^p(-\infty, \infty)$ ,  $1 < p < \infty$ , or in the space of continuous functions vanishing at  $\pm\infty$ , if and only if

$$\sum J(\alpha_n)/(1 + |\alpha_n|^2) = -\sum J(\beta_n)/(1 + |\beta_n|^2) = \infty.$$

[Cf. Achiezer, Theory of approximation (this Zbl. 31, 157). Appendix 4.] — The proofs use Hilbert transforms and classes  $H^p$ . J. Horváth.

Jackson, Dunham: Generalization of a theorem of Korovs on the bounds of orthonormal polynomials. Bull. Amer. math. Soc. 48, 602—608 (1942).

Beweis des Satzes: Ist  $\{p_{ni}(x, y)\}$  eine gleichmäßig beschränkte Folge von orthogonalen Polynomen mit der Gewichtsfunktion  $\varrho(x, y) \geq 0$  auf einer algebraischen Kurve, dann ist auch die Folge  $\{q_{ni}(x, y)\}$  orthonormal auf der gleichen Kurve mit der Gewichtsfunktion  $\varrho(x, y) \sigma(x, y)$ , gleichmäßig beschränkt, wenn  $\sigma(x, y)$  beschränkt ist und einer Lipschitz-Bedingung auf der Kurve genügt.

O. Volk.

(1) Sidon, S.: Über orthogonale Entwicklungen. Acta Sci. math., Szeged 10, 206—253 (1943).

(2) Alexits, Georges: Sur la sommation forte des séries orthogonales. Commentarii. math. Helvet. 18, 122—128 (1946).

(3) Pollard, Harry: The mean convergence of orthogonal series of polynomials. Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 8—10 (1946).

(4) Jackson, Dunham: Boundedness of orthonormal polynomials on loci of the second degree. Duke math. J. 11, 351—365 (1944).

(5) Jackson, Dunham: The boundedness of certain sets of orthonormal polynomials in one, two and three variables. Trans. Amer. math. Soc. 58, 167—183 (1945).

(6) Jackson, Dunham: The boundedness of orthonormal polynomials on certain curves of the third degree. Bull. Amer. math. Soc. 52, 899—907 (1946).

(7) Peebles, G. H.: On equivalence of certain types of series of orthonormal functions. Bull. Amer. math. Soc. 48, 556—561 (1942).

(8) Albert, G. E. and L. H. Miller: Equiconvergence theorems for orthonormal polynomials. Bull. Amer. math. Soc. 50, 358—376 (1944).

(9) Agnew, Ralph Palmer: Criteria for completeness of orthonormal sets and summability of Fourier series. Duke math. J. 11, 801—821 (1944).

(10) Albert, G. E.: The closure of systems of orthogonal functions. Amer. math. Monthly 50, 163—169 (1943).

(11) Dalzell, D. P.: On the completeness of a series of normal orthogonal functions. J. London math. Soc. 20, 87—93 (1945).

(12) Dalzell, D. P.: On the completeness of Dini's series. J. London math. Soc. 20, 213—218 (1945).

(13) Shohat, J.: Note on closure for orthogonal polynomials. Bull. Amer. math. Soc. 48, 488—490 (1942).

(14) Oberg, Edwin N.: On the approximation of functions by sums of orthonormal functions. Bull. Amer. math. Soc. 49, 68—80 (1943).

(15) Tscherkassoff, A.: Functions with complete systems of powers. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 7, 245—249 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(16) Arpiarian, Noubar: Polynomes trigonométriques orthogonaux relatifs d'une ellipse de foyers  $(-1, +1)$ . C. r. Acad. Sci., Paris 249, 668—669 (1944).

(17) Arpiarian, Noubar: Sur la théorie des fonctions orthogonales de variable complexe. C. r. Acad. Sci., Paris 249, 387—389 (1944).



(18) Keldyeh, M.: Sur l'approximation en moyenne par polynomes des fonctions d'une variable complexe. Mat. Sbornik, n. Ser. 16 (58), 1—20 (1945) mit russ. Zusammenfassung.

(19) Ibragimov, I.: Sur les critères pour que la suite des dérivées d'une fonction analytique forme un système complet. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Ser. 52, 389—390 (1946).

(20) Markouchevitch, A.: Sur les critères pour qu'un système de fonctions analytiques soit complet. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Ser. 43, 3—6 (1944).

(21) Boas jr., R. P. and Harry Pollard: Properties equivalent to the completeness of  $(e^{-t} t^n)$ . Bull. Amer. math. Soc. 52, 348—351 (1946).

(22) Lévy, P.: Sur une généralisation des fonctions orthogonales de M. Rademacher. Commentarii. math. Helvet. 16, 146—152 (1944).

(23) Romanov, N. P.: On a complete orthonormal system of the space  $L_2(0, 1)$ . C. r. Acad. Sci. URSS, n. Ser. 45, 278—279 (1944).

(24) Bourgin, D. G. and C. W. Mendel: Orthonormal sets of periodic functions of the type  $f(n x)$ . Trans. Amer. math. Soc. 57, 332—363 (1945).

(25) Gazeff, B.: Sur quelques classes de fonctions orthogonales. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 197—206 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

(26) Bellman, Richard: Almost orthogonal series. Bull. Amer. math. Soc. 50, 517—519 (1944).

(27) Stepanoff, V.: Sur quelques systèmes non orthogonaux. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Ser. 48, 385—388 (1945).

(28) Filonenko-Borodich, M. M.: On a certain system of functions and its application in the theory of elasticity. Priklad. Mat. Mech. 10, 193—208 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(29) Geronimus, J.: On some distribution functions connected with systems of polynomials. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Ser. 44, 355—359 (1944).

(30) Kosambi, D. D.: On the zeros and closure of orthogonal functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 6, 16—24 (1942).

Ein endlich oder abzählbar unendliches System von reellwertigen Funktionen  $g_n(x)$  heißt orthogonal in  $[a, b]$  in bezug auf die reelle Gewichtsfunktion  $p(x)$ , wenn [1]  $\int_a^b g_n(x) g_m(x) p(x) dx = 0$  für alle  $m \neq n$  gilt. Bezeichnung:  $g_n = O(a, b; p(x) dx)$ . Gilt neben [1] noch  $\int_a^b g_n^2(x) p(x) dx = 1$  für alle  $n$ , dann bilden die  $g_n$  ein normiertes Orthogonalsystem. Bezeichnung:  $g_n = ON(a, b; p(x) dx)$ . Die Symbole  $O(a, b; dx(x))$  und  $ON(a, b; dx(x))$  sind jetzt ohne weiteres verständlich. Ein  $O(a, b; dx(x))$  heißt vollständig hinsichtlich der Funktionen  $f(x)$  aus einem Raum  $R$ , wenn aus  $\int_a^b f(x) g_n(x) dx(x) = 0$  für alle  $n$  folgt, daß  $f(x)$  gleich dem Nullelement von  $R$  ist. Es heißt abgeschlossen in bezug auf die Funktionen aus  $L^p(a, b; dx(x))$  [ $C(a, b; w(x) dx)$ ], wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  reelle Zahlen  $a_1, \dots, a_m$  und  $m$  Funktionen aus  $O(a, b; w(x) dx)$  [ $O(a, b; w(x) dx)$ ] gibt, so daß  $\int_a^b |f(x) - \sum_{i=1}^m a_i g_i(x)|^p dx(x) < \varepsilon \left[ \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \sum_{i=1}^m a_i g_i(x)| |w(x)| < \varepsilon \right]$ . In  $L^2(a, b; dx)$  sind folgende Eigenschaften eines  $ON(a, b; dx)$  äquivalent: Vollständigkeit, Abgeschlossenheit, Gültigkeit der Parsevalschen Formel. Die Norm in diesem Raum wird mit  $\|\cdot\|$  bezeichnet. KS [SZ] bedeuten: Theorie der Orthogonalreihen von Kaczmarz und Steinhaus (dies. Zbl. 13, 9), [Orthogonal Polynomials von Szegő (dies. Zbl. 23, 215)]. Orthogonal wird stets mit  $O$ ,  $O$  und normiert mit  $ON$  abgekürzt. (1) Eine aus dem Nachlaß zusammengestellte und von G. Grünwald und P. Turán redigierte, nur lose zusammenhängende Themen betreffende Arbeit. Der be-

kannte Lückensatz für trigonometrische Reihen [Sidon, Math. Ann. **97**, 675—676 (1927)] wird auf den Fall übertragen, daß die betrachtete Reihe in  $k$  lakunäre trigonometrische Reihen zerfällt. Für allgemeine  $ON$ -Systeme gilt in dieser Richtung: Sei  $0 < m \leq |g_n| \leq M$  für alle  $n$  [ $g_n = ON(a, b; dx)$ ];  $f(x)$  sei einseitig beschränkt,  $L$ -integrierbar,  $\sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i(x)$ . Es existieren [unabhängig von  $f(x)$ ] 3 Folgen ganzer positiver Zahlen  $n'_i, n''_i, n_i$  mit  $n'_1 < n''_1 < n_1 < n'_2 < \dots$  und  $n''_j - n'_j = N_j \geq 1$ ,  $j = 1, 2, \dots$  bei vorgegebenem  $N_j$ , so daß aus  $a_\nu = 0$  für  $n'_j \leq \nu \leq n''_{j+1}$  ( $\nu \neq n_j$ )  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{n_j}| < \infty$  folgt. (Satz A.) Dies geht beträchtlich über Sidon (dies. Zbl. **23**, 25) hinaus. —  $\varepsilon_k$  sei eine Zahlenfolge,  $n_k$  eine eigentlich monotone Indizesfolge. Es soll die Lösbarkeit des Systemes  $\int_0^{2\pi} f(x) g_{n_k}(x) dx = \varepsilon_k$  in einer vorgegebenen Funktionenklasse untersucht werden,  $g_n = ON(0, 2\pi; dx)$ . Satz A gibt die Möglichkeit, ein früheres diesbezügliches Ergebnis (dies. Zbl. **23**, 25) allgemeiner zu fassen. [Verwandte Untersuchungen bei Marcinkiewicz (dies. Zbl. **20**, 298), weitergeführt durch Senšičev (dies. Zbl. **30**, 248)]. Weitere Ergebnisse knüpfen an Sidon (dies. Zbl. **4**, 212 und auch dies. Zbl. **10**, 162) an. — Verschärfungen des Satzes von Young-Hausdorff für Lückenreihen bilden den Inhalt eines weiteren Abschnittes. Sie liegen in Richtung der Arbeiten Zygmund [Fundamenta Math. **16**, 90—107 (1930)], Paley (dies. Zbl. **7**, 244), sowie insbesondere Sidon (dies. Zbl. **11**, 399). — Von Steinhaus stammt folgende Vermutung: Wenn von  $1 + \sum_1^{\infty} a_n \cos n x$  sämtliche Partialsummen  $\geq 0$  sind, gilt  $a_n \rightarrow 0$ . Neumann und Schur zeigten  $\lim a_n = 0$  [zit. bei Erdős, dies. Zbl. **25**, 158]. Weitere Teilergebnisse bei Sidon [Acta Sci. math., Szeged **2**, 43—47 (1924)] und Erdős (l. c.). Eine modifizierte Fragestellung wurde bei Sidon dies. Zbl. **7**, 212 (nicht ganz korrekt) beantwortet. Später wurde die Vermutung bestätigt (Helson, dies. Zbl. **55**, 62). Für das System von Walsh  $\psi_n(x)$  gilt jedoch: Es gibt eine Reihe  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \psi_\nu(x)$ , so daß  $\int_0^1 |\sum_{i=0}^n a_i \psi_i(x)| dx < C$  für alle  $n$  und  $\overline{\lim} a_n > 0$  gelten. (2):  $g_n = ON(a, b; dx)$ .  $\sum' c_n g_n$  [2] heißt fast überall (f. ü.) sehr stark  $(C, 1 + \alpha)$ -summierbar ( $\alpha > -1$ ), wenn man f. ü.  $\sum_{k=0}^n |f(x) - \sigma_k^{(\alpha)}(x)| = o(n)$  für jede unendliche Teilfolge  $n_k$  der natürlichen Zahlenreihe hat.  $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$  ist das  $n$ -te  $(C, \alpha)$ -mittel von [2]. Wie man vermöge des bekannten Beispiels von Menchoff [Fundamenta Math. **4**, 82—105 (1923)] sieht, ist diese Begriffsbildung für  $O$ -Reihen nicht mit der  $(C, \alpha)$ -Summierbarkeit f. ü. äquivalent. Eine bekannte Beweismethode [z. B. Zygmund, Fundamenta Math. **10**, 356—362 (1927)] liefert: Für eine nicht abnehmende Folge positiver Zahlen  $\lambda_n$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \lambda_n} < \infty$  sei  $c_n = O(1/n^{(1+\alpha)/2} \lambda_n^{1/2})$ . Dann ist [2] auf einer Menge  $E$  f. ü. sehr stark  $(C, 1 + \alpha)$ -summierbar, wenn [2] dort Poisson-summierbar ist. Ist  $-1 < \alpha < 0$  und  $\sum c_n^2 n^{2\alpha} < \infty$ , dann folgt aus der Poisson-Summierbarkeit von [2] die starke  $(C, 1 + \alpha)$ -Summierbarkeit f. ü. (auf  $E$ ). (3): Das bekannte Resultat von Riesz [Math. Z. **27**, 218—277 (1927)] über die Mittelkonvergenz der Partialsummen einer Fourierreihe in  $L^p$  wird auf Jacobische und ultrasphärische  $ON$ -Systeme übertragen. Genauer ausgeführt und überhört in Pollard (dies. Zbl. **32**, 406; **35**, 41). Neuerdings ergänzt durch Wing (dies. Zbl. **41**, 385) und Newman und Rudin (dies. Zbl. **46**, 294). (4)—(8): Die Untersuchungen der  $O$ -Polynome auf algebraischen Kurven scheinen mit Jackson (dies. Zbl. **17**, 63) zu beginnen. Es werden studiert  $ON$ -Polynome auf Kurven zweiten Grades [Spezialfälle bereits bei Koehler, dies. Zbl. **24**, 259], auf einigen Kurven

der Form  $y^m = x^n$  ( $m, n$  ganz) und der Form  $y^2 = x^3 + a x^2 + b x$ . Gestützt auf die Eigenschaften der Legendreschen Polynome ergibt sich: Es gibt zur Gewichtsfunktion 1 Systeme von  $ON$ -Polynomen, welche auf beliebigen Teilbögen der betrachteten Kurven gleichmäßig beschränkt sind, wenn man die Umgebungen der Endpunkte ausschließt. Vermöge des bekannten Satzes von Korovs (SZ, insbes. S. 157), den Jackson auf  $ON$ -Polynome auf algebraischen Kurven übertragen hat (dies. Zbl. 60, 170, 3. Referat), kann man zu allgemeineren Gewichtsfunktionen übergehen. Ausdehnung auf spezielle Raumkurven ( $x = t^p, y = t^q, z = t^r, p, q, r$  ganz). Konvergenzfragen könnten mittels Äquikonvergenztheoremen erledigt werden. Für  $ON$ -Polynome liegen solche bei Peebles (dies. Zbl. 20, 212) vor. Diese lassen sich erweitern:  $u_n(x)$  sei eine Folge lin. unabhängiger Funktionen mit  $u_n \cdot u_m = \sum_{i=1}^{n+m+1} u_i, 0 \leq i \leq p(m, n) \leq M$ . Vermöge der  $u_i$  werden zwei Systeme

konstruiert:  $w_n(x) = ON(a, b; q, x) dx, v_n(x) = ON(a, b; p(x) dx), q/p$  sei als Linearkombination der  $u_i$  darstellbar und beschränkt. Dann sind die zu einer Funktion  $f(x)$  gehörigen  $O$ -Entwicklungen nach den  $v_n$  bzw.  $w_n$  äquikonvergent, wenn für beide  $ON$ -Systeme die Parsevalsche Formel gilt. — Dehnt man das Theorem von Korovs (SZ, insbes. S. 157) aus, dann erhält man hieraus Äquikonvergenztheoreme für  $ON$ -Systeme, welche z. B. ein Theorem von Szegő (SZ, insbes. S. 307) als Spezialfall enthalten. Es ergeben sich gewisse Zusammenhänge mit den erwähnten Untersuchungen von Peebles, (9) — (15): Systematisches und allgemeines Studium der Vollständigkeit von  $ON$ -Systemen (in  $L^2$ ). Der wesentliche Inhalt des Satzes von Riesz-Fischer wird auf den Fall einer von einem kontinuierlichen Parameter abhängigen Funktionsmenge übertragen. Zwecks Gewinnung allgemeiner Vollständigkeitskriterien werden Funktionen  $G_k(t)$  eingeführt,  $t \in T, t_0$

ein nicht zu  $T$  gehöriger Häufungspunkt, mit den Eigenschaften:  $\sum_{n=0}^{\infty} G_n^2(t) < \infty, |G_n(t)| < K, \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(t) = 1$ . Die  $G_k(t)$  definieren ein Summationsverfahren, welches „regulär“ in bezug auf absolut konvergente Reihen ist. Sei  $g_n = ON(a, b; dx)$ .

Es gilt nach Riesz-Fischer  $\sum_{k=0}^n G_k(t) g_k(x) g_k(y) - K(x, y, t) \rightarrow 0$  für passendes  $K(x, y, t)$ . Dieser so definierte Kern  $K$  spielt fernerhin eine wichtige Rolle. Eines der einfachsten Kriterien:  $g_n(x)$  ist genau dann vollständig für  $f(x) \in L^2$ , wenn  $\int_a^b K(x, y, t) f(y) dy = 0$  ( $t \in T$ ) für fast alle  $x$ . [Verf. betrachtet tatsächlich komplexwertige Funktionen und  $ON$ -Systeme über beliebigen meßbaren Mengen.] — Eine Umformung des Vollständigkeitskriteriums von Vitali [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V. Ser. 30, 498 (1921)] [vgl. auch KS, insbes. S. 95]: Sei  $g_n = ON(a, b; dx), \sigma_n(x) = \sum_{r=0}^n g_r(x) \int_a^x g_r(t) dt, \|\sigma_n - \frac{1}{2}\| \rightarrow 0$  ist

notwendig und hinreichend für Abgeschlossenheit in  $L^2$ . — Durch Integration entsteht aus dem Kriterium von Vitali ein weiteres für  $L^2$  notwendig und hinreichendes (was sehr einleuchtend ist). Anwendung auf Jakobipolynome und Dimireihen. Eine weitergehende und präzise Fassung neuerdings bei Graves (dies. Zbl. 46, 294). Daran schließt an Rudin, dies. Zbl. 51, 49. — Aus der Gültigkeit der Parsevalschen Formel für  $ON(-h, h; dx(x)), |x(x) - x(x) - x(-x)|$  folgt die für  $ON(0, h^2, 2 dx(x^{1/2}))$  und  $ON(0, h^2, 2 x dx(x^{1/2}))$ . Anwendung auf Hermite- und Laguerre-Polynome. Sei  $g_n(x) = ON(a, b; dx)$  und  $h_n(x)$  ein Paar  $n$ -te Eigenfunktionen der konjugierten Integralgleichungen:  $g(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) h(t) dt, h(x) = \lambda \int_a^b K(t, x) g(t) dt$  mit stetigem Kern  $K(x, t)$ . Sei  $s_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x)$  mit



beliebigen reellen  $a_i$ . Wenn  $\int_a^b \left[ \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \right]^2 dt$  f. ü. existiert, liefern einfache Schlüsse (Heranziehen der  $h_n$ , Schwarzsche Ungleichung):

$$[3] \quad \left| \frac{d}{dx} s_n \right| \leq \left[ \int_a^b \left[ \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \right]^2 dt \right]^{1/2} |\lambda_n| |s_n(t)|, \quad [\lambda_n \text{ } n\text{-ter Eigenwert}].$$

$\{\Phi_i\}$  sei eine beliebige Funktionenmenge,  $\Phi'_i(x) = O(a, b; \sigma(x) dx)$ ,  $\sigma(x) > 0$ . Man erhält wieder elementar

$$[4] \quad \left\| \sqrt{\sigma(x)} \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i(x) \right\| \leq N_n \left\| \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x) \right\|$$

für irgendein  $\psi_i(x) = ON(a, b; dx)$  mit  $N_n = \left\| \sqrt{\sigma(x)} \Phi'_n(x) \right\|$ . [3] und [4] verallgemeinern ihrem Typus nach: Bernsteins Theorem in  $C$  für Polynome, Zygmund (dies. Zbl. 5, 353) (Trigonometrische Polynome in  $L^p$  und allgemeinere Räume), Hille, Szegő, Tamarkin (dies. Zbl. 18, 12). Weiter sei auf McEwen (dies. Zbl. 21, 307) hingewiesen. Schließlich wird die Fragestellung von Jackson über beste Fehlerapproximation durch trigonometrische Polynome [Theory of approximation (New York 1930), p. 86] unter den hier betrachteten allgemeineren Verhältnissen diskutiert. — Die  $q_i(x_1, \dots, x_n)$  seien stetig im abgeschlossenen Gebiet  $\mathfrak{G} \in R_n$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Die Menge der  $\sum a_{i_1 \dots i_k} q_{i_1}^{i_1} \dots q_{i_k}^{i_k}$  approximiert genau dann die stetigen Funktionen über  $\mathfrak{G}$  beliebig genau, wenn für beliebige reelle  $u_1, \dots, u_k$  das System  $q_i = u_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) höchstens eine Lösung besitzt. Es ist dann notwendig  $k \geq n$ . (16)–(18):  $C$  sei eine Ellipse mit den Brennpunkten  $\pm 1$  in der komplexen Ebene,  $D$  ihr Inneres.  $f(x)$  sei reell, nicht abnehmend, konvex,  $P_n(z)$  ein Polynom genau  $n$ -ten Grades der komplexen Veränderlichen  $z$ . Der Koeffizient von  $z^n$  sei  $+1$ . Die Tschebyscheffschen Polynome [vgl. Faber, J. reine angew. Math. 150, 79–106 (1919)] machen  $\int_C f(|P_n(z)|) |1 - z^2|^{-1/2} ds$  und  $\int_D f(|P_n(z)|) |1 - z^2|^{-1} d\omega$

zum Minimum. —  $D$  sei einfach zusammenhängend,  $C$  die rektifizierbare Begrenzung. Definition, Existenz und eindeutige Bestimmtheit der  $O$ -Polynome auf  $C$  bzw.  $D$  (Gewichtsfunktion 1) sind bekannt [Szegő, Math. Z. 9, 218–270 (1921) bzw. Bochner, Math. Z. 14, 180–207 (1922)]. Die Ausdehnung auf  $O$ -Polynome zu positiven stetigen Gewichtsfunktionen  $w(z)$  findet sich im wesentlichen in SZ, insbes. S. 357. Für  $w(z) \geq k > 0$  werden die bekannten Entwicklungssätze analytischer Funktionen nach  $O$ -Polynomen übertragen. — Im übrigen vgl. man Keldych (dies. Zbl. 25, 44). [Ausführliche Beweise in der o. a. Arbeit von Keldych sowie Korovkin (dies. Zbl. 60, 169)]. (19)–(21): Die  $q_n(z)$  heißen abgeschlossen in einem Gebiet der komplexen Ebene  $D$ , wenn für jede in  $D$  analytische Funktion  $f(z)$

gilt:  $|f(z) - \sum_{i=1}^n a_i q_i(z)| < \varepsilon$  gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilgebiet

von  $D$  bei geeigneter Wahl der Linearkombination der  $q_i(z)$ .  $q_i(z)$  sei analytisch in  $-\pi \leq I(z) \leq \pi$  und periodisch mit der Periode  $2\pi$ . Die  $d^n q_i(z)/dz^n$  sind abgeschlossen

in  $|z| < \pi - \varepsilon$ , wenn  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-nt+i} q_i(t) dt \neq 0$  für alle  $n$ .  $q_i(z + \alpha_n)$  ist dort abgeschlos-

sen, wenn die Voraussetzungen  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = 0$ ,  $|\alpha_n| < 1$  hinzukommen. Ein weiteres

Abgeschlossenheitskriterium für  $q_i(z + \alpha_n)$  ist fast identisch mit einem solchen für  $q_i(z \alpha_n)$  bei Gelfond (dies. Zbl. 20, 299). — Über die Untersuchungen von Gelfond hinaus geht der Satz:  $q_i(z)$  sei ganz von der Ordnung  $\mu$  und dem Typ  $\sigma$ .  $q_i(z \alpha_n)$  ist abgeschlossen in  $|z| < 1$ , wenn  $q_i^{(m)}(0) \neq 0$  und  $e \mu \sigma < \lim_{n \rightarrow \infty} n |\alpha_n|^{-\mu}$ .

[Man vgl. auch Ibragimov (dies. Zbl. 24, 215).] Die Untersuchungen sind übrigens

größtenteils überholt durch Boas (dies. Zbl. **60**, 223, 3. Referat), der sich auf die Methoden von Markouchevitch stützt. — Wir betrachten folgende Aussagen: I. Sei  $a_n$  komplex,  $\lambda_n \geq 0$ , ganz und  $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ ,  $\beta$  bel. reell. Aus  $a_n = O(n^\beta)$  und  $\sum \lambda_n a_n = 0$  folgt:  $a_n$  ist ein Polynom in  $n$ . II.  $f^n e^{-cx}$  ( $c > 0$ ) ist vollständig in  $L^2(0, \infty)$ . III.  $f(z)$  sei analytisch und  $O(|z|^\alpha)$  für ein reelles  $\alpha$  in  $R(z) > \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ),  $f^n(0) = 0$ . Dann ist  $f(z)$  ein Polynom. I und II sind äquivalent (Fuchs, dies. Zbl. **60**, 160). Fuchs gibt hinreichende und notwendige Bedingungen für die Gültigkeit von II (also auch von I) [Proc. Cambridge philos. Soc. **42**, 91–105 (1946)]. (Vgl. auch Pollard, dies. Zbl. **60**, 160.) Nun wird einfach gezeigt: I, II, III sind äquivalent. Der wichtigste Schritt ist: Aus III folgt I. Sei  $b_n = n! a_n$ . Es wird bewiesen, daß  $f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (-z)^n$  die Bedingungen von III erfüllt, d. h.,  $n! a_n = 0$  für  $n \geq n_0$ .

(22)–(24): Das Haarsche  $O$ -System wird verallgemeinert durch Konstruktion entsprechender Treppenfunktionen, basierend auf der  $p$ -adischen Entwicklung der Zahlen in  $\{0, 1\}$  ( $p$  prim). Eine ähnliche Verallgemeinerung erfahren die  $O$ -Funktionen von Rademacher:  $\alpha$  sei Primitivwurzel von  $z^p = 1$ ,  $w(x) = \alpha^{[x]}$ ,  $w_2(x) = w(p^2 x)$ . Dann ist  $q_n(x) = w_1^{\varepsilon_1}(x) \dots w_v^{\varepsilon_v}(x) = ON(0, 1; dx) \left[ n = \sum_{i=1}^v \varepsilon_i p^{i-1} \right]$ .

Die  $O$ -Funktionen von Rademacher erhält man für  $n = 2$ . — Ausführlich dargestellt und verallgemeinert in Romanov [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **10**, 3–34 (1946)] und Romanov (dies. Zbl. **44**, 40). — Sei

$f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ , ungerade und periodisch, [5]  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(nx) f(mx) dx = \delta_{nm}$ ,

$m, n = 1, 2, \dots$ . Wenn  $f(nx)$  vollständig in  $L^2$  ist und [5] mindestens für  $\min(n, m) \leq 1$  gilt, dann ist  $f(x) = \sin x$ . Wenn  $f(x)$  [5] sogar für alle  $m, n$  erfüllt und  $\neq \pm \sin x$  ist, kann  $f(nx)$  durch endlich viele Funktionen nicht vervollständigt werden. Nach Voraussetzung gilt  $f(x) \sim \sum a_n \sin nx$ . Wenn [6]  $\sum |a_n| < \infty$  und [5] gelten, kann  $f'(x)/C$  entsprechende Bedingungen nicht erfüllen, außer es ist  $C = N$  und  $f(x) = \frac{1}{N} \sin Nx$ . Für den Beweis dieser und im Umkreis dieser Resultate liegenden Ergebnisse ordnet man  $f(x)$  die Reihe [7]  $\Phi(z) = \sum a_n n^{-z}$  zu. [5] und [6] gelten genau dann, wenn  $\Phi(z)$  meromorph ist, [7] für  $R(z) \geq 0$  konvergiert und  $\Phi(z) \Phi(-z) = 1$ . Erweiterung der Resultate bei Bourgin [Trans. Amer. math. Soc. **60**, 478–518 (1946)]. Verwandte Fragestellungen bei Koelov (dies. Zbl. **39**, 292, 293). (25): Sei  $q_n(x) = O(a, b; q(x) dx)$ ,  $q'_n(x) = O(a, b; p(x) dx)$ .  $d[p(x) q'_n(x)] dx$ ,  $q(x)$ ,  $q'_n(x)$  seien stetig,  $q_0(x) = 1$ ,  $q'_n(x)$  abgeschlossen in  $L^2(a, b; p(x))$ .  $p(x)$  und  $q(x)$  mögen nur endlich viele Nullstellen besitzen und  $[p(x)]^{-1} \in L^2(a, b)$ . Dann ist  $q_n(x)$  eindeutig bestimmt und genügt der Differentialgleichung  $d[p(x) q'_n(x)] dx + \lambda_n q(x) q_n(x) = 0$  mit den Randbedingungen

$p(a) q'_n(a) = p(b) q'_n(b) = 0$  und  $\lambda_n^{-1} = \int_a^b q(x) q_n^2(x) dx$ . Dies gewinnt man durch

Fortbildung der in Gagaroff [C. r. Acad. Sci., Paris **188**, 222–224 (1929)] verwendeten Beweismethode. (26)–(28): Die Ergebnisse sind im wesentlichen enthalten in Boas (dies. Zbl. **25**, 254), wo darüber hinaus die Frage nach der Gültigkeit der Ungleichungen vom Hausdorff-Young-Typ behandelt wird. — Sei  $q_n(x)$  ein

$ON$ -System und [8]  $\gamma_n = \sum_{l=1}^{k_n} a_l^{(n)} q_l$ ,  $a_{k_n}^{(n)} \neq 0$ ,  $k_n$  nicht abnehmend und  $\lim (k_n - n) = 0$

und endlich. Die  $\gamma_n$  sind nicht notwendig  $O$ . Die Frage ihrer Vollständigkeit in  $L^2$  wird untersucht. — Zum Studium der Differentialgleichung des belasteten Balkens und der Platte mit eingespannten Rändern wird das System

$$S_n(x) = 2 \sin(\pi x/l) \sin(n \pi x/l) = \cos[(n-1)\pi x/l] - \cos[(n+1)\pi x/l],$$

welches somit von der Form [8] ist, betrachtet. Für dieses gilt:  $\int_0^1 S_n(x) S_m(x) dx = 0$  für  $|n - m| \equiv 0 \pmod{2}$ . Vgl. auch Vilenkin, dies. Zbl. **46**, 299. (29):  $P_n(x)$  sei für  $n = 0, 1, 2, \dots$  ein Polynom  $n$ -ten Grades,  $P_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - \xi_i^{(n)})$ ,  $\xi_i^{(n)} \leq \xi_{i+1}^{(n)}$ , dessen sämtliche Nullstellen dem Intervall  $[-1, 1]$  angehören. Sei  $x P_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{nk} P_k(x)$ ,  $A_n = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \dots & \alpha_{0n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1,0} & \dots & \alpha_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$ , wobei die  $\alpha_{ij}$  mit  $j > i + 1 = 0$  zu setzen sind und  $(A_n)^k = (\alpha_{ij}^{(k,n)})$ . Sei  $\psi_n(x)$  jene Treppenfunktion, welche in einer  $k$ -fachen Wurzel von  $P_n(x)$  den Sprung  $k n^{-1}$  macht. Für  $x < \xi_1^{(n)}$  gilt  $\psi_n \equiv 0$ , für  $x \geq \xi_n^{(n)}$   $\psi_n = 1$ . Falls  $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$  in einer überall dichten Menge, heißt  $\psi(x)$  Verteilungsfunktion der Nullstellen von  $P_n(x)$ . Durch  $\lambda_{nk}^{(m)}; \lambda_{nk}^{(m)} (k = 1, \dots, n)$  werde ein Quadraturverfahren  $(Q)$  von Polya definiert (dies. Zbl. **7**, 7). Sei  $n \lambda_{nk} - 1 = o(1)$ . Folgende Aussagen sind äquivalent: I.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,i}^{(k,n)}$  existiert und ist endlich für alle  $k = 1, 2, \dots$ ; II.  $\psi(x)$  existiert; III.  $Q_n(f) \rightarrow \int_{-1}^{+1} f(x) d\psi(x)$  [Bezeichnung: Zbl. l. c.].  $E$  sei die Menge aller Nullstellen von  $\{P_n(x)\}$ , die nach Voraussetzung nicht notwendig in  $[-1, 1]$  liegen,  $d(E)$  der transfinite Durchmesser der Hülle von  $E$ ,  $\mu(x)$  sei die Verteilungsfunktion von Robin für  $\overline{E}$ ,  $\int_{-1}^{+1} \log \frac{1}{z-x} d\mu(x) \equiv \gamma, z \in E, M_n = \max_{x \in \overline{E}} |P_n(x)|, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n} = d(\overline{E}) = e^{-\gamma}$  ist notwendig und hinreichend für die Gültigkeit von  $\psi(x) = \mu(x)$ . [Man vgl. hierzu Fekete, Math. Z. **17**, 228—249 (1923)]. Modifikation dieser Aussagen, wenn  $P_n(x) = O(-1, 1, d\sigma(x))$  mit  $\int_{-1}^{+1} d\sigma(x) = 1$  und  $\sigma(x)$  unendlich viele Wachstumsstellen hat. Fortsetzung und ausführliche Darstellung: Mat. Sbornik, n. Ser. **23** (65), 77—88 (1948), (30): Sei  $q_n = ON(0, 1; dx)$ , stetig und gleichmäßig beschränkt. Es gibt unendlich viele  $n$ , so daß  $q_n(x)$  höchstens  $n - 1$  mal das Vorzeichen wechselt, wenn u. a. folgende Voraussetzungen erfüllt sind:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b q_n^2(x) dx = k(b-a); k \geq 0$  für jedes Teilintervall  $(a, b)$  aus  $(0, 1); q_n(x)$  ist abgeschlossen in bezug auf  $C$ . L. Schmetterer.

**Korevaar, J.: A theorem on uniform convergence.** Nederl. Akad. Wet., Proc. **49**, 752—757 (1946).

The same as this Zbl. **31**, 119.

J. Horváth.

**Schwartz, Laurent:** Sur les fonctions moyenne-périodiques. C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 67—70 (1946).

Siehe dies. Zbl. **30**, 150.

**Markouchevitch, A.: Sur la meilleure approximation.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **44**, 262—264 (1944).

Hauptergebnis: Sei  $U$  die abgeschlossene lineare Hülle der Folge  $\{u_n\}$  stark linear unabhängiger Elemente eines Raumes vom Typ  $B$  (oder allgemeiner vom Typ  $F$ ).  $\{L_n\}$  sei ein bezüglich  $\{u_n\}$  biorthogonales System linearer Funktionale. Dann läßt sich jedes Element  $u \in U$  als Summe darstellen,  $u = u'_1 + u''_2$ , wobei die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} (L_n u') u_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} (L_n u'') u_n$  Folgen von Partialsummen besitzen, die bzw. gegen  $u'$  und  $u''$  konvergieren. — Spezialfall: Jede stetige Funktion läßt sich als Summe zweier quasianalytischer Funktionen im Sinne von S. Bernstein darstellen.

W. Hahn.



**Tschebotaröw, N.:** On a general criterion of the minimax. (C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 39, 341 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Eine Funktion  $f(x, a)$  zweier Vektoren  $x = \{x_i\}$ ,  $a = \{a_j\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, r$ ) habe stetige zweite Ableitungen nach den  $a_j$ ; alle  $x$ , für die  $f(x, a) > f_0$  ist, wenn  $a$  in der Nahe eines festen  $a_0$  liegt, sollen eine kompakte Menge bilden. Es sei  $\max_x f(x, a) = \Phi(a)$ . Sei  $y$  der Vektor mit den Komponenten  $df/da_j$ ;  $x'$  durchlaufe alle Vektoren, für die  $f(x', a_0) = \Phi(a_0)$  (d. h. also bei festem  $a = a_0$  den größten Wert annimmt);  $y'$  seien die entsprechenden  $y$ -Vektoren. Gibt es nun zu jedem  $c = \{c_j\}$  ( $j = 1, \dots, r$ ) zwei Vektoren  $y', y''$  so, daß die Skalarprodukte  $c y', c y''$  verschiedene Zeichen haben, so hat  $\Phi(a)$  an der Stelle  $a_0$  ein Minimum. Gibt es einen Vektor  $c$ , für den die Skalarprodukte alle dasselbe Zeichen haben, so ist  $\Phi(a_0)$  kein Minimum. — Andere Formulierung: Das Gleichungssystem  $\sum_j m_j y_j' = 0$  ( $j = 1, \dots, r$ ) hat nicht negative Lösungen  $m_j \geq 0$ .

— Spezialfall: Tschebyscheffsche Approximation für Polynome. W. Hahn.

**Bernstein, S.:** Sur la meilleure approximation des fonctions  $\int_0^\infty |y|^s d\psi(s)$  sur le segment  $(-1, +1)$ . Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 185—196 (1946) (Russisch mit französ. Zusammenfassg.)

Es sei  $\hat{f}(y)$  das im Titel auftretende Integral,  $Q_m(f(y))$  die Differenz zwischen  $f(y)$  und demjenigen Interpolationspolynom des (geraden) Grades  $m = 2n$ , das mit  $f(y)$  an den Nullstellen von  $\cos(m \arccos y)$  übereinstimmt. Unter gewissen Voraussetzungen über das Integral und über die beste Annäherung  $E_n[f(y)]$  gibt Verf. eine asymptotische Formel für  $Q_m(\hat{f}(y))$  an. Die Betrachtung des Spezialfalls  $\hat{f}(y) = 2 \int_0^\infty y^{2s} e^{2s(b - \ln |y|)} ds = |y|^{2a}(b - \ln |y|)^{-1}$  führt u. a. zu den Aussagen  $E_m[|y|^{2a}(b - \ln |y|)^{-1}] \cong E_m(\ln m)^{-1}(|y|^{2a})$ ;  $E_m[(b - \ln |y|)^{-1}] \cong (2 \ln m)^{-1}$ .

W. Hahn.

**Sansone, G.:** Sull'approssimazione di funzioni continue con polinomi trigonometrici. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 1, 39—42 (1946).

Di un teorema di D. Jackson (The theory of approximation, New York 1930; 12), relativo all'approssimazione, mediante polinomi trigonometrici, di una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , vengono date nel caso di una funzione definita in  $(0, \pi)$  due estensioni, una delle quali è la seguente: Se  $f(x)$  è una funzione continua, insieme con le proprie derivate dei primi  $2p$  ordini ( $p \geq 1$ ), nell'intervallo  $(0, \pi)$  e se  $\omega_{2p}(\delta)$  è il modulo di continuità di  $f^{(2p)}(x)$ , allora a ogni intero positivo  $n \geq 2p$  può essere associato un polinomio trigonometrico  $T_n(x)$  di ordine  $n$  tale che per  $0 \leq x \leq \pi$  risulti

$$|f(x) - T_n(x)| \leq K^{2p} \left( \frac{K}{2\pi} + 4 \right) \left[ \omega_{2p} \left( \frac{2\pi}{n} \right) + M_{2p} \sum_{k=1}^p \{ |f^{(2k-1)}(0)| + |f^{(2k-1)}(\pi)| \} \frac{2\pi}{n} \right] \frac{1}{n^{2p}},$$

ove  $K$  è la costante assoluta che figura nel teorema di Jackson e  $M_{2p}$  è un'altra costante dipendente da  $p$ .

S. Cinquini.

**Sansone, G.:** Sulla sommabilità delle serie trigonometriche di Fourier. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 45—48 (1946).

Anwendung von Verfahren der Form  $\Gamma\text{-}\lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_{n_k}$ . Vgl. Zalezwasser, dies. Zbl. 15, 255.

K. Zeller.

**Bellman, Richard:** Some applications of the Fourier integral to generalized trigonometric series. Duke math. J. 11, 703—713 (1944).

In dem „high indices theorem“ von Ingham (dies. Zbl. 11, 215) über Reihen der Form  $f(s + it) = \sum_{k=1}^\infty a_k e^{-i\lambda_k(s+it)}$  ist die Hauptschwierigkeit der Beweis von  $a_n = o(1)$ . Verf. führt diesen Beweis für den Fall, daß neben der Lückenbedingung

$l_{k+1} - l_k \geq 2d > 0$  eine andere Mittelwertbedingung als bei Ingham eingeführt

wird, nämlich  $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin dt}{t} \right|^p |f(s + it)|^p dt \leq K^p$  ( $1 < p \leq 2$ ). Mit denselben Mitteln

wird ein Momentensatz für die Folge  $e^{il_n t}$  im Intervall  $(-\infty, \infty)$  bewiesen und ein Satz von Gorny (s. dies. Zbl. 22, 154) verallgemeinert, der die Koeffizienten der Entwicklung einer Funktion in eine verallgemeinerte trigonometrische Reihe mit den Mittelwerten der Ableitungen der Funktion verknüpft. *G. Doetsch.*

**Alaci, V.:** Une classe d'intégrales définies, nécessaire dans la théorie des séries trigonométriques. Bull. Sci. Techn. Inst. polytechn. Timișoara 12, 129—141 (1946).

**Zahorski, Zygmunt:** Un problème de la théorie des ensembles et des fonctions. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 465—467 (1946).

I. Zu gewissen Klassen  $K$  trigonometrischer Reihen gibt es eine (kompliziert definierte) Zahl  $D(K)$ ,  $0 \leq D(K) \leq 1$ , mit der Bedeutung: Ist  $D(K) = 0$ , so konvergieren alle Reihen aus  $K$  fast überall; ist  $D(K) = 1$ , so gibt es eine fast überall divergente Reihe in  $K$ . Spezialfall:  $K$  = Menge der Fourierreihen zu  $L^2$ . II. Aussagen über die Menge der Punkte, in denen eine Funktion nicht differenzierbar ist. *K. Zeller.*

**Kharchiladzé, Philippe:** Sur la méthode de sommation de S. N. Bernstein. Mat. Sbornik, n. Ser. 11 (53), 121—248 und französ. Zusammenfassg. (1942) [Russisch]. Siehe Ogiewetzkij (dies. Zbl. 42, 65).

**Erdős, P.:** On the convergence of trigonometric series. J. Math. Physics 22, 37—39 (1943).

Aus  $\sum \varrho_k^2 < \infty$  und einer einfachen Bedingung über die  $n_k$  folgt, daß  $\sum \varrho_k \cos n_k x$  fast überall konvergiert. *K. Zeller.*

**Nachbin, Leopoldo:** On linear expansions. I. Trans. Amer. math. Soc. 59, 437—440 (1946).

**Nachbin, Leopoldo:** On linear expansions. II. Summa Brasil. Math. 1, 17—20 (1946) [Mit portugiesischer Zusammenfassg.].

**Nachbin, Leopoldo:** Über fast überall divergente Reihen von Funktionen. Univ. nac. Tucumán, Revista A 3, 311—315 (1942) [Spanisch].

Für ein System meßbarer Funktionen  $\{q_n(x)\}$  sind folgende Eigenschaften äquivalent: CL (Cantor-Lebesgue): Konvergiert  $\sum \lambda_n q_n(x)$  fast überall, so gilt  $\lambda_n \rightarrow 0$ ; LD (Lusin-Denjoy): Ist  $\sum |\lambda_n| = \infty$ , so divergiert  $\sum \lambda_n q_n(x)$  fast überall. Weitere Äquivalenzen. Beispiel. Vgl. Stone (dies. Zbl. 2, 188), wo die  $q_n$  als beschränkt angenommen werden. *K. Zeller.*

**Jacob, M.:** Über eine Anwendung der Laplace-Transformation auf die Summation Fourierscher Reihen und trigonometrischer Interpolationspolynome. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 32, 390—394 (1941).

Verf. gibt Darstellungen für Kerne, die bei Transformationen von Fourierreihen auftreten (Rieszmittel, Bernsteinsche Interpolationspolynome und Verallgemeinerungen), und schätzt die Güte der Approximation der Funktion durch die Transformation ab. *K. Zeller.*

**Szász, Otto:** On uniform convergence of Fourier series. Bull. Amer. math. Soc. 50, 587—595 (1944).

**Szász, Otto:** On uniform convergence of trigonometric series. Bull. Amer. math. Soc. 50, 856—867 (1944).

Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz trigonometrischer Reihen, die sich nur auf deren Koeffizienten beziehen.  $q(t)$  sei eine gerade,  $\psi(t)$  eine ungerade, mit  $2\pi$  periodische, integrable Funktion. — I. (1)  $\varphi(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n t$ , (2)  $\psi(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n t$ . Die Reihe (1) bzw. (2) konvergiert gleichmäßig bei jedem

Stetigkeitspunkt von  $q$  bzw.  $\varphi$ , wenn die Bedingung (3)  $\lim_{\lambda \downarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{\lambda n} (|a_\nu| - a_\nu) = 0$  von den  $a_\nu$  bzw. den  $b_\nu$  erfüllt wird. — II. Die trigonometrische Reihe  $\sum' a_n \cos nt$  konvergiert gleichmäßig, wenn  $\sum' a_n$  Abel-summierbar und die Bedingung (4)  $\sum_{n=1}^{2n} |a_\nu - a_{\nu+1}| = O(1/n)$  erfüllt ist.  $\sum' b_n \sin nt$  konvergiert gleichmäßig, wenn (5)  $A\text{-}\lim(n b_n) = 0$  ist und die  $b_n$  die Bedingung (4) erfüllen. Entsprechend konvergiert die Potenzreihe  $\sum' c_n z^n$  gleichmäßig in  $|z| < 1$ , wenn  $\sum' c_n$   $A$ -summierbar ist und die  $c_n$  die Bedingung (4) erfüllen. — III. Für gewisse Konstanten  $p > 0$ ,  $q \geq 0$  und  $A = n s_n - (n-1) s_{n-1} + p$ , ( $s_n = \sum_1^n a_\nu$ ),  $B_n = n b_n + p$  sei die Bedingung (6)  $0 \leq A_{n+1} \leq (1 + q/n) A_n$  bzw. (6')  $0 \leq A(1 - q/n) = A_{n+1}$  für alle großen  $n$  erfüllt. Aus der  $A$ -Summierbarkeit von  $\sum' a_n$  und (6) bzw. (6') folgt  $n a_n \rightarrow 0$  und die gleichmäßige Konvergenz von  $\sum' a_n \cos nt$ . Aus (5) und der Bedingung (6) für  $B_n$  statt  $A_n$  folgt  $n b_n \rightarrow 0$  und die gleichmäßige Konvergenz der trigonometrischen Reihe  $\sum' b_n \sin nt$ . — IV. Notwendig und hinreichend für (6)  $\sum' b_n \sin nt \rightarrow \pi/2$  ( $t \neq 0$ ) ist  $n b_n \rightarrow 0$ . Gilt (6) und erfüllen die  $b_n$  die Bedingung (3), so gilt  $\sum_1^n \nu b_\nu \sim 0 \cdot n$  und  $\sum_1^n b_\nu \sin \nu t_n \sim 0 \sum_1^n \frac{\sin \nu t_n}{\nu} \rightarrow 0$  für  $t_n \rightarrow 0$ . Die beiden letzten Reihen liefern dieselbe Gibbs'sche Erscheinung.

V. Garten.

Szász, Otto: On the partial sums of Fourier series at points of discontinuity. Trans. Amer. math. Soc. 53, 440—453 (1943).

Szász, Otto: On some trigonometric summability methods and Gibbs' phenomenon. Trans. Amer. math. Soc. 54, 483—497 (1943).

Szász, Otto: The generalized jump of a function and Gibbs' phenomenon. Duke math. J. 11, 823—833 (1944).

Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Konvergenz der durch eine spezielle Dreiecksmatrix definierten Mittel

$$T_n = \sum_1^n a_{n\nu} \tau_\nu, \quad a_{n\nu} = \varrho_n^\nu \frac{\sin \nu t_n}{\nu} \quad \text{für } \varrho_n \rightarrow 1, t_n \rightarrow 0$$

und der mit ihnen gebildeten Folgen

$$B_n = \frac{1}{2} \{T_n(t_n) + T_n(t'_n)\}, \quad H_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_k(t_k), \quad S_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T_n(u) du,$$

falls die Folge  $\{\tau_n\}$  konvergiert bzw.  $C_k$ -limitierbar ist (insbes.  $k = 1, 2$ ). Es wird i. a.  $\lim T_n = \sigma \lim \tau_n$  mit  $\sigma \neq 1$  betrachtet. Bedeutet  $s_n(\varrho, t)$  die  $n$ -te Teilsumme von  $\sum_1^\infty \varrho^\nu b_\nu \sin \nu t$ , so wird im Fall  $\tau_\nu = \nu b_\nu$  gerade  $T_n = s_n(\varrho_n, t_n)$ . Anwendung auf Fouriersche Sinusentwicklungen liefert eine „verallgemeinerte Gibbs'sche Erscheinung“ und einen neuen Weg, den „verallgemeinerten Sprung“ einer Funktion zu bestimmen. Für eine mit  $2\pi$  periodische, ungerade, integrable Funktion  $f(t) \sim \sum_1^\infty b_n \sin nt$  wird der „verallgemeinerte Sprung“  $j$  bei  $t = 0$  für irgendein  $\alpha > 0$  durch den Grenzwert

$$(1) \quad j = \lim_{t \downarrow 0} 2\psi_\alpha(t), \quad \psi_\alpha(t) = \frac{\alpha}{t^\alpha} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du$$

erklärt. [ $\alpha = 0$  entspricht  $j = 2 \lim_{t \downarrow 0} f(t) = 2f(0)$ ; in diesem Fall gilt dann bekanntlich (1) auch für jedes  $\alpha > 0$ .]  $f(t)$  zeigt bei  $t = 0$  eine „verallgemeinerte



Gibbssche Erscheinung“, wenn  $2 \overline{\lim}_{t_n \rightarrow 0} s_n(t_n) > j$  ist, wobei  $s_n(t) = \sum_1^n b_\nu \sin \nu t$ ,  $s_n^*(t) = \sum_1^n b_\nu \cos \nu t$ . Sind z. B. für irgendein  $j$  die Bedingungen  $\int_0^j \{f(u) - j/2\} du = o(t)$  und  $\int_0^t |f(u) - j/2| du = O(t)$  für  $t \rightarrow 0$  erfüllt, so gilt  $C_2\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} n b_n = j/\pi$  und

$$\overline{\lim}_{t_n \downarrow 0} \sum_1^n b_\nu \sin \nu t \geq \frac{1}{2} j g \quad \text{mit} \quad g = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

Aus der Voraussetzung  $2 \psi_{\alpha+1}(t) \rightarrow j$ ,  $\int_0^j |2 \psi_\alpha(u) - j| du = O(t)$ , ( $t \downarrow 0$ ) folgt für  $t_n \downarrow 0$

im Fall  $\alpha < 1$ :  $s_n'(t_n)/n \rightarrow 2\pi^{-2}(-1)^{\lambda-1} j/(2\lambda-1)$  für  $n t_n - 2^{-1}(2\lambda-1)\pi = O(1/n)$

und  $s_n^*(t_n)/\log n \rightarrow \pi^{-1} j$  für  $n t_n - 2^{-1}(2\lambda-1)\pi = O(\log n/n)$ ;

im Fall  $\alpha < 2$ :  $n^{-1}\{s_n'(0) - s_n'(t_n)\} \rightarrow j\pi^{-1}$

und  $s_n^*(0) - s_n^*(t_n) \rightarrow \frac{j}{\pi} \int_0^{2\lambda\pi} \frac{1 - \cos u}{u} du$  für  $n t_n - 2\lambda\pi = O(1/n)$ ;

im Fall  $\alpha < 3$ :  $\sigma_n^*(0) - \sigma_n^*(t_n) \rightarrow \frac{j}{\pi} \left\{ \int_0^{2\lambda\pi} \frac{1 - \cos u}{u} du - 1 \right\}$  für  $n t_n - 2\lambda\pi = O(1/n)$

mit  $\sigma_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_1^{n-1} s_\nu^*(t)$ .

Unter denselben Voraussetzungen bedecken die Häufungspunkte von  $s_n(t_n)$  ent-

weder die ganze reelle Achse, oder es gilt  $s_n(t_n) \rightarrow \frac{j}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du = \frac{j}{2} 1.17897975 \dots$

wenn nur  $n t_n - \pi = O(1/n)$  für  $n \rightarrow \infty$ , oder beides trifft zu.

V. Garten.

**Szász, Otto:** On the partial sums of harmonic developments and of power series. Trans. Amer. math. Soc. 52, 12—21 (1942).

Die harmonische Sinusentwicklung  $H(r, \theta) = \sum_{\nu=1}^\infty b_\nu r^\nu \sin \nu \theta$  konvergiere für  $0 < r < 1$  und sei für  $0 < \theta < \pi$  nicht-negativ. Es gibt eine nur von  $n$  abhängige Zahl  $R_n$  derart, daß  $s_n(r, \theta) = \sum_1^n b_\nu r^\nu \sin \nu \theta \geq 0$  für  $0 < r \leq R_n$ ,  $0 < \theta < \pi$ , aber i. a. nicht mehr für  $r > R_n$ . Dieses  $R_n$  ist das größte  $r$ , für das  $\sum_1^n \nu r \sin \nu \theta \geq 0$  ( $0 < \theta < \pi$ ), und das größte  $r$ , für das

$$\frac{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^2}{r \sin \theta} \sum_1^n \nu r^\nu \sin \nu \theta \geq 0 \quad \text{für alle } \theta.$$

Es gilt  $R_n = 1 - (3 \log n)/n + (\log \log n)/n + O(1/n)$ . Anwendung der Eigenschaften von  $R_n$  auf Fourierreihen von konvexen Funktionen und eine Klasse

von Potenzreihen. — Wenn  $f(\theta) \sim \sum_1^\infty b_\nu \sin \nu \theta$  positiv und in  $0 < \theta < \pi$  nach oben konvex ist, so ist  $\sum_1^\infty r^\nu b_\nu \sin \nu \theta$  in  $0 < \theta < \pi$  nach oben konvex für  $0 < r \leq R_n$ , aber i. a. nicht für  $r > R_n$ . Wenn  $f(\theta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_\nu \cos \nu \theta$  in

$0 < \theta < \pi$  monoton wächst oder fällt, ist die Teilsumme  $\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^n a_\nu r^\nu \cos \nu \theta$  im selben Sinne monoton für  $0 < r \leq R_n$ , und  $R_n$  läßt sich durch keine größere Zahl ersetzen. Eine Kurve der  $(u, v)$ -Ebene heiße (nach Fejér) in Richtung der  $v$ -Achse konvex, wenn jede Parallele zur  $v$ -Achse wenigstens 2 Punkte mit ihr

gemein hat. Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) = w = u + i v$  sei in  $|z| < 1$  regulär, und alle  $a_n$  seien reell. Sind noch die Bilder der Kreise  $|z_1| = r$  ( $0 < r < 1$ ) in Richtung der  $v$ -Achse konvex, so haben die Teilsummen  $\sum_0^n a_n z^n$  in  $|z_1| < R_n$  die gleiche Eigenschaft, aber i. a. in keinem größeren Kreise.

V. Garten.

Szász, Otto: On the logarithmic means of rearranged partial sums of a Fourier series. Bull. Amer. math. Soc. 48, 705—711 (1942).

$f(\theta)$  sei eine reelle, gerade,  $L$ -integrierte Funktion,

$$f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_n \quad (n \geq 1), \quad s_0 = \frac{a_0}{2},$$

$\{s_n^*\}$  bezeichne die nach abnehmender Größe umgeordnete Folge  $\{s_n\}$ . In dem von Hardy-Littlewood (dies. Zbl. 12, 351) herrührenden Satz:

$$\text{Aus } f(0) = o((\log 1/\theta)^{-1}) \text{ für } \theta \rightarrow 0 \text{ folgt } \sum_0^n \frac{s_n^*}{n+1} = o(\log n),$$

läßt sich die Voraussetzung durch  $\int_0^\delta f(t) dt = o(\theta \log(1/\theta))$  unter Hinzufügung der Bedingung  $|f(\theta)| < \theta^{-\delta}$  ( $\delta$  positive Konstante) für  $\theta \rightarrow 0$  ersetzen. V. Garten.

Szász, Otto: On convergence and summability of trigonometric series. Amer. J. Math. 64, 575—591 (1942).

$\sum a_n$  heißt nach dem Lebesguesschen Verfahren zum Wert  $s$  summierbar (abgekürzt:  $L\text{-}\sum a_n = s$ ), wenn erstens  $\sum a_n (\sin nt)/n = F(t)$  in einem Intervall  $0 < t < t_0$  konvergiert und zweitens  $F(t)/t \rightarrow s$  für  $t \downarrow 0$ . In Verallgemeinerung Hardy-Littlewoodscher Sätze gilt: 1. Aus  $L\text{-}\sum a_n = s$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \downarrow 1} \min_{n < k \leq \lambda n} \sum_n a_n = 0$  folgt  $\sum a_n = s$ . — 2. Aus  $\sum a_n = s$  und  $\sum_n (|a_n| - a_n) = O(1)$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt  $L\text{-}\sum a_n = s$ . Entsprechend Abschätzung der Hauptlimites von  $F(t)/t$  durch die Hauptlimites der Teilsummen  $s_n$  von  $\sum a_n$  unter allgemeineren Voraussetzungen. — 3. Aus  $s_n = s + O(1/\log n)$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\sum_n (|a_n| - a_n) = O(n^{1-\delta})$  für jedes  $0 < \delta < 1$  folgt  $L\text{-}\sum a_n = s$ .

V. Garten.

Szász, Otto: On the absolute convergence of trigonometric series. Ann. of Math., II. Ser. 47, 213—220 (1946).

In dem bekannten Satz von Fatou: Aus  $|a_{n+1}| \leq |a_n|$  für  $n \geq 1$  und  $\sum a_n \cos nx < \infty$  für ein  $x = x_0$  folgt  $\sum a_n < \infty$ , kann die Bedingung der Monotonität durch die allgemeinere  $|a_{n+1}| \leq c |a_n|$  ( $c > 0$  konst.) ersetzt werden. Dasselbe gilt für Sinusreihen, wenn  $x_0 \neq 0 \pmod{\pi}$ . Für verallgemeinerte trigonometrische Reihen mit  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  gilt entsprechend:  $\sum \varrho_n \cos \lambda_n x$  konvergiere absolut für irgendein  $x_0 > 0$ , für das  $0 < \alpha \leq (\lambda_n - \lambda_{n-1}) x_0 \leq \beta < \pi$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \cos \lambda_{n-i} x_0 > 0$  gilt, und es sei  $\varrho_{n+1} \leq c \varrho_n$  für irgendein  $c > 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), dann ist  $\sum \varrho_n < \infty$ . (Ebenso auch für die Sinusreihe.) Sei  $c > 0$ ,  $0 < \varrho_{n+1} \leq c \varrho_n$  und  $a > 0$  eine gerade ganze Zahl. Konvergiert an einer Stelle  $\sum \varrho_n \cos(n^a x)$  absolut, so ist  $\sum \varrho_n < \infty$ . Ist  $q(x)$  eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion der Periode 1 und gilt  $0 < \varrho_{n+1} \leq (1 + c/n) \varrho_n$  für irgendein  $c > 0$  und alle  $n$ , so folgt aus der absoluten Konvergenz von  $\sum \varrho_n q(n x)$  für irgendein irrationales  $x$  die Konvergenz von  $\sum \varrho_n$ .

V. Garten.

Kawata, Tatsuo: Notes on Fourier series. XII. On Fourier constants. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 218—222 (1944).

Sunouchi, Gen-ichirô: On Fourier constants, Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 542—544 (1944).

Teil XI der Arbeit von Kawata s. dies. Zbl. 27, 31. Die Transformation  $a'_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k/k$  führt Fourier-Sinus- bzw. -Kosinus-Koeffizienten aus  $L^p$  ( $p > 1$ ) in ebensolche über. K. Zeller.

Kawata, Tatsuo: Notes on Fourier series. XIII. Remarks on the strong summability of Fourier series. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 223—226 (1944).

Sunouchi, Gen-ichirô: On the strong summability of Fourier series. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 420—423 (1943).

Teil XII der Arbeit von Kawata s. vorstehendes Referat. Sunouchi betrachtet Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen aus  $L^p$  ( $p > 1$ ). Kawata Funktionen einer Veränderlichen aus  $L$ . K. Zeller.

Sunouchi, Gen-ichirô: On the strong summability of series of orthogonal functions. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 251—256 (1944).

Lorch, Lee: On Fejér's calculation of the Lebesgue constants. Bull. Calcutta math. Soc. 37, 5—8 (1945).

Chow, H. C.: Cesàro means connected with the allied series of a Fourier series. J. Chinese math. Soc. 2, 291—300 (1940).

● Hardy, G. H. and W. W. Rogosinski: Fourier series. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, no. 38.) (Cambridge: Cambridge University Press 1944. 100 p.; 1,75 dollars.

(1) Bosanquet, L. S.: The Cesàro summability of the successively derived allied series of a Fourier series. Proc. London math. Soc., II. Ser. 49, 63—76 (1945).

(2) Sahai, Basdeo: On the summability of the conjugate series of the derived Fourier series. Proc. nat. Acad. Sci. India, Sect. A 10, 93—102 (1940).

(3) Misra, M. L.: On the Cesàro summability of the successively derived series of the conjugate series of a Fourier series. Bull. Calcutta math. Soc. 38, 151—155 (1946).

(1) enthält notwendige und hinreichende Bedingungen für die  $O(\alpha + r)$ -Summierbarkeit der  $r$ -mal differenzierten konjugierten Reihe. (2) und (3) hinreichende Bedingungen. K. Zeller.

Chu, Liang-Pi: On the general partial sums of a Fourier series. Ann. of Math., II. Ser. 46, 511—532 (1945).

Verf. gibt unter gewissen Voraussetzungen Schranken für das Wachstum der Cesàro-Transformierten von Fourierreihen  $\sum A_n(x)$  und von Reihen der Form  $\sum \lambda_n A_n(x)$ . K. Zeller.

Hsiang, Fu Cheng: The summability  $(C, 1 - \varepsilon)$  of Fourier series. Duke math. J. 13, 43—50 (1946).

Integralkriterien unter Verwendung der Funktion  $\varphi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)$ . K. Zeller.

Losinsky, S. M.: On an analogy between the summation of Fourier series and that of interpolation trigonometric polynomials. C. r. Acad. Sci. URSS. n. Sér. 39, 83—87 (1943).

Sei  $s_n(f, x)$  die  $n$ -te Teilsumme der Fourierreihe von  $f(x) \in L^p$  und  $t_{nr}(f, x)$  die  $r$ -te Teilsumme des Interpolationspolynoms mit  $2n+1$  äquidistanten Interpolationspunkten; die Matrix  $\{k_{nr}\}$  genüge gewissen Voraussetzungen. Verf. vergleicht das Verhalten von  $\sum_{r=0}^n k_{nr} s_r$  und  $\sum_{r=0}^n k_{nr} t_r$  für  $n \rightarrow \infty$  unter Verwendung der  $L^p$ -Metrik. K. Zeller.



Loziński, S.: On convergence and summability of Fourier series and interpolation processes. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **11** (56), 175—268 (1944) [Englisch mit russischer Zusammenfassung].

Verfahren, die die Fourierreihe jeder stetigen Funktion summieren. Orliczräume. Konjugierte Funktionen von Funktionen aus Orliczräumen. Verallgemeinerungen der Ergebnisse der vorhergehenden Arbeit auf Orliczräume. *K. Zeller.*

Martchenko, V. A.: Application de la méthode de sommation de Fejér-Bochner aux séries de Fourier généralisées. *C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér.* **53**, 7—9 (1946).

Entwicklungen der Form  $f(x) \sim \sum_{\lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$ , wobei die  $a(\lambda)$  mit Hilfe eines Summierungsverfahrens für  $\int f(t) e^{-i\lambda t} dt$  definiert werden und nur abzählbar viele  $a(\lambda)$  nicht verschwinden. *K. Zeller.*

Bayard, Marcel: Sur la représentation des fonctions d'une variable réelle en séries trigonométriques plus générales que les séries de Fourier. *C. r. Acad. Sci., Paris* **216**, 792—793 (1943).

Entwicklungen der Form  $f(x) = \sum c_r \cos[\omega_r(x - x_0) + \varphi_r]$  mit vorgegebenen  $\varphi_r$ . Vgl. Picard, *Traité d'Analyse*, Paris 1926, Bd. 2, S. 187. *K. Zeller.*

Korouš, Josef: On a generalization of Fourier series. *Časopis Mat. Fys.* **71**, 1—15 (1946) [mit tschechischer Zusammenfassung].

Reihenentwicklungen der Form  $\sum_{-\infty}^{+\infty} (a_\nu \cos l_\nu x + b_\nu \sin l_\nu x)$ , wobei die  $l_\nu$  nicht zu sehr von  $\nu$  abweichen. Konvergenzvergleich mit Fourierreihen.

*K. Zeller.*

(1) Kuttner, B.: Note on the Riesz means of a Fourier series. *J. London math. Soc.* **18**, 148—154 (1943).

(2) Kuttner, B.: On the Riesz means of a Fourier series. II. *J. London math. Soc.* **19**, 77—84 (1944).

(3) Kuttner, B.: On the Gibbs phenomenon for Riesz means. *J. London math. Soc.* **19**, 153—161 (1944).

(4) Kuttner, B.: Note on the Gibbs phenomenon. *J. London math. Soc.* **20**, 136—139 (1945).

It is well known that if  $f(x) \geq 0$  [ $f(x)$  periodic of period  $2\pi$  and  $L$ -integrable in  $(0, 2\pi)$ ], then the Cesàro means  $(C, 1)$  of the Fourier series of  $f(x)$  are also  $\geq 0$ . From here it follows that also the Riesz means  $(R, n, k)$  are all  $\geq 0$  if  $k \geq 1$ . The author considers then Riesz means  $(R, n^\lambda, k)$  and proves in (1) that, if  $\lambda \geq 2$  and no matter how large  $k$  is, there are functions  $f(x) \geq 0$  whose Riesz means  $(R, n^\lambda, k)$  are not all and everywhere  $\geq 0$ . If  $0 < \lambda < 2$ , then the author proves in (2) that there is a continuous strictly increasing function  $k(\lambda) \geq 0$  with  $k(1) = 1$ ,  $k(2-) = +\infty$ , such that for  $k \geq k(\lambda)$  all Riesz means  $(R, n^\lambda, k)$  are everywhere  $\geq 0$ . The Abel means  $(A, n^\lambda)$  of the Fourier series of  $f(x)$  have an analogous behavior, namely they are all  $\geq 0$  if  $0 < \lambda < 2$ , and not all  $\geq 0$  for every  $\lambda \geq 2$ . In (3) the author discusses the Gibbs phenomenon for the same means. It is well known that for functions  $f(x)$  having a simple discontinuity the Gibbs phenomenon vanishes for the means  $(C, k)$  if and only if  $k \geq r_0$ , where  $r_0 = 0.439 \dots$  is the Cramer-Gronwall constant [see T. H. Gronwall, *Ann. of Math.*, II. Ser. **3**, 233—240 (1931)]. The author proves that for  $0 < \lambda < 2$  there is a continuous increasing function  $r(\lambda)$  such that the Gibbs phenomenon vanishes for the means  $(R, n^\lambda, k)$  of the Fourier series of functions having a simple discontinuity if and only if  $k \geq r(\lambda)$ . The author proves also that  $0 < r(\lambda) < k(\lambda)$ ,  $r(0+) = 0$ ,  $r(1) = r_0$ ,  $r(2-) = +\infty$ . If  $\lambda \geq 2$  the Gibbs phenomenon persists for the means  $(R, n^\lambda, k)$  no matter how large  $k$  may be. Analogous results hold for Abel means  $(A, n^\lambda)$ .

(4) concerns the Gibbs phenomenon for functions  $f(x)$  having any kind of discontinuities and the so-called  $K$ -methods of convergence according to the terminology of Hardy and Rogosinski. Let  $u_n(x)$  be the means and  $K_n(x)$  the nucleus of such a  $K$ -method  $M$ . For any function  $f(x)$  and any  $x$  let  $s' = \liminf f(y)$ ,  $s'' = \limsup f(y)$  as  $y \rightarrow x$ ,  $S' = \liminf u_n(y)$ ,  $S'' = \limsup u_n(y)$  as  $y \rightarrow x$ ,  $n \rightarrow \infty$ , independently. Then  $M$  is said to present the Gibbs phenomenon if and only if for some function  $f(x)$  and some  $x$  we have either  $S'' > s''$ , or  $S' < s'$ , or both. Then it is proved that  $M$  does not present the Gibbs phenomenon if and only if  $K_n(x)$  is bounded below.

*L. Cesari.*

(1) Bellman, Richard: Convergence of non-harmonic Fourier series. Duke math. J. 10, 551—552 (1943).

(2) Bellman, Richard: A generalization of a Zygmund-Bernstein theorem. Duke math. J. 10, 649—651 (1943).

(3) Bellman, Richard: Random summability and Fourier series. Bull. Amer. math. Soc. 49, 732—733 (1943).

(4) Bellman, Richard: A note on a theorem of Hardy on Fourier constants. Bull. Amer. math. Soc. 50, 741—744 (1944).

In (1) the author considers series of the form  $[1] \sum a_k e^{i\lambda_k x}$  and proves that the condition  $\sum |a_k|^p < \infty$ ,  $\lambda_{k+1} - \lambda_k > b > 0$ ,  $\lambda_k$  real, assures the convergence almost everywhere in  $(-\infty, +\infty)$  of the series [1]. This result extends a previous one of M. Kac [Duke math. J. 8, 541—545 (1941)]. In (2) the author proves that if  $|\lambda_k| \leq \omega$  for all  $-N \leq k \leq N$ , and  $s_N(t) = \sum a_k e^{i\lambda_k t}$ , where  $\sum$  ranges from  $k = -N$  to  $k = N$ , then  $[2] M_p[s'_N(t)] \leq \omega M_p[s_N(t)]$ , where  $p \geq 1$  and  $M_p[f] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^p dt \right]^{1/p}$  as  $T \rightarrow \infty$ . For  $p = \infty$  relation [2], where  $s'$  means

the derivative of  $s$ , can be interpreted as  $\max |s'_N(t)| \leq \omega \max |s_N(t)|$ . This statement generalizes a classical result of S. Bernstein and also a recent one of A. Zygmund (this Zbl. 5, 353). In (3) the author considers harmonic Fourier series. If  $r_k(t)$  denotes Rademacher's function  $r_k(t) = \text{sgn} \sin 2^{k+1} t$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), then a series with partial sums  $s_k(t)$  is said to be random summable with sum  $s(t)$  if  $M_n/m_n \rightarrow s(t)$  as  $n \rightarrow \infty$ , where  $m_n = \sum (1 - r_k(t))$ ,  $M_n = \sum s_k(t) (1 - r_k(t))$ , and  $\sum$  ranges from 1 to  $n$ . Then the author proves that, if  $f(t) \in L$ , then the Fourier series of  $f$  is random summable to  $f(t)$  almost everywhere. (4) also concerns harmonic Fourier series. Given any two sequences  $a_1, a_2, \dots$ ;  $b_1, b_2, \dots$ , put  $A_n = n^{-1}(a_1 + \dots + a_n)$ ,  $B_n = b_1/1 + b_2/2 + \dots + b_n/n$ . A well known theorem of Hardy [Messenger of Math. 58, 50—52 (1928)] states that if  $\sum a_n \cos nx \sim f$ ,  $f \in L^p$ , then  $\sum A_n \cos nx \sim F$ ,  $F \in L^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . The author proves that if  $\sum b_n \sin nx \sim g$ ,  $g \in L^{p'}$ ,  $1 < p' < +\infty$ , then  $\sum_{2\pi} B_n \sin nx \sim G$ ,  $G \in L^{p'}$  and that, if  $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ , then  $\int_0^{2\pi} (fG - Fg) dx = 0$ .

*L. Cesari.*

Iyengar, K. S. K.: A Tauberian theorem and its application to convergence of Fourier series. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 18, 81—87 (1943).

If  $\{b_{k,n}\}$  is defined by the relation  $\left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j+1} \right]^k = \sum b_{k,n} x^n$ , where  $k > 0$  is an integer, then a summation method  $(N, k)$  can be defined by considering the Nörlund means using the coefficients  $\{b_{k,n}\}$ . The Fourier series of a function  $f \in L^1$  is shown to be summable  $(N, 1)$  if  $|f(x-h) - f(x)| \log |h| \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ . This is combined with a Tauberian theorem on  $(N, k)$  means, so as to yield the Hardy-Littlewood test on the convergence of a Fourier series at a point.

*K. Chandrasekharan.*

Iyengar, K. S. K.: New convergence and summability tests for Fourier series. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **18**, 113—120 (1943).

On the analogy of the known scale of theorems connecting the order of mean continuity of a function at a point with the order of Cesàro summability of its Fourier series at that point, the author associates a class of continuity conditions on  $f$  with the summability of its Fourier series by  $(N, k)$  means. As a byproduct he again gets a slightly modified version of the Hardy-Littlewood test.

*K. Chandrasekharan.*

Menchoff, D.: Sur la convergence uniforme des séries de Fourier. Mat. Sbornik, n. Ser. **11** (53), 67—96 (1942) (mit russischer Zusammenfassg.).

Menchoff, D.: Sur la convergence uniforme des séries de Fourier. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **32**, 245—246 (1941).

Siehe Menšov, dies. Zbl. **39**, 292, Ergebnis (2).

*K. Zeller.*

Menchoff, D.: Sur les séries trigonométriques universelles. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **49**, 79—82 (1945).

Siehe Menšov, dies. Zbl. **39**, 292, Ergebnis (3).

*K. Zeller.*

Singh, A. N.: On divergent Fourier's sine series. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. **5**, 41—44 (1943).

A continuous function is given whose Fourier sine series diverges on a set of the second category.

*K. Chandrasekharan.*

Sinha, S. D.: On the points of convergence of Singh's example. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. **7**, 35—50 (1945).

The Fourier series of a continuous function defined by A. N. Singh (this Zbl. **13**, 301) is shown to converge on certain everywhere dense sets. *K. Chandrasekharan.*

Straiton, A. W.: An application of Fejér summability. Nat. Math. Mag. **18**, 106—107 (1943).

Moursund, A. F.: Non-summability of the conjugate series of the Fourier series. Duke math. J. **12**, 515—518 (1945).

Ist  $\int_0^t |f(x_0 + u) - f(x_0 - u)| du = O(t)$ , so ist die konjugierte Reihe der Fourierreihe von  $f(x)$  genau dann im Punkte  $x_0$  Riesz-summierbar zum Wert  $+\infty$ , wenn die konjugierte Funktion (definiert mittels eines Cauchy-Integrals) in  $x_0$  den Wert  $+\infty$  hat. Literatur: Hardy-Littlewood (dies. Zbl. **3**, 112), Prasad (dies. Zbl. **5**, 249).

*K. Zeller.*

Minakshisundaram, S.: A note on the theory of Fourier series. Proc. nat. Inst. Sci. India **10**, 205—215 (1944).

This contains generalizations of a theorem of A. Zygmund [Bull. internat. Acad. Polonaise Sci., Sér. A **1925**, 207—217 (1926)] and of O. Szász (this Zbl. **19**, 15) on the determination of the jump of a function by its Fourier coefficients.

*K. Chandrasekharan.*

(1) Salem, R. and A. Zygmund: The approximation by partial sums of Fourier series. Trans. Amer. math. Soc. **59**, 14—22 (1946).

(2) Salem, R. and A. Zygmund: Capacity of sets and Fourier series. Trans. Amer. math. Soc. **59**, 23—41 (1946).

(1) Let  $f(x)$  denote any continuous function of period  $2\pi$  and  $s_n(x)$  the  $n$ th partial sum of its Fourier series. It is well known that if  $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , then there is a constant  $M$  such that  $|s_n(x) - f(x)| < M n^{-\alpha} \ln n$ , for all  $x$  and  $n$ , and the factor  $\ln n$  cannot be omitted [A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935 (this Zbl. **11**, 17), p. 61]. Among others the following theorems are proved. I. If  $f(x)$  is continuous, if  $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , and there is a constant  $C$  such that  $f(x) \div Cx$  is monotone, then there is a constant  $M$  such that  $|s_n(x) - f(x)| < M n^{-\alpha}$  for all  $x$  and  $n$ . This conclusion is no longer true if the condition that



$f(x) + Cx$  is monotone is replaced by  $f(x)$  to be of bounded variation. II. If  $f(x)$  is continuous and  $|s_n(x) - f(x)| < M n^{-\alpha}$  for some  $\alpha$  and all  $x$  and  $n$ , then also  $|\bar{s}_x(x) - \bar{f}(x)| < N n^{-\alpha}$  for some constant  $N$  and, for all  $x$  and  $n$ , where  $\bar{f}$  is the conjugate of  $f(x)$  and  $\bar{s}_n(x)$  the  $n^{\text{th}}$  partial sum of its Fourier series. — (2) According to O. Frostman [Potential d'équilibre et capacité des ensembles. 1935 (this Zbl. 13, 63), p. 86] a set  $E$  of points  $x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ , is said to have positive  $\alpha$ -capacity if there exists a monotone non decreasing distribution  $M(t)$  concentrated on  $E$  such that  $\int_E d\mu = 1$ , and  $\int_E |e^{it} - r e^{ix}|^{-\alpha} d\mu(t)$  is uniformly

bounded in  $x$  as  $r \rightarrow 1-$ . A set of positive  $\alpha$ -capacity has a positive Hausdorff measure of order  $\alpha$ . A closed set of positive Hausdorff measure of order  $\alpha$  has positive  $(\alpha - \varepsilon)$ -capacity for every  $\varepsilon > 0$ . Thus a set  $E$  having  $\alpha$ -capacity zero has the property that each closed subset of  $E$  has zero Hausdorff measure of order  $\alpha + \varepsilon$  for every  $\varepsilon > 0$ . Among others the following theorems are proved in the present paper. I. If a Fourier series  $S$  is such that  $\sum n^2(a_n^2 - b_n^2) < +\infty$ ,  $0 < \alpha < 1$ , then the set  $E$  of the points of divergence of  $S$  is of  $(1 - \alpha)$ -capacity zero. The theorem holds for  $\alpha = 1$  if the conclusion is that the logarithmic capacity of  $E$  is zero, and this last result had been proved by A. Beurling [Acta Math. 72, 1—13 (1940); this Zbl. 23, 142]. II. Let  $F(x) \in \text{Lip } \alpha$  and non decreasing in  $[0, 2\pi]$ .

$0 < \alpha < 1$ . Then the points  $x$  at which the Dini integral  $\int_0^\pi [F(x+t) - F(x-t)] t^{1-\alpha} dt$  is infinite form a set of  $\alpha$ -capacity zero. The result holds for  $\alpha = 0$ , the integral being in this case finite except in a set of logarithmic capacity zero. L. Cesari.

{ Salem, R.: On a theorem of Zygmund. Duke math. J. 10, 23—31 (1943).  
Salem, R.: A singularity of the Fourier series of continuous functions. Duke math. J. 10, 711—716 (1943).

By a result of A. Zygmund [J. London math. Soc. 3, 194—196 (1928)] it is known that if  $f(x)$  is periodic of period  $2\pi$ , continuous and of bounded variation in  $[0, 2\pi]$ , if  $\omega(\delta)$ ,  $\delta > 0$ , is the modulus of continuity of  $f(x)$  in  $[0, 2\pi]$ , and  $\sum \omega(1/n)^{1/2} n^{-1} < +\infty$ , then the Fourier series of  $f(x)$  converges absolutely. The author proves in the first paper that the exponent  $1/2$  above cannot be replaced by any number  $\alpha > 1/2$ . In the second paper the author shows that there is a continuous function  $f(x)$  whose Fourier series converges uniformly in  $(-\infty, +\infty)$  while the Fourier series of  $f^2(x)$  diverges in a set of points  $x$  everywhere dense in  $[0, 2\pi]$  and of the power of the continuum. L. Cesari.

{ Salem, R.: On sets of multiplicity for trigonometrical series. Amer. J. Math. 64, 531—538 (1942).

{ Salem, R.: Sets of uniqueness and sets of multiplicity. I. II. Trans. Amer. math. Soc. 54, 218—228 (1943); 56, 32—49 (1944).

{ Salem, R.: Rectifications to the papers: Sets of uniqueness and sets of multiplicity. I and II. Trans. Amer. math. Soc. 63, 595—598 (1948).

{ Salem, R.: On singular monotonic functions of the Cantor type. J. Math. Physics 21, 69—82 (1942).

Let  $I$  denote the interval  $I = [0, 2\pi]$  and let us divide  $I$  into three parts of lengths proportional respectively to the numbers  $\xi_1, 1 - 2\xi_1, \xi_1$ , with  $0 < \xi_1 < 2^{-1}$ . Let us remove the interior of the central part, and let us divide each of the remaining parts into three parts of lengths proportional to  $\xi_2, 1 - 2\xi_2, \xi_2$ , with  $0 < \xi_2 < 2^{-1}$ . Let us remove the interior of the central parts, and proceed in this way indefinitely. What remains in  $I$  is a perfect non dense set  $P$  of measure zero. Let us now restrict the sequence of the numbers  $\xi_k$  as follows. Let  $\omega(k)$  be any function of the integer  $k$  with  $\log \omega(k) = o(k)$  and let us suppose that

$a_k \leq \xi_k \leq b_k$  where  $b_k - a_k \geq 1/\omega(k)$ , and  $\lim (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k} = \alpha > 0$  as  $k \rightarrow +\infty$ , for some  $\alpha > 0$ . We shall denote by  $\{P\}$  the family of all sets  $P$  obtained by means of the Cantor like process described above and with the restriction just mentioned. The main result of the first paper is that almost all sets  $P$  of the family  $\{P\}$  have the following property concerning trigonometric series (sets of multiplicity): There exists a non-decreasing function  $F(x)$  constant in the intervals adjacent  $P$  and having Fourier-Stieltjes coefficients  $c_n$  with  $c_n = o(n^{-\delta})$ ,  $\delta > 0$ , (and thus  $c_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ ). The existence of functions  $F(x)$  having this property had been discovered by J. E. Littlewood, (this Zbl. 15, 64). By almost all sets  $P$  of  $\{P\}$  the following shall be understood. Let  $\xi_k = a_k + (b_k - a_k)\eta_k$ , where  $0 \leq \eta_k \leq 1$ , and if  $t = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$  is the infinite dyadic development of  $t$ , let  $\eta_1(t) = 0, \alpha_1 \alpha_3 \alpha_6 \alpha_{10} \dots$ ,  $\eta_2(t) = 0, \alpha_2 \alpha_5 \alpha_9 \alpha_{14} \dots$ ,  $\eta_3(t) = 0, \alpha_4 \alpha_8 \alpha_{13} \alpha_{19} \dots$ . Thus a correspondence is established between the sets  $P$  of  $\{P\}$  and the numbers  $0 < t < 1$ . By almost all  $P$  we mean that the corresponding numbers  $t$  form a set of measure 1. [For this last definition see S. Kaczmarz and H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen* (this Zbl. 13, 9).] In the second paper the author considers the process above for the construction of sets  $P$  when  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi$ ,  $\Theta = 1/\xi > 2$ . In the case that  $\Theta$  is a rational number, N. Bary (this Zbl. 18, 18) has proved that  $P$  is a set of unicity if and only if  $\Theta$  is an integer [see also R. Kershner, this Zbl. 13, 300]. In particular Cantor's set ( $\Theta = 3$ ) is a set of uniqueness [A. Rajchman, *Fundamenta Math.* 3, 287–302 (1922)]. Let us now denote by  $S$  the class of all algebraic integers  $\Theta > 2$  whose conjugate have all modulus  $< 1$ . The author discusses the general case ( $\Theta$  real) and proves that if  $\Theta$  is not an element of  $S$  then  $P$  is a set of multiplicity. A stronger statement was rectified in the fourth paper. Pertinent reference: C. Pisot, this Zbl. 19, 155; T. Vijayaraghavan, this Zbl. 28, 113. In the third paper the following non symmetrical process is considered. Let us take  $d+1$  "white" subintervals of  $I = [a, b]$  each of length  $L\xi$ ,  $0 < \xi < 1/(d+1)$ , where  $L = b - a$  and the end points of  $I$  are end points of white intervals. Let us remove the "black" intervals, and let us repeat the operation above on the white intervals, and so on indefinitely. What remains in  $I$  is a perfect non dense set  $P$  of measure zero. Let us denote by  $L\alpha_0, L\alpha_1, \dots, L\alpha_d$ , the distances from  $a$  of the first end points of the white intervals. Then the author proves that if  $P$  is a set of unicity then we have (a)  $\Theta = 1/\xi$  is an algebraic integer of the class  $S$ ; (b)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$  are algebraic numbers of the field  $K(\Theta)$ . A stronger statement was rectified in the fourth paper. In the fifth paper a function  $F(x)$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ , is said to be of the type  $C$  (of the Cantor type) if  $F(x)$  is non decreasing in  $[0, 2\pi]$  and is constant in every interval contiguous to a perfect set  $P$  of measure zero in  $[0, 2\pi]$ . J. E. Littlewood l. c. proved that there are functions  $F(x)$  of the type  $C$  such that

their Fourier-Stieltjes series have coefficients  $c_n = \int_0^{2\pi} \exp(inx) dF$  with  $(1) c_n = O(n^{-\alpha})$

for some  $\alpha > 0$ . N. Wiener and A. Wintner (this Zbl. 19, 169; 22, 355) proved that there are functions  $F(x)$  satisfying (1) with  $\alpha = 1/2 - \varepsilon$  for every  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1/2$ . The author proves that the latter occurs with functions  $F(x)$  of the type  $C$ . From here it follows that there exist trigonometric series converging to zero almost everywhere but not everywhere having coefficients which are  $O(n^{-1/2+\varepsilon})$ . The author proves also that a set of uniqueness may be transformed onto a set of multiplicity by a transformation of the type  $y = ax^2 + bx + c$  [The invariance of the sets of uniqueness with respect to linear transformations had been proved by J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, see this Zbl. 18, 18].

L. Cesari.

Salem, R.: On trigonometrical series whose coefficients do not tend to zero. Bull. Amer. math. Soc. 47, 899—901 (1941).

Let (1)  $\sum c_n \cos(n x - \alpha_n)$  be any trigonometric series such that  $c_n > 0$ ,  $\lim c_n > 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ . Then the set  $E$  where (1) is convergent is of measure zero and Rajchman has proved that  $E$  is also the countable sum of closed sets of measure zero. The sets  $E$  where a series (1) is convergent are said of the type  $R$ . The author proves that for every perfect set  $P$  of the type  $R$  and for every function  $F(x)$  bounded monotone non-decreasing, constant in every interval contiguous to  $P$ , there is a particular sequence  $[n_k]$  of integers  $n_k$  such that  $\lim \int_0^{2\pi} \cos 2n_k x dF = F(2\pi) - F(0)$ . By another result of R. Salem (this Zbl. 25, 316) it is known that if a perfect set  $P$  is the set of points of absolute convergence of a non absolutely convergent trigonometrical series then ( $|P| = 0$  and)  $\overline{\lim} \int_0^{2\pi} \cos 2n_k x dF = F(2\pi) - F(0)$ . Thus a connection between the two types of sets is established. Various consequences are deduced. *L. Cesari.*

Salem, R.: Sur les transformations des séries de Fourier. Fundamenta Math. 33, 108—114 (1939).

Let  $f(x)$  be any function periodic of period  $2\pi$ ,  $L$ -integrable in  $[0, 2\pi]$ , and let (1)  $2^{-1}a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  be the Fourier series of  $f(x)$ . Let  $[m_n]$  denote any concave non-decreasing sequence of positive numbers  $m_n$  approaching  $+\infty$  as  $n \rightarrow +\infty$ , and let us consider the following trigonometrical series (2)  $2^{-1}a_0 m_0 + \sum m_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ . The following theorems are proved. I. If  $f(x)$  is continuous, then there is some sequence  $m_n$  as above such that (2) is the Fourier series of a continuous function  $F(x)$ . II. If  $f(x)$  is supposed to be only  $L$ -integrable in  $[0, 2\pi]$  then there is some sequence  $m_n$  as above such that (2) is the Fourier series of a function  $F(x)$   $L$ -integrable in  $[0, 2\pi]$ . By a theorem of A. Zygmund (this Zbl. 11, 17) it is known that no analogous result holds for bounded functions. *L. Cesari.*

Zygmund, A.: On the theorem of Fejér-Riesz. Bull. Amer. math. Soc. 52, 310—318 (1946).

If (1)  $f(z) = \sum a_n z^n$  is regular in  $|z| \leq 1$ , if  $C$  is the circumference  $|z| = 1$ , then for every diameter  $D$  of  $C$  we have  $(D) \int |f(z)| |dz| \leq 2^{-1}(C) \int |f(z)| |dz|$  [L. Fejér and F. Riesz, Math. Z. 11, 305—314 (1921)]. From here it follows that if  $u(z), v(z)$  are harmonic conjugate functions continuous in  $|z| \leq 1$  and  $v(0) = 0$ , thus (2)  $u(z) = 2^{-1}a_0 + \sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \varrho^n$ , (3)  $v(z) = \sum (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \varrho^n$ , then  $(D) \int |v(z)| |dz| \leq 2^{-1}(C) \int |u(z)| |dz|$ . Let  $s_n(z), r_n(z)$  be the  $n^{\text{th}}$  partial sums of series (1) and (3). The author proves the following complements to the above results: (i)  $(D) \int |r_n(z)| |dz| \leq 2\pi^{-1}(C) \int |u(z)| |dz|$ ; (ii)  $(D) \int |s_n(z)| |dz| \leq 2\pi^{-1}(C) \int |f(z)| |dz|$  for every diameter  $D$  and every  $n = 1, 2, \dots$ . The constant  $2\pi^{-1}$  is the best possible. *L. Cesari.*

Zygmund, A.: The approximation of functions by typical means of their Fourier series. Duke math. J. 12, 695—704 (1945).

Let  $f(x)$  be a periodic continuous function, and let (1)  $f(x) \sim 2^{-1}a_0 + \sum (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$  be its Fourier series. Let  $\|\lambda_{mn}\|$ , ( $1 \leq n \leq n_m, m = 1, 2, \dots$ ), be any matrix of numbers, each row having a finite number of elements, and let  $F_m(x) = 2^{-1}a_0 \lambda_{m0} + \sum (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \lambda_{m\nu}$  where  $\Sigma$  ranges over  $1 \leq \nu \leq n_m$ ,  $\Delta_m = \max |f(x) - F_m(x)|$  for all  $x$ . Then the behavior of  $\Delta_m$  as  $m \rightarrow \infty$  reflects the approximation of  $f(x)$  which can be obtained by the method of summation defined by  $\|\lambda_{mn}\|$ . If  $F_m$  are the  $(C, 1)$  means of (1) then  $\Delta_m \rightarrow 0$



as  $m \rightarrow \infty$ , but not too rapidly. Indeed if  $A_m = o(1/m)$  then  $f(x)$  is a constant, as the author proves by means of a very simple remark which can be applied with analogous conclusions to Cesàro, Fejér, Rogosinski methods of summation. If  $F_m(x) = 2^{-1} a_0 + \sum (a_r \cos rx + b_r \sin rx) (1 - r^k/\omega^k)$ , where  $\sum$  ranges over  $1 \leq r \leq \omega$ , and  $k, \omega$  are integers, then the following theorem holds. If the derivative  $f^{(h)}(x)$  exists for some  $h \geq k$ , then  $A_m = MA n^{-k}$ , provided  $k$  is even and  $h \geq k$ , or  $k$  is odd and  $h < k$ , and  $A_m = MB n^{-k} \ln(n+2)$  provided  $k$  is odd and  $h = k$ . Other results are given under suitable conditions for  $f^{(h)}(x)$ . — *L. Cesari*.

**Zygmund, A.:** Complex methods in the theory of Fourier series. Bull. Amer. math. Soc. **49**, 805—822 (1943).

The present paper is an address dealing with the interrelations between complex and real methods in the theory of Fourier series as it developed in the last 25 years. It is important since it unifies many different papers apparently unrelated. The following maintrends are discussed. I. The method of the classes  $H^p$ . Let  $\Phi(z) = \sum c_n z^n$  be any function regular for  $|z| < 1$ . We shall denote by  $H^p$ ,

$p > 0$ , the class of all  $\Phi$  such that the integral  $\int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\theta})|^p d\theta$  is bounded in  $0 \leq r < 1$ . If  $p = 2$ , then  $\Phi \in H^2$  if and only if  $\sum |c_n|^2 < +\infty$ , and the properties of the class  $H^2$  are well known. If  $\Phi(z)$  has no zero in  $|z| < 1$  then the function  $\Psi(z)$  defined by  $[\Phi(z)]^p = [\Psi(z)]^2$  is regular in  $|z| < 1$  and  $\Phi \in H^p$  if and only if  $\Psi \in H^2$ . If  $\Phi \in H^p$  and  $\Phi$  has zeros in  $|z| < 1$ , then by complex methods it can be proved that  $\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2$  where  $\Phi_1, \Phi_2 \in H^p$  and have no zeros in  $|z| < 1$  [F. Riesz, Math. Z. **18**, 88—95 (1922)]. Thus in any case we can deduce properties of the functions  $\Phi \in H^p$  from those well known of the functions  $\Psi \in H^2$ . Here some of the results which have been obtained by this method: (i) If  $\Phi(z) \in H^p$  then  $\Phi(z)$  has a non tangential limit, say  $\Phi(e^{i\theta})$ , at almost every point  $z_0 = e^{i\theta}$  and  $\Phi(e^{i\theta}) \in L^p$ ; (ii) if  $\Phi(z)$  is regular in  $|z| < 1$ , continuous in  $|z| \leq 1$ , and  $\Phi(e^{i\theta})$  is of bounded variation in  $[0, 2\pi]$ , then  $\Phi(e^{i\theta})$  is absolutely continuous [F. and M. Riesz, 4. Congr. Math. scandinav. 1916, 27—44]; (iii) if  $\Phi(z) \in H^p$  and

$\Phi = u + iv$ , then the two integrals  $\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta$ ,  $\int_0^{2\pi} |v(re^{i\theta})|^p d\theta$  are simultaneously bounded or unbounded in  $0 \leq r < 1$  [M. Riesz, Math. Z. **27**, 218—244 (1927)]; (iv) if  $f(\theta) \in L^p$ , then the conjugate  $\bar{f}(\theta)$  exists almost everywhere, and  $\bar{f}(\theta) \in L^p$ . II. The method of conformal representation. Given a simple Jordan

region  $D$  whose boundary curve  $\Gamma$  is rectifiable, let  $\Phi(z)$  be any function regular in the circle  $D = \{z : |z| < 1\}$  and continuous in  $D + C$  where  $C = \{z : |z| = 1\}$ , performing the conformal representation  $R$  of  $D \rightarrow C$  onto  $1 \rightarrow I$ . By (ii) above  $\Phi(e^{i\theta})$  is absolutely continuous, and thus  $\Phi$  maps sets of measure zero of  $C$  onto sets of measure zero of  $I$  and, as it can be proved, also the viceversa holds. The consideration of  $\Phi(z)$ , of convenient subsets  $\Omega$  of  $C$ , and of the integral  $(\Omega) \int |\Phi'(z)|^2 dz$  has given rise to a method, initiated by V. V. Golubeff [Moskva, Zapiski Univ. **29** (1916)] of which here are some basic results: (i)  $R$  is conformal at almost every point  $z_0 \in C$  [I. Privaloff, Cauchy's Integral, Saratoff 1919, p. 1—94]; (ii) if  $\Phi = u + iv$ , if  $u$  has a non tangential limit at the points  $z$  of a set  $E \subset C$ , then  $v$  has the same property almost everywhere in  $E$  [I. Privaloff, Mat. Sbornik **31**, 232—235 (1923)]; (iii) if a Fourier series is convergent in a set  $E$ , then its conjugate series is convergent almost everywhere in  $E$  (B. Kuttner, this Zbl. **11**, 255). III. The method of Littlewood and Paley. It is based on the consideration of functions  $\Phi(z)$  regular in  $|z| < 1$  and on the consideration of the

integral  $g(\theta) = \left[ \int_0^1 (1-r) |\Phi'(re^{i\theta})|^2 dr \right]^{1/2}$ . Here are some of the results: (i) If  $\{u_k\}$

is any sequence of integers  $n_k$  such that  $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$ , then for every  $f(\theta) \in L^p$ ,  $p > 1$ , the sequence  $[S_{n_k}(\theta)]$  of partial sums of the Fourier series of  $f(\theta)$  converges to  $f(\theta)$  almost everywhere (A. C. Paley and J. E. Littlewood, this Zbl. 2, 188; 15, 254; 16, 301; (ii) if  $f(\theta) \in L^p$ ,  $p > 1$ , then  $\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) (\log n)^{-1/p}$  converges almost everywhere. For  $p = 2$  the result had been proved by A. Kolmogoroff and G. Seliverstoff [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. 3, 307—310 (1926)]. *L. Cesari.*

**Chandrasekharan, K.: On multiple Fourier series.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 24, 229—232 (1946).

Announcement of results on the spherical summability of multiple Fourier series at a given point, published subsequently (this Zbl. 41, 336).

*K. Chandrasekharan.*

**Chandrasekharan, K.: On the summation of multiple Fourier series. III.** Bull. Amer. math. Soc. 52, 474—477 (1946).

Let  $f(x_1, \dots, x_k) \in L^1$ , and  $\sum a_{n_1 \dots n_k} \exp\{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)\}$  be its Fourier series. Then the condition  $\sum (n_1^2 + \dots + n_k^2)^{k/2} |a_{n_1 \dots n_k}|^2 < \infty$ , implies that the sequence of spherical partial sums of the Fourier series of  $f$  converges at every point of continuity of  $f$ , and the condition  $\sum (n_1^2 + \dots + n_k^2)^{k/2+\epsilon} |a_{n_1 \dots n_k}|^2 < \infty$  implies absolute convergence.

*K. Chandrasekharan.*

**Minakshisundaram, S.: Notes on Fourier expansion. I.** J. London math. Soc. 20, 148—153 (1945).

This contains results similar to the above, for  $f \in L^2$ , and its expansion in terms of the eigenfunctions of the boundary-value problem  $\Delta u + \lambda u = 0$ , for a bounded domain in  $k$ -space, with the condition that  $u$  vanish on the boundary which is supposed to be sufficiently regular. The eigenvalues  $\{\lambda_n\}$  reduce to  $\{n_1^2 + \dots + n_k^2\}$  and the eigenfunctions  $\{\omega_n(x)\}$  reduce to  $\{\sin(n_1 x_1) \dots \sin(n_k x_k)\}$ , if  $D$  is a hypercube.

*K. Chandrasekharan.*

**Cesari, L.: Sulle serie doppie di Fourier.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 1173—1175 (1946).

A result of G. Grünwald (this Zbl. 26, 13) is restated as follows: the sequence of triangular partial sums of the Fourier series of  $f(x, y)$  is summable  $(C, 1)$  almost everywhere.

*K. Chandrasekharan.*

**Čelidze, V. G.: On the absolute convergence of double Fourier series.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 54, 117—120 (1946).

The author extends to (rectangular) double Fourier series the theorem of S. Bernstein that the simple Fourier series of a function belonging to  $\text{Lip } \alpha$ ,  $\alpha > \frac{1}{2}$ , converges absolutely.

*K. Chandrasekharan.*

**Čelidze, V. G.: Die Abel-Poissonsche Methode zur Summierung doppelter Fourier-Reihen.** Trudy Tbilissk. mat. Inst. 13, 79—99 (1944) [Russisch mit georgischer Zusammenfassg.].

This is a duplication of a result of Marcinkiewicz and Zygmund (this Zbl. 22, 18) that the (rectangular) Fourier series of a function  $f(x, y) \in L^1$  is summable by Abel's method almost everywhere.

*K. Chandrasekharan.*

**Mitchell, Josephine: On double Sturm-Liouville series.** Amer. J. Math. 65, 616—636 (1943).

If  $f(x, y) \in L^1$  in  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ , the double Sturm-Liouville series of  $f$ , relative to a double orthonormal system of Sturm-Liouville functions, is equisummable  $(C, 1, 1)$  with the double Fourier cosine series at almost all points  $(x, y)$ , both series being summed over rectangles. If  $f(x, y)$  is of bounded variation in the sense of Tonelli, then the series are equiconvergent. Equisumma-

bility theorems by a modified Poisson method are also given. It is also shown that if  $f(x, y) \log^+ |f(x, y)| \in L^1$ , then the Sturm-Liouville series of  $f$  is  $(C, 1, 1)$  summable to  $f$  almost everywhere.

*K. Chandrasekharan.*

(1) Herriot, John G.: Nörlund summability of double Fourier series. Trans. Amer. math. Soc. **52**, 72—94 (1942).

(2) Herriot, John G.: Nörlund summability of multiple Fourier series. Duke math. J. **11**, 735—754 (1944).

(1) Let  $S_{m,n}(x, y)$  denote the rectangular partial sums of the double Fourier series of  $f(x, y) \in L^1$  in  $0 < x < 2\pi$ ,  $0 < y < 2\pi$ . It is shown that the sequence  $S_{k,k}(x, y)$  is summable by certain regular Nörlund means almost everywhere, from which it follows, in particular, that  $S_{k,k}(x, y)$  is summable  $(C, \alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , to  $f(x, y)$  almost everywhere, a result proved by G. Grünwald with  $\alpha = 1$  (see this Zbl. **24**, 310). For such means the author considers the problem of localization, and proves, in particular, that if  $f$  vanishes in a neighbourhood of a point, then at that point the sequence  $S_{n,n}$  is summable  $(C, \alpha)$ , for  $\alpha \geq 1$ , and that the index  $\alpha = 1$  cannot be further lowered. He then extends the above results to summability by double Nörlund means, obtaining, in particular, the corresponding results on  $(C, \alpha, \beta)$  means. In (2) extension to triangular partial sums. Next it is shown that in the case of Fourier series in three or more variables, whether one considers cubical or triangular partial sums, the localization property is not valid even for Abel's method.

*K. Chandrasekharan.*

Lepecki, Zbigniew: Einige Sätze über trigonometrische Doppelreihen. Fac. Filos. Ci. Let. Paraná. Anuário. 1940—1941, 159—187 (1942) [Portugiesisch].

Using the method of formal multiplication due to Rajchman and Zygmund, the author extends to double trigonometric series the theorems of Riemann on localization.

*K. Chandrasekharan.*

Reves, George E. and Otto Szász: Some theorems on double trigonometric series. Duke math. J. **9**, 693—705 (1942).

The paper generalizes to two variables the Cantor-Lebesgue theorem (A. Zygmund, this Zbl. **11**, 17, p. 267), the Lusin-Denjoy theorem (p. 135, l. c.), and a theorem of O. Szász (p. 137, l. c.) on the exponent of convergence of a Fourier series.

*K. Chandrasekharan.*

Hedge, L. B.: Transformations of multiple Fourier series. Bull. Amer. math. Soc. **49**, 262—269 (1943).

The author extends from one to several variables some of the known theorems on sequences of factors which transform Fourier series of one class into those of another class.

*K. Chandrasekharan.*

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

Kesava Menon, P.: A generalisation of the circular and hyperbolic functions. Math. Student **8**, 112—117 (1940).

Robbins, Herbert E.: Two properties of the function  $\cos x$ . Bull. Amer. math. Soc. **50**, 750—752 (1944).

Nachweis dafür, daß die stetige,  $2\pi$ -periodische Funktion  $f(x)$  eine Cosinus-Funktion ist, wenn sie der Funktionalgleichung  $f(x + 1) + f(x) = a f(x + b)$  genügen soll. Analoges gilt, wenn  $f'(x) = \alpha f(x + \beta)$  sein soll.

*O. Volk.*

Victoris, L.: Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichungen. J. reine angew. Math. **186**, 1—15 (1944).

Die Funktionalgleichungen, die mit den trigonometrischen Funktionen zusammenhängen, werden auf die einzige  $A(x + y) = A(x)A(y)$ ,  $A(x) = e^{u(x) + i q(x)}$ , zurückgeführt, wo  $u$  reelle Funktionen der reellen Veränderlichen  $x$  sind und den beiden Gleichungen genügen  $u(x + y) = u(x) + u(y)$ ,  $q(x + y) = q(x) + q(y) \pmod{2\pi}$ . Anwendung der Hamelschen Basen.

*O. Volk.*



**Poli, Louis:** Sinus d'ordre  $n$  et fonction  $v(x)$ . C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 580—581 (1946).

Als  $\sin n$ -ter Ordnung von  $x$  wird der Ausdruck  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{kn-a}}{\Gamma(kn-a+1)} = S(x; a, n)$  eingeführt und nach  $a$  oder  $n$  bestimmt integriert. Die integrierte Funktion zerfällt dann in Summanden der Gestalt  $\int_n^{\infty} \frac{x^s ds}{\Gamma(1+s)} [= v(x, n); \quad v(x, 0) = v(x)]$ . W. Maier.

**Birch, R. H.:** An algorithm for the construction of arctangent relations. J. London math. Soc. **21**, 173—174 (1946).

Eine Taylorreihe läßt sich leichter berechnen, wenn der Wert der Variablen eine Zehnerpotenz ist. Andererseits liefert die komplexe Multiplikation ein Mittel, um für  $\operatorname{arctg} x$  eine Zerlegung dieser Art zu erhalten. Aus  $(a + bi) = (c + di)(a + bi)(c - di)/(c^2 + d^2)$  folgt  $\arg(a + bi) = \arg(c + di) + \arg(a + bi)(c - di)$  und so durch Iteration, ausgehend von  $a = b = 1, \quad d = 1, \quad c = 10^k$ :  $\arg(1 + i) = \arg(10 + i) + \arg(11 + 9i) = 2\arg(10 + i) + \arg(119 + 79i)$ . Fortführung dieses Prozesses liefert  $\pi/4 = 8\operatorname{arctg} 0,1 - \operatorname{arctg} 0,01 - 2\operatorname{arctg} 0,001 + \operatorname{arctg} \varepsilon$ , wo  $\varepsilon = 71\,539\,135\,677/147\,171\,135\,394\,871\,81$ . Die Annäherung  $\operatorname{arctg} \varepsilon = \varepsilon$  liefert dann einen Wert für  $\pi/4$  auf 13 Stellen genau. E. M. Bruins.

**Trost, Ernst:** Eine anschauliche Herleitung der Stirlingschen Formel. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, 138—140. Zürich: Füssli 1945. Geometrische Methoden verknüpft mit Betragsschätzung für  $\ln[(1+x)(1-x)]$  und  $x \rightarrow 0$ . W. Maier.

**Rutgers, J. G.:** Some identities. Nederl. Akad. Wet., Verslag. Afd. Natuurk. **52**, 163—167 (1943) [Holländisch mit deutscher, engl. und französ. Zusammenfassg.]. Elementare Verknüpfungen für Eulers  $B$ - und  $\Gamma$ -Funktionen. W. Maier.

**van Veen, S. C.:** Über vollständige elliptische Integrale, die durch  $\Gamma$ -Funktionen ausgedrückt werden. Mathematica, Zutphen, B **12**, 69—75 (1943).

Untersuchung der Fälle, in denen Quotienten von  $\Gamma$ -Funktionen zur Darstellung vollständiger elliptischer Integrale 1. Art ausreichen. W. Maier.

**Parodi, Maurice:** Sur une relation satisfaite par la fonction  $\Gamma$ . Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. **60**, 200—201 (1946).

Trivial; entsteht durch Druckfehler.

W. Maier.

**Bancroft, T. A.:** Note on an identity in the incomplete beta function. Ann. math. Statistics **16**, 98—99 (1945).

Die „unvollständigen“ Eulerschen Funktionen  $B_x(p, q)$  sind linear abhängig von ihren benachbarten  $B_x(p - h, q + k)$  mit  $h, k \equiv 0(1)$ . W. Maier.

**Kesava, Menon, P.:** Some inequalities involving the  $\Gamma$ - and  $\zeta$ -functions. Math. Student **11**, 10—12 (1943).

Elementare Ungleichungen.

W. Maier.

**Bordoni, Piero Giorgio:** Sulle funzioni di Stokes. Ricerca sci., Roma **15**, 149—151 (1945).

Kurze Behandlung der Stokeschen Polynome unter Zugrundelegung von Rekursionssystemen; Beziehungen zu den Besselfunktionen. Ö. Volk.

**Krall, H. L.:** On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation. Pennsylvania State College Studies, Nr. 6, 24 p. (1940).

**Steffensen, J. F.:** On the polynomials  $R_v^{[\lambda]}(x)$ ,  $N_v^{[\lambda]}(x)$  and  $M_v^{[\lambda]}(x)$ . Acta math. **78**, 291—314 (1946).

**Sheffer, I. M.:** Note on Appell polynomials. Bull. Amer. math. Soc. **51**, 739—744 (1945).

**Thorne, C. J.:** A property of Appell sets. Amer. math. Monthly **52**, 191—193 (1945).

Ableitung zahlreicher Formeln für die Polynome  $R_v^{(\lambda)}(x)$ ,  $N_v^{(\lambda)}(x)$ ,  $M_v^{(\lambda)}(x)$ , welche eine Erweiterung der vom Verf. eingeführten „Poweroids“ (dies. Zbl. 26, 208) bedeuten und als Spezialfälle die Appellschen Polynome und die Polynome „vom Typus 0“ von Sheffer (dies. Zbl. 22, 15) enthalten. Sheffer gibt für diese Polynome Integraldarstellungen. Thorne gibt eine notwendige und hinreichende (Integral-)Bedingung dafür, daß die Polynome  $\Phi_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Appellsche Polynome ( $\Phi'_n(x) = \Phi_{n-1}(x)$ ) sind. O. Volk.

Gaspar, Fernando L.: Über eine Eigenschaft reeller Zahlen. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. 6, 329—340 (1946) [Spanisch].

Es seien  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) beliebige Zahlen. Gaspar konstruiert dazu Polynome, die in den Punkten  $a_i$  orthogonal sind (Darstellung durch Determinanten), und dehnt die Resultate auf Systeme von Polynomen mit 2 bzw.  $n$  Veränderlichen aus. O. Volk.

● Parodi, Maurice: Application des polynomes électrosphériques à l'étude des systèmes oscillantes à un grand nombre de liberté. Mém. Sci. phys. Nr. 47, 82 p. (1944).

Behandlung der von E. Lucas [Théorie des nombres. I. Paris (1891)] eingeführten Polynome  $U_n$ ,  $V_n$ , die die elektrosphärischen Polynome, welche mit den Tschebyscheffschen Polynomen der zweiten Art eng zusammenhängen, als Spezialfall enthalten. Zahlreiche Anwendungen. O. Volk.

Ionesco, D. V.: Relations entre polynomes définis par certaines relations de récurrence. Mathematica Timișoara 22, 102—108 (1946).

Es handelt sich um die Polynome  $U_n(x) = C_n^1(x/2) - C_{n-2}^1(x/2)$ ,  $n \geq 2$ ,  $U_1 = x$ , [ $C_n^1(x/2)$  Gegenbauersche Polynome], die der Rekursionsformel  $U_{n+1} = x U_n - U_{n-1}$  und der Differentialgleichung  $(x^2 - 4) U_n'' + x U_n' - n^2 U_n = 0$  genügen. O. Volk.

Koulik, S.: Fonctions génératrices de quelques polynomes orthogonaux. Mat. Sbornik, n. Ser. 12 (54), 320—334 (1943) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Verf. gibt erzeugende Funktionen für die Polynome von Krawtchouk (vgl. G. Szegő, dies. Zbl. 23, 215) und für Polynome, die in  $(-\infty, +\infty)$  orthogonal sind bezüglich einer Funktion  $da(x)$ , wo  $a(x)$  in  $x = 0, 1, \dots, n$  sprunghaft sich ändert, in den einzelnen Intervallen aber konstant ist. O. Volk.

Brenke, W. C.: On generating functions of polynomial systems. Amer. math. Monthly 52, 297—301 (1945).

Verf. befaßt sich mit Polynomreihen  $\{Y_n\}$  der Erzeugung:  $e^t f(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x) t^n / n!$ ,  $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n / n!$ ; sie genügen der Funktionalgleichung  $x Y_n'(x) = n(Y_n(x) - Y_{n-1}(x))$  und sind in besonderen Fällen orthogonal in einem endlichen Intervall. O. Volk.

Rees, C. J.: Elliptic orthogonal polynomials. Duke math. J. 12, 173—187 (1945).

Orthogonale elliptische Polynome  $\Phi_n(x)$  sind definiert durch die Gewichtsfunktion  $X^{-1/2} = [(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{-1/2}$ . Verf. untersucht zuerst die Integrale  $\int_0^1 X^{-1/2} x^n dx$ ; er stellt dafür eine Rekursionsformel auf und kommt so zu einem neuen System von orthogonalen Polynomen. Für die  $\Phi_n(x)$  stellt er eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auf, deren Koeffizienten von einem einzigen Parameter abhängen. O. Volk.

Whittaker, J. M.: Representation of functions by series of polynomials. Proc. math. phys. Soc. Egypt 2, Nr. 3, 13—22 (1943).

● Whittaker, J. M.: Series of polynomials. — Edited by M. Mursi. Cairo: Fouad I University, Faculty of Science 1943. III, 43 p.

Mursi, M. and R. H. Makar: Coefficients of basic sets and functions represented by them. Proc. math. phys. Soc. Egypt 3, Nr. 1, 25—35 (1945) [mit arabischer Zusammenfassg.].

Nassif, M.: On the zeros of basic sets of polynomials. Proc. math. phys. Soc. Egypt 2, Nr. 4, 1—6 (1944).

Doss, S. H.: A theorem on uniqueness. J. London math. Soc. 18, 137—140 (1943).

Vgl. die zusammenfassende Darstellung bei Whittaker (dies. Zbl. 38, 228), weitergehende Ergebnisse bei Nassif (dies. Zbl. 46, 80). *W. Hahn.*

Kesava Menon, P.: A generalization of Legendre functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 5, 92—102 (1941).

Feldheim, E.: Sur les polynomes généralisés de Legendre. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 5, 241—254 (1941) [Französisch mit russ. Übersetzung].

● Bateman, H.: Some definite integrals occurring in aerodynamics. Theodore von Kármán Anniversary Volume, p. 1—7. California Institute of Technology, Pasadena, Calif., 1941.

Hornich, Hans: Über gewisse trigonometrische Integrale. II. Math. Z. 49, 374—379 (1944).

In dies. Zbl. 28, 232 hat Verf. Integrale der Form  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\sin(a_i x)}{a_i x} \cos(2bx) dx$

eingeführt und deren Grenzverhalten untersucht; diese Grenzfunktionen werden hier weiter betrachtet. *O. Volk.*

Banerjee, D. P.: On some infinite integrals. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 4, 1—2 (1943).

Anschließend an Entwicklungen S. Ramanujans werden uneigentliche Integrale über  $| \Gamma(a + ix) / \Gamma(b + ix) |^2$  ausgewertet. *W. Maier.*

Bateman, H.: An extension of Schuster's integral. Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 70—72 (1946).

Mit  $\int_x^{\infty} \cos(t^n) dt = C(x)$  werden Bildungen wie  $\int_0^{\infty} C'(x) C(ax) dx$  mit unvollständigen  $\Gamma$ -Funktionen in Zusammenhang gebracht. *W. Maier.*

Strachey, C. and P. J. Wallis: Hahn's functions  $S_m(\alpha)$  and  $U_m(\alpha)$ . Philos. Mag., VII. Ser. 37, 87—94 (1946).

Ableitung geschlossener Ausdrücke für die Funktionen

$$-S_m(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 \sin(n\pi\alpha)}{n(m^2 - n^2\alpha^2)}, \quad U_m(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n \sin^2(n\pi\alpha)}{\alpha^2(n^2 - m^2/\alpha^2)^2}$$

für rationale  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) und ganze  $m$ ; damit werden numerische Tafeln berechnet. Ferner Integraldarstellungen für ganze  $m$ . Reihenentwicklungen nach Potenzen von  $\alpha$  und asymptotische Entwicklungen für große  $m$ . Vgl. L. S. Goddard. Proc. Cambridge philos. Soc. 41, 145—160 (1945). *O. Volk.*

Thijssen, W. P.: On Lubbock's polynomials. Nieuw Arch. Wiskunde, II. R. 22, 159—161 (1946).

Die Polynome  $P_i(t)$  sind definiert durch

$$\frac{1}{(1+z)^{1/m} - 1} = \frac{m}{z} - \frac{m-1}{2} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{P_i(m^2)}{m i!} z^i.$$

Verf. zeigt, daß die Koeffizienten der Polynome ausgedrückt werden können durch Produkte von Bernoullischen Zahlen  $B_{2i}$  mit den Zahlen  $C_l^m$ , die man als Koeffizienten bei der Entwicklung des Produktes  $x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$  nach Potenzen von  $x$  erhält. *O. Volk.*

Sastry, H. Sreenivasa: On the function defined by the relation  $\Phi_r(x) = x\Phi_{r-1}(x)$ . Math. Student 8, 127—130 (1940).



(1) Erdélyi, A.: The Fuchsian equation of second order with four singularities. Duke math. J. 9, 48—58 (1942).

(2) Erdélyi, A.: Certain expansions of solutions of the Heun equation. Quart. J. Math., Oxford Ser. 15, 62—69 (1944).

(3) Erdélyi, A.: Integral equations for Heun functions. Quart. J. Math., Oxford Ser. 13, 107—112 (1942).

(1) Die Lösungen  $F(h, x)$  der Heunischen Differentialgleichung

$$x(x-1)(x-a)y'' + [\gamma(x-1)(x-a) + \delta x(x-a) + \varepsilon x(x-1)]y' + \alpha\beta(x-h)y = 0,$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + 1 = \varepsilon$ , lassen Entwicklungen nach hypergeometrischen Funktionen, genauer nach Lösungen der Differentialgleichungen

$$x(1-x)q_m'' + [(\alpha + \beta + 1)x + \delta - \alpha - \beta - 1]q_m' + (\alpha\beta + m(\alpha + \beta - \delta + m))q_m/x, m=0, 1, \dots$$

zu. Die Reihen konvergieren i. a. im Inneren einer Ellipse: für gewisse ausgezeichnete Werte des akzessorischen Parameters  $h$  entstehen die „Heunischen Funktionen“, deren Reihen in der ganzen  $x$ -Ebene konvergieren. Die Koeffizienten der Entwicklungen sowie die sich ergebenden Transformationen der  $F(h, x)$  werden untersucht. (2) Die Entwicklungen schreiten jetzt nach den Lösungen von

$$x(x-1)[P_m'' + (\gamma/x + \delta/(x-1))P_m'] + (\lambda + m)(\mu - m)P = 0$$

fort (mit geeigneten  $\lambda, \mu$ ). Es gibt hier im wesentlichen — d. h. bis auf Transformationen der  $F(h, x)$  und der hypergeometrischen Funktionen — nur zwei Typen von Entwicklungen, die oben aufgestellten und die von Svartholm (dies. Zbl. 20, 121) eingeführten. Anwendungsbereich der beiden Typen und Beziehungen zwischen ihnen werden untersucht. (3) Für  $F(h, x)$  gibt es Integralgleichungen von Typ

$$F(h, x) = \lambda \int_C y^{\gamma-1} (1-y)^{\delta-1} (1-a^{-1})^{\varepsilon-1} K(x, y) F(h, y) dy.$$

Der Kern  $K(x, y)$  ist im wesentlichen ein Produkt zweier hypergeometrischer Funktionen,  $C$  passend gewählt. Im Fall der Heunischen Funktionen lassen sich Zusatzbedingungen angeben, bei denen die Gleichung vom Fredholmschen Typ wird. — Sonderinteresse verdient der Fall  $\alpha = -n$ , der auf die „Heunischen Polynome“ führt.

W. Hahn.

(1) Pólya, George and Norbert Wiener: On the oscillation of the derivatives of a periodic function. Trans. Amer. math. Soc. 52, 249—256 (1942).

(2) Szegő, G.: On the oscillation of differential transforms. I. Trans. Amer. math. Soc. 52, 450—462 (1942).

(3) Hille, Einar: On the oscillation of differential transforms. II. Characteristic series of boundary value problems. Trans. Amer. math. Soc. 52, 463—597 (1942).

(4) Szegő, G.: On the oscillation of differential transforms. IV. Jacobi polynomials. Trans. Amer. math. Soc. 53, 463—468 (1943).

(5) Hille, Einar: On the oscillation of differential transforms and the characteristic series of boundary-value problems. Univ. California Publ. Math., n. Ser. 2 [No. 1, Sem. Rep. Math. (Los Angeles)], 161—168 (1944).

(1): Eine reelle,  $2\pi$ -periodische Funktion, die Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt, ist ein trigonometrisches Polynom bzw. eine ganze Funktion bzw. eine ganze Funktion von höchstens der Ordnung  $(1-\delta)(1-2\delta)$ , je nachdem  $N_k = O(1)$  bzw.  $o(k^{1/2})$  bzw.  $O(k^\delta)$ ,  $0 < \delta < 1/2$  ist, wo  $N_k$  die Anzahl der Zeichenwechsel von  $f^{(k)}(x)$  in einer Periode ist. (2): Neuer Beweis mit Verschärfungen und Verallgemeinerungen für den Fall des Operators  $\theta^d(x)$ ,  $\theta = (1-x^2)D^2 - 2xD$  ( $k=2l$ ),  $D = d/dx$ . (3): Weitere Verallgemeinerung für den allgemeinen Differentialoperator  $L^k$  der zweiten Ordnung mit Anwendungen auf die Legendreschen, Jacobischen, Hermiteschen, Laguerreschen und Besselschen Funktionen. Für die Ergebnisse betreffs der Jacobischen Polynome gibt (4) eine Erweiterung des Gültigkeitsbereiches. In (5) Bericht über die gesamten Ergebnisse. O. Volk.

**Vallarta, Manuel Sandoval:** Bemerkungen über die Wurzeln einiger transzender Gleichungen. Bol. Soc. mat. Mexicana 2, 13—14 (1945) [Spanisch].

Es handelt sich um die Nullstellen der Hermite'schen Polynome  $H_n(x)$  für  $n \leq 7$ , um die erste Wurzel von der Gleichung  $H_4(x) = e^{x^2} (2x)^{1/4} 2^{1/2} J_4(x)$  und die ersten Wurzeln der Gleichungen  $Ci(x) - J_0(x) = 0$  und  $J_0(x) - x M_{1,1/2}(x) = 0$ ,  $Ci$  Integralcosinus,  $M$  Whittakersche Funktion. O. Volk.

**Kibble, W. F.:** An extension of a theorem of Mehler's on Hermite polynomials. Proc. Cambridge philos. Soc. 41, 12—15 (1945).

Entwicklung des Ausdrucks  $R^{-1/2} e^{-R_{ik} x_i x_k / 2R}$  in Reihen nach Produkten  $H_{k_1}(x_1) \cdots H_{k_n}(x_n)$ , wo  $H_i$  das  $i$ -te Hermite'sche Polynom ist und  $R_{ik}$  die Minoren einer gegebenen symmetrischen Matrix mit der Determinante  $R$  sind. O. Volk.

**Baber, T. D. H. and Leonid Mirsky:** Note on certain integrals involving Hermite's polynomials. Philos. Mag., VII. Ser. 35, 532—537 (1944).

Auswertung der Integrale  $J_s(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(\xi) H_n(\xi) e^{-\xi^2} \xi^s d\xi$  und  $J_t(m, n, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^s \psi_m(d' \psi_n / d\xi^t) d\xi$  mit  $\psi_m(\xi) = (2^m m! (\pi/\alpha)^{1/2})^{-1/2} e^{-\alpha/2 \xi^2} H_m(\xi \alpha^{1/2})$ ,  $e^{2\xi\eta - \eta^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (\eta^m / m!) H_m(\xi)$ . O. Volk.

**Bula, Clotilde A.:** Über einige Polynome in zwei Variablen, die denen von Laguerre analog sind. Univ. nac. Litoral. Inst. Mat., Publ. 6, 305—314 (1946) [Spanisch].

Die Verf. bestimmt als Verallgemeinerung des Laguerreschen Polynomensystems  $L_n(x)$  im Falle von zwei Veränderlichen das Polynomensystem  $L_{p,q}(x, y)$  mit den Bedingungen  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} L_{p,q}(x, y) L_{m,n}(x, y) dy dx \begin{cases} = 0, & (p, q) \neq (m, n) \\ \neq 0, & (p, q) = (m, n). \end{cases}$  O. Volk.

**Banerjee, D. P.:** On some expansions containing Laguerre polynomials, and their expressions in terms of Whittaker's confluent hypergeometric functions. Philos. Mag., VII. Ser. 32, 84—85 (1941).

**Pinney, Edmund:** Laguerre functions in the mathematical foundations of the electromagnetic theory of the paraboloidal reflector. J. Math. Physics 25, 49—79 (1946).

Untersuchung der Funktionen

$$L_\nu^\mu(z) = (\Gamma(\mu+1)/\Gamma(\nu+1)) \Gamma(\nu+1) z^{-1/2} e^{-z/2} M_{\nu/2, \nu/2+1/2, \mu+1/2}(z).$$

Die meisten Ergebnisse sind die zu den  $M$ -Funktionen analogen. Auch die zweiten Lösungen der Laguerreschen Differentialgleichung  $U_\nu^\mu(z)$ , die durch die Whittakerschen  $W$ -Funktionen darstellbar sind, werden untersucht. Eine große Anzahl von Formeln [Entwicklungen, Integrale, asymptotische Darstellungen, auch die Funktionen  $L_{\nu+1}^\mu(z) L_\nu^\mu(t) - L_\nu^\mu(z) L_{\nu+1}^\mu(t)$ ,  $L_{\nu+1}^\mu(z) U_\nu^\mu(t) - L_\nu^\mu(z) U_{\nu+1}^\mu(t)$  betreffend] wird gegeben. In der Bibliographie (von H. Bateman) fehlen z. B. Arbeiten von H. Buchholz (dies. Zbl. 28, 52, 222). O. Volk.

(1) **Bottema, O.:** Eine Beziehung für Laguerresche und Hermite'sche Polynome. Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 65—71 = Indagationes math. 8, 29—35 (1946) [Holländisch].

(2) **Bottema, O.:** On a generalisation of the formula of Hille and Hardy in the theory of Laguerre polynomials. Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 1032—1036 = Indagationes math. 8, 630—634 (1946).

Summation von Reihen mit Laguerreschen Polynomen. Während das Hauptresultat von (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+\alpha}{m} L_n^\alpha(x) t^n = (1-t)^{-m-1-\alpha} e^{-xt/(1-t)} L_m^\alpha(x t/(1-t))$$

nicht neu ist, gibt Verf. in (2) die neue Summation von

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{\Gamma(n+\alpha-k-1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} t^n (xy)^{\frac{1}{2}\alpha} e^{-\frac{1}{2}(x+y)} L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y)$$

( $k$  ganz und nicht negativ).

*O. Volk.*

Varma, R. S.: An infinite series involving the product of Bessel functions and generalised Laguerre polynomials. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **12**, 532—534 (1940).

Shastri, N. A.: Some relations between Bessel functions of third order and confluent hypergeometric functions. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **13**, 521—525 (1941).

Tsvetkoff, G. E.: On roots of Whittaker's functions. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **32**, 10—12 (1941).

Tsvetkoff, G. E.: Sur les racines complexes des fonctions de Whittaker. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **33**, 290—291 (1941).

Ohne Beweisangabe werden einige Sätze über die Lage der komplexen Nullstellen der parabolischen Funktionen  $M_{k,m}(z)$ ,  $W_{k,m}(z)$  für reelle  $k$ ,  $m$  mitgeteilt.

*O. Volk.*

Wells, C. P. and R. D. Spence: The parabolic cylinder functions. J. Math. Physics **24**, 51—64 (1945).

Potenzreihendarstellung der Lösungen der Differentialgleichung  $y'' + (a + z^2)y = 0$  mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = 1$  bzw.  $y'(0) = 1$ ; Darstellung durch die konfluente hypergeometrische Funktion, asymptotische Entwicklungen für große Argumente  $z$  und asymptotische Werte für große Parameter  $a$ . Numerische Tafeln und graphische Darstellungen.

*O. Volk.*

(1) Wayre, Rolin: Sur l'équation de Mathieu. C. r. Soc. Physique Genève **62**, 54—55 (1945).

(2) Bickley, W. G. and N. W. McLachlan: Mathieu functions of integral order and their tabulation. Math. Tables Aids Comput. **2**, 1—11 (1946).

(3) McLachlan, N. W.: Mathieu functions and their classification. J. Math. Physics **25**, 209—240 (1946).

(4) Byuler, G. A.: Über die Integraldarstellung der Mathieuschen Funktionen. Bull. (Izvestija) math. mech. Inst. Univ. Tomsk **3**, 191—197 (1946) [Russisch].

Lösungsdarstellungen der Mathieuschen Differentialgleichung. In (1) wird mit Hilfe der Substitution  $z = e^{i\sigma}$  auf eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten übergegangen, die mit der Fuchsschen Theorie behandelt wird. Die Diskussion führt auf Kochsche Determinanten (vgl. Patry, dies. Zbl. **27**, 220 u. **28**, 61). (2) u. (3) geben (ohne Ableitungen) eine beträchtliche Anzahl von Darstellungen aller Typen Mathiescher Funktionen. Die meisten dieser Formen findet man in der Monographie von McLachlan (dies. Zbl. **29**, 29). — Integraldarstellungen Mathiescher Funktionen in (4) nicht wie bei Whittaker und Ince, sondern Verallgemeinerung der Darstellung von Besselfunktionen durch Schleifenintegrale.

*W. Haacke.*

Erdélyi, A.: Integral equations for Lamé functions. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **7**, 3—15 (1942).

Integralgleichungen für die Laméschen Polynome  $n$ -ten Grades, in deren Kern Kugelflächenfunktionen  $n$ -ten Grades stehen. Integralgleichungen für



transzendente Lamésche Funktionen ganzen Grades und für Produkte Laméscher Polynome. Diskussion der Ausartung zu Mathieschen Funktionen.

*F. W. Schäfke.*

**Sharma, J. L.:** Integral equations involving Lamé functions of complex degrees. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 4, 19—25 (1943).

Integralgleichungen für die von E. W. Hobson [Proc. London math. Soc., I. Ser. 23, 231—240 (1927)] diskutierten vier Arten Laméscher Funktionen, in deren Kern Mehlersche Kegelfunktionen bzw. deren Ableitungen stehen.

*F. W. Schäfke.*

**Sharma, J. L.:** On recurrence formulae of the Lamé's functions of the same degree. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 1, 69—75 (1939).

**Sharma, J. L.:** On the recurrence formulae of the generalized Lamé functions. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 2, 43—51 (1940).

Rekursionsformeln für die von Halphen [Fonctions elliptiques 2, 494—502 (Paris 1888)] erhaltenen Lösungen der Laméschen Differentialgleichung  $y''(u) + [n(n+1)\wp(u) + B]y(u) = 0$ .

*F. W. Schäfke.*

(1) **Erdélyi, A.:** On certain expansions of the solutions of the general Lamé equation. Proc. Cambridge philos. Soc. 38, 364—367 (1942).

(2) **Campbell, Robert:** Fonctions spéciales. Recherche d'équations intégrales et de la valeur asymptote des fonctions de Mathieu associées. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1069—1071 (1946).

(3) **Campbell, Robert:** Sur une généralisation des fonctions de Mathieu normées. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 269—271 (1946).

(4) **Campbell, Robert:** Sur les solutions de période  $2s\pi$  de l'équation de Mathieu associée. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 123—125 (1946).

(1) untersucht die Lamésche Gleichung in der Form

$$y'' + [h - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x, k)]y = 0.$$

Er zeigt, daß man bei  $e^{2i\omega} = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{cn} p - k' \operatorname{sn} x \operatorname{sn} p}{\operatorname{cn} x \operatorname{cn} p + k' \operatorname{sn} x \operatorname{sn} p}$ ,  $z = \frac{\operatorname{dn} x \operatorname{dn} p}{k'}$  die Lösung in der Form  $y = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_r \Phi_{2r-\Theta}$  ansetzen kann, wobei  $\Theta$  der charakteristische Exponent und  $\Phi_m = e^{im\omega} P_m^m(z)/P_m^m(0)$  ist. — Campbell betrachtet diese Gleichung in der Gestalt  $y'' - (2m+1)\operatorname{tg} x y' + (a - k^2 \cos^2 x)y = 0$ . In (2) und (3) ist  $m = 0$  gesetzt. Die Behandlungsmethoden und Darstellungsformen der Lösung findet man in den späteren Abhandlungen des Verf. (z. B. dies. Zbl. 29, 30; 31, 121; 36, 62 und bes. 40, 324).

*W. Haacke.*

**Daum, J. A.:** The basic analogue of Kummer's theorem. Bull. Amer. math. Soc. 48, 711—713 (1942).

Summierung der basischen hypergeometrischen Reihe zweiter Ordnung mit den Parametern  $a, b, aq/b$  an der Stelle  $-q/b$  in geschlossener Form. Im Grenzfall  $q = 1$  entsteht die Kummer'sche Formel für die Gaußsche Reihe an der Stelle  $x = -1$ .

*W. Hahn.*

**Jackson, F. H.:** On basic double hypergeometric functions. Quart. J. Math., Oxford Ser. 13, 69—82 (1942).

**Jackson, F. H.:** Basic double hypergeometric functions. II. Quart. J. Math., Oxford Ser. 15, 49—61 (1944).

Definition und formale Eigenschaften der Analoga zu den Appellschen hypergeometrischen Reihen: an die Stelle der Faktoriellen  $a(a+1)\dots(a+k-1)$  tritt die Bildung  $(1-q^a)(1-q^{a+1})\dots(1-q^{a+k-1})$ . U. a. werden Entwicklungen abgeleitet, die nach Produkten gewöhnlicher basic hypergeometric series fortschreiten, und die partiellen  $q$ -Differenzgleichungen aufgestellt. Hauptmittel ist die geschickte Verwendung des Operators  $\exp[(\log q)x d/dx]$  und

davon abgeleiteter Operatoren. In der zweiten Note werden die sog. abnormal functions untersucht, die  $y^n q^{(n-1)/2}$  an Stelle von  $y^n$  enthalten (wie Ref. bemerkt, sind das Ausartungen der entsprechenden Reihen dritter Ordnung). W. Hahn.

Meijer, C. S.: On the  $G$ -function. I—VIII. Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 227—237, 344—356, 457—469, 632—641, 765—772, 936—943, 1063—1072, 1165—1175 = Indagationes Math. S, 124—134, 213—225, 312—324, 391—400, 468—475, 595—602, 661—670, 713—723 (1946).

Die aus Differenzengleichungen und Integraldarstellungen von Barnes eingeführte Transzendente  $G_{p,q}^{m,n}(z) = y$  wird als verallgemeinerte hypergeometrische Reihe der Differentialgleichung

$$\left\{ (-1)^{p-m-n} z \prod_{j=1}^p \left( z \frac{d}{dz} - a_j + 1 \right) - \prod_{j=1}^q \left( z \frac{d}{dz} - b_j + 1 \right) \right\} y = 0$$

aufgefaßt. Sie läßt ähnlich den Zylinderfunktionen ein Multiplikationstheorem zu und ist als lineare Kombination von  $n$  „benachbarten“  $G_{p,q}^{\mu,\nu}$  mit  $\mu < m$ ,  $\nu$ ,  $n$  darstellbar. Zahlreiche asymptotische Entwicklungen. W. Maier.

Basoco, M. A.: On the Fourier developments of a certain class of theta quotients. Bull. Amer. math. Soc. 49, 299—306 (1943).

Es sei  $\vartheta_x(z, q)$  eine der vier Jacobischen Thetafunktionen und  $k$  eine positive ganze Zahl. Die Koeffizienten  $b_{hk}$  der trigonometrischen Entwicklungen  $\left( \frac{\vartheta'_x}{\vartheta_x} \right)^k = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i h z} b_{hk}$  werden in einer Rekursion  $k$ -ter Ordnung bestimmt. Arithmetische Anwendungen. W. Maier.

Jabotinsky, Eri: Eine schnell konvergierende Reihe für die Weierstraßsche elliptische Funktion. Riveon Lematematika 1, 30—31 (1946) [Hebräisch].

Seit H. Poincaré besteht das Bemühen, den Konvergenzdefekt der Teilbruchreihen automorpher Funktionen durch Einföhrung konvergenzerzeugender Faktoren abzuschwächen. Im lemniskatischen Fall der elliptischen Funktionen gilt  $\sigma(z) \wp(z) = \sum_{g=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{g_1 g_2 + g_1 + g_2}}{z + g_1 + i g_2} e^{2\pi i (z + g_1 + i g_2)(\tau_1 g_1 + \tau_2 g_2)}$ . Ansatz zur Verallgemeinerung auf beliebige  $\omega_1, \omega_2$ . W. Maier.

## Funktionentheorie:

●Markušević, A. I.: Elemente der Theorie der analytischen Funktionen. Moskau: UČPEDGIZ 1944. 544 S. [Russisch].

Artin, Emil: On the theory of complex functions. Notre Dame Math. Lectures, Nr. 4, p. 55—70. Notre Dame, Ind.; University of Notre Dame 1944.

●Littlewood, J. E.: Lectures on the theory of functions. Oxford: University Press 1944. 243 p. \$ 5,50.

●Bieberbach, Ludwig: Lehrbuch der Funktionentheorie. I. Elemente der Funktionentheorie. II. Moderne Funktionentheorie. New York: Chelsea Publishing Company, 1945. XIV, 322 p.; VI, 370 p.; \$ 3,25, 3,25.

●Tricomi, Francesco: Funzioni analitiche. 2. Aufl. (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Monografie di Matematica Applicata.) Bologna: Nicola Zanichelli 1946. VII, 134 p. 300 Lire.

●Ríos, Sixto: Vorlesungen über die analytische Darstellung der Funktionen. Madrid: C. Bermejo 1945. 137 p. [Spanisch].

Caligo, D.: Alcuni sviluppi di Taylor considerati sul cerchio di convergenza. Boll. Un. mat. Ital., II. Ser. 5, 168—173 (1943).

**Riabouchinsky, Dimitri:** Le rôle de la mécanique des fluides dans le développement de la théorie des fonctions d'une variable complexe. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 426—428 (1946).

● **Botella Raduan, Francisco:** Riemannsche Räume und die Funktionentheorie. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas 1942. 72 p. [Spanisch].

**Shimizu, Tatsujiro:** Eine Bedingung dafür, daß eine Funktion einer komplexen Veränderlichen regulär ist. Nippon Sugaku Buturigakkwai Zasshi **16**, 139—140 = Coll. Papers Fac. Sci. Osaka imp. Univ., Ser. A **10**, Nr. 13, 2 p. (1942) [Japanisch].

Let  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  be a function defined in a neighbourhood  $U$  of a point  $z_0$ . The author defines a directional derivative of order  $n$  at  $z_0$  by the formula  $d^n f / dz_0^n = (\bar{D} + D e^{-2i\theta})^n f$ , where  $D = \frac{1}{2}(\partial/\partial x + i \partial/\partial y)$  and  $\bar{D}$  is its conjugate. He proves: Suppose that  $u$  and  $v$  are partially differentiable infinitely often in  $U$  and that for every  $n$  there exists a directional derivative  $d^n f / dz_0^n$  at  $z_0$ , independent on  $\theta$ . Then, in order that  $f(z)$  is analytic in a neighbourhood of  $z_0$ , it is necessary and sufficient that there exist

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right|, \quad \left| \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| < \eta n! K^n \quad (j = 0, 1, \dots, n; \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

in a neighbourhood of  $z_0$ , where  $\eta$  and  $K$  are positive constants. *K. Noshiro.*

**Minami, Unai:** On the Cauchy's integral theorem. Proc. imp. Acad. Tokyo **18**, 440—445 (1942).

Ein Beweis des Cauchyschen Integralsatzes in seiner schärferen Form, wobei die rektifizierbare Randkurve durch Polynome von innen approximiert wird.

*Y. Komatu.*

**Garnier, René:** Sur le problème de Riemann-Hilbert. C. r. Acad. Sci., Paris **221**, 276—278 (1945).

Fortführung der Birkhoffschen Methode zur Bestimmung von komplexen Matrizen  $\Phi(z)$  und  $\Psi(z)$ , die bei gegebener Matrix  $A(z)$  der Beziehung  $\Phi = A\Psi$  genügen, wenn  $z$  eine vorgegebene einfach geschlossene Kurve der  $z$ -Ebene durchläuft.

*E. Trost.*

**Neville, E. H.:** Indefinite integration by means of residues. Math. Student **13**, 16—25 (1945).

Sia  $f(z^2)$  una funzione priva di poli sull'asse immaginario e tale che l'integrale di  $f(z^2) \log\{(c+z)/(c-z)\}$  lungo un conveniente contorno semicircolare tenda a zero quando il raggio del contorno tende all'infinito. Si valuta  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2) dx$  facendo vedere che esso è dato, con una integrazione al contorno, dalla somma delle parti reali dei residui della funzione  $f(z^2) \log\{(c+z)/(c-z)\}$  in quei poli di  $f(z^2)$  le cui parti reali sono positive. Il valore di  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  è invece dato dalla somma, cambiata di segno, dei residui della funzione  $f(z) \log(c-z)$  in tutti i poli di  $f(z)$ . Per questo si suppone soltanto che un certo integrale al contorno tenda a zero quando il contorno tende all'infinito. Si danno infine esempi che fanno vedere in che modo la posizione e il tipo dei poli influiscano sulla somma restante.

*L. Giuliano.*

**Carleman, T.:** Sur la détermination d'une fonction analytique par certaines valeurs moyennes de ses dérivées. Ark. Mat. Astr. Fys. **32 B**, Nr. 4, 7 p. (1945).

**Montel, Paul:** Sur les rapports entre les dérivées et les différences divisées. Mathematica, Timişoara **19**, 1—11 (1943).

Verf. betrachtet die Differenzenquotienten  $d_1[f(z_0)] = [f(z_1) - f(z_0)]/[z_1 - z_0]$  (und solche höherer Ordnung) von analytischen Funktionen  $w = f(z)$ ; Existenz-



sätze, wonach es zu jedem im Existenzbereich der Funktion  $f(z)$  gelegenen  $z = \alpha$  stets Differenzenquotienten gibt, die gleich dem Differentialquotienten in  $z = \alpha$  sind.

H. Töpfer.

Vignaux, J. C. and Mischa Cotlar: Total normale Familien holomorpher Funktionen. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. 7, 152 p. (1944) [Spanisch mit französ. Zusammenfassg.].

Pour les familles normales, il y a convergence uniforme des suites dans des domaines complètement intérieurs au domaine  $D$  de définition. Pour les familles totalement normales il y a, de plus, convergence sur la frontière de  $D$  ou une partie de cette frontière. Extension à ces dernières familles des propriétés des familles normales.

J. Dufresnoy.

Hadwiger, H.: Über einen funktionentheoretischen Umordnungssatz von S. Ríos. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 6, 235—239 (1946).

Wiedergabe eines Vortrags, dessen Ziel mit einigen Beweismodifikationen der folgende Satz von S. Ríos (dies. Zbl. 28, 398) bildet. Es gibt eine Reihe analytischer Funktionen, die in der ganzen Ebene lokal gleichmäßig gegen Null konvergiert und folgende Eigenschaft hat: Zu jedem schlichten und beschränkten Gebiet  $\mathfrak{G}$  und zu jeder in  $\mathfrak{G}$  regulären und eindeutigen Funktion  $F(z)$  läßt sich eine Umordnung der Funktionenreihe finden, die in  $\mathfrak{G}$  lokal gleichmäßig gegen  $F(z)$  konvergiert.

W. Meyer-König.

Martin, Yves: Sur l'extension à certaines séries de quelques propriétés des séries entières. C. r. Acad. Sci., Paris 219, 385—387 (1944).

Martin, Yves: Sur une classe de développements en série. C. r. Acad. Sci., Paris 219, 666—668 (1944).

Verf. untersucht Reihen der Form  $(1) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q(z, n)$ , wo die  $q(z, n)$  ganze Funktionen von  $z$  mit folgender Eigenschaft sind:  $0 < m < |z^{-n} q(z, n)| < M$  für  $r < |z| < R$  und  $n > N(r, R)$ , wie auch  $r$  und  $R$  ( $0 < r < R < \infty$ ) gewählt werden. (1) ist absolut und gleichmäßig konvergent im Kreis  $|z| \leq \varrho' < \varrho = (\limsup_n |c_n|)^{-1}$  und divergent für  $|z| > \varrho$ . Bekannte Eigenschaften von Potenzreihen [der Abelsche Grenzwertsatz und seine  $O$ -Umkehrung, der Fejérsche Satz über die Konvergenz in Randpunkten, für die  $f(z)$  einen radialen Limes besitzt, der Fatou-Rieszsche Satz über die Konvergenz in regulären Randpunkten] lassen sich auf die Reihen (1) übertragen. Die Analogie kann aber auch versagen. Z. B. hängt bei beständig konvergenten Reihen (1) die Wachstumsordnung von  $f(z)$  nicht allein von den  $c_n$  ab. Sind allerdings die  $q(z, n)$  Polynome vom Grad  $n$  höchstens, so stimmen (1) und  $\sum c_n z^n$  im Fall  $\varrho = \infty$  in Ordnung und Typus überein.

W. Meyer-König.

Augé, J.: Entwicklungen in Reihen analytischer Funktionen und ihre Beziehungen zu gemischten Funktionalen. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 6, 3—16 (1946) [Spanisch].

Mit Hilfe der Theorie der gemischten linearen analytischen Funktionalen von L. Fantappiè (dies. Zbl. 60, 278) werden verschiedene Reihenentwicklungen (Taylor-Reihen; Fourier-Reihen; Reihen, die nach Legendreschen Polynomen fortschreiten) von einem einheitlichen Standpunkt aus behandelt. Hinreichende Bedingungen, unter denen ein Funktional gliedweise auf eine Reihe angewandt werden kann. Hilberts Satz über die Entwickelbarkeit einer regulären Funktion in eine Polynomreihe liefert allgemein eine Reihenentwicklung für die Funktionaltransformaten.

W. Meyer-König.

Mandelbrojt, S.: Quasi-analyticity and analytic continuation — a general principle. Trans. Amer. math. Soc. 55, 96—131 (1944).

Ein weittragender Satz wird aufgestellt, der als Verallgemeinerung der Cauchyschen Abschätzung der Koeffizienten einer Taylor-Reihe durch den Betrag der

dargestellten Funktion aufgefaßt werden kann: Wird eine reguläre und beschränkte Funktion  $F(s)$  asymptotisch in einem sehr allgemeinen Sinn durch Summen

$\sum_{n=1}^n d_n e^{-\lambda_n s}$  ( $n \geq 1$ ) dargestellt, so werden die  $d_n$  abgeschätzt durch das Maximum

des Betrages von  $F(s)$  auf gewissen Kreisen, deren Radien mit der oberen Dichte der Folge  $\lambda_n$  zusammenhängen. Reichhaltige Anwendungen auf die verschiedensten Probleme sind möglich, z. B. auf das Problem der eindeutigen Bestimmtheit einer Funktion mit vorgegebener asymptotischer Entwicklung, auf quasianalytische Funktionen, auf die Untersuchung der Lage der Singularitäten einer Dirichlet-Reihe und der Verteilung der Werte ihrer analytischen Fortsetzung. Zahlreiche Verallgemeinerungen bisher bekannter Resultate ergeben sich. *W. Meyer-König.*

**Vigil, Luis:** Über fortsetzbare und nicht fortsetzbare Taylorreihen. Der gegenwärtige Stand des Borelschen Satzes. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 3, 137—144, 208—218 (1943) [Spanisch].

Bericht über einige der wichtigsten Nichtfortsetzbarkeitskriterien bei Potenzreihen und Interpretationen des Borelschen Satzes, daß eine willkürliche Potenzreihe mit der Wahrscheinlichkeit 1 nicht fortsetzbar ist. *W. Meyer-König.*

**Rosenblatt, Alfred:** Über Potenzreihen im Einheitskreis. *Revista Ci.* 45, 195—225 (1943) [Spanisch].

**Rosenblatt, Alfred:** Über Potenzreihen im Einheitskreis. *Actas Acad. nac. Ci. exact., ffs. natur. Lima* 6, 39—42 (1943) [Spanisch].

**Rosenblatt, A.:** Über die Koeffizienten schlichter Reihen. *Actas Acad. nac. Ci. exact., ffs. natur. Lima* 4, 145—155 (1941) [Spanisch].

Ergänzung zu Golusin, *Mat. Sbornik*, n. Ser. 3, 321—330 (1938).

**García Frías, Roque:** Über Koeffizienten von Funktionen, die im Einheitskreis schlicht sind. *Actas Acad. nac. Ci. exact., ffs. natur. Lima* 4, 76—85 (1941) [Spanisch].

**Ríos, Sixto:** Über die Wahrscheinlichkeit, daß eine Taylorreihe eine analytische Fortsetzung zuläßt. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 6, 174—176 (1946) [Spanisch].

Skizze einer maßtheoretischen Präzisierung des Borelschen Satzes, daß das Funktionselement  $\sum_1^\infty \varrho_n e^{i\varphi_n} z^{n-1}$  vom Konvergenzradius 1 im allgemeinen nicht fortsetzbar ist. Dabei wird im Produktraum der Räume der  $\{\varrho_n\}$  und der  $\{\varphi_n\}$  gearbeitet. *W. Meyer-König.*

**Cowling, V. F.:** A generalization of a theorem of Le Roy and Lindelöf. *Bull. Amer. math. Soc.* 52, 1065—1082 (1946).

Sei  $f(z) = \sum a(n) z^n$  für  $|z| < 1$  regulär. Ist  $a(\omega)$  in einem Winkelgebiet um die positive Realachse regulär und  $|a| < e^{\delta \cdot \omega}$ ,  $\delta < \tau$ , so findet Verf. Gebiete, in welche  $f$  über  $|z| = 1$  hinweg fortgesetzt werden kann. *G. af Hällström.*

**Zygmund, A.:** On the convergence and summability of power series on the circle of convergence. II. *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. 47, 326—350 (1942).

Teil I dies. Zbl. 19, 16. Die für  $|z| < 1$  reguläre Funktion (1)  $F(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$  gehöre für ein  $\lambda > 0$  zur Klasse  $H^\lambda$ , d. h.  $\int_\pi^\pi |F(r e^{i\theta})|^\lambda d\theta$  bleibe beschränkt für  $r \rightarrow 1$ . Gefragt wird nach dem Verhalten der Reihe (1) auf  $|z| = 1$ . Bekannt ist: Ist  $\lambda \geq 1$ , so ist für jedes  $\varepsilon > 0$  die Reihe (1) auf  $|z| = 1$  fast überall  $(C, \varepsilon)$ -summierbar. Ist  $0 < \lambda < 1$  und  $\alpha = -1 + \lambda^{-1}$ , so ist für jedes  $\varepsilon > 0$  die Reihe (1) auf  $|z| = 1$  fast überall  $(C, \alpha + \varepsilon)$ -summierbar [Hardy und Littlewood, dies. Zbl. 8, 309]. Diese letzte Aussage ist sicher falsch für  $\varepsilon < 0$ . Der Beweis ihrer

Richtigkeit im Falle  $\varepsilon = 0$  bildet das erste Ziel der Arbeit. — Sei  $s_n(\theta, f)$  die  $n$ -te Teilsumme der Fourier-Reihe der mit  $2\pi$  periodischen Funktion  $f \in L^r$  im Punkt  $\theta$ . Ist  $r > 1$  und  $q > 0$ , so gilt fast überall  $(n+1)^{-1} \sum_{\nu=0}^n |s_\nu(\theta, f) - f(\theta)|^q \rightarrow 0$

für  $n \rightarrow \infty$  [Verf., Trigonometrical series (dies. Zbl. 11, 17), insbes. S. 238]. Nach J. Marcinkiewicz (dies. Zbl. 21, 402) ist dies auch noch für  $r=1$ ,  $q=2$  (also  $0 < q \leq 2$ ) richtig. Der Beweis der Richtigkeit für  $r=1$ ,  $q > 0$  bildet das zweite Ziel der Arbeit. Beweisgedanke anders als bei Marcinkiewicz. — Sei (1) zu  $H^2$  gehörig,

$0 < \lambda < 1$ ,  $\alpha = -1 + \lambda^{-1}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Dann strebt  $\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n^{\alpha+\varepsilon}(\theta, F) - F(e^{i\theta})|^\lambda d\theta \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , wobei die  $\sigma_n^{\alpha+\varepsilon}$  die  $(C, \alpha + \varepsilon)$ -Mittel von (1) für  $z = e^{i\theta}$  bedeuten (Hardy und Littlewood, a. a. O.; A. E. Gwilliam, dies. Zbl. 13, 68). Dazu eine teilweise Verschärfung.

W. Meyer-König.

Denjoy, Arnaud: Sur les séries de fractions rationnelles. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 709—712 (1946).

An eine Methode von J. Wolff [C. r. Acad. Sci., Paris 173, 1327—1328 (1921)] anschließend, erzeugt Verf. durch eine Reihe  $\sum A_n/(x - a_n)$  mit  $\sum |A_n| < \infty$  eine Funktion mit vorgeschriebenen Regularitäts- und Mehrdeutigkeitseigenschaften.

W. Meyer-König.

Pólya, G.: On converse gap theorems. Trans. Amer. math. Soc. 52, 65—71 (1942).

Erdős, P.: Note on the converse of Fabry's gap theorem. Trans. Amer. math. Soc. 57, 102—104 (1945).

(1)  $f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r z^{\lambda_r}$  mit  $a_r \neq 0$  und  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  ( $\lambda_r$  ganz) besitze den Konvergenzradius  $r$  ( $0 < r < \infty$ ). Satz I (Fabry'scher Lückensatz): Ist (2)  $\lim n \lambda_n^{-1} = 0$ , so ist  $f(z)$  nicht über  $|z| = r$  hinaus fortsetzbar. Satz II (von Pólya, dies. Zbl. 8, 62): Ist (3)  $\liminf n \lambda_n^{-1} = 0$ , so ist der Existenzbereich von (1) ein (einfach zusammenhängendes) schlichtes Gebiet. Beide Sätze werden nun von Pólya umgekehrt. Ist eine Folge  $\lambda_n$  gegeben und (2) nicht erfüllt, so gibt es ein (1), das über seinen Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar ist. Ist eine Folge  $\lambda_n$  gegeben und (3) nicht erfüllt, so gibt es ein (1), das sich zu einer mehrdeutigen analytischen Funktion fortsetzen läßt. Für die Umkehrung des Satzes I gibt Erdős einen weiteren, elementaren Beweis.

W. Meyer-König.

Macintyre, A. J. and R. Wilson: Some converses of Fabry's theorem. J. London math. Soc. 16, 220—229 (1941).

(1)  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  besitze den Konvergenzradius 1 und  $z = 1$  auf  $|z| = 1$  als einzige Singularität. Diese heißt nach G. Pólya (dies. Zbl. 8, 62) gut zugänglich, wenn  $f(z)$  in dem in der punktierten Nachbarschaft von  $z = 1$  gelegenen Teil des Winkelraumes  $-\alpha < \arg(1 - z) < \alpha$  mit  $\alpha > \pi/2$  regulär ist, fast isoliert, wenn  $\alpha = \pi$ , und nach den Verff. virtuell isoliert, wenn  $\alpha > \pi$  genommen werden kann. Den Pólyaschen Ergebnissen, die von der Natur der Singularität auf die „Anzahl“ der „nicht kleinen“ Koeffizienten  $c_n$  schließen, fügen die Verff. an: Ist  $\gamma > 0$  und die Singularität  $z = 1$  virtuell isoliert, so ist die Ungleichung  $|c_n| > e^{-\gamma n}$  für eine  $n$ -Folge der Dichte 1 erfüllt. Diese Sätze werden sodann übertragen auf die Umkehrung des Fabry'schen Satzes, daß  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  bei  $z = 1$  singular ist, wenn  $b_n/b_{n+1} \rightarrow 1$  strebt. Ist  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt, so ist die Ungleichung  $|c_{n+1} c_n^{-1} - 1| < \varepsilon$  für die Koeffizienten von (1) erfüllt: (a) für eine  $n$ -Folge der Maximaldichte 1 in jedem Fall, (b) für eine  $n$ -Folge der oberen Dichte 1,



wenn die Singularität  $z = 1$  gut zugänglich, (c) für eine  $n$ -Folge der Dichte 1, wenn die Singularität fast isoliert und von endlicher Exponentialordnung, oder aber wenn sie (d) virtuell isoliert ist. Die Beweise beruhen auf der Interpolation bzw. angenäherten Interpolation durch in einem Winkelraum reguläre Funktionen und den Eigenschaften solcher Funktionen und ihrer logarithmischen Ableitungen.

W. Meyer-König.

**Piranian, George:** On the convergence of certain partial sums of a Taylor series with gaps. Bull. Amer. math. Soc. 49, 881—885 (1943).

$f(z) = \sum_1^\infty c_n z^{\lambda_n}$  besitze den Konvergenzradius 1. Sei  $S_n(z) = \sum_{p=1}^n c_p z^{\lambda_p}$ ,  $M(r) = \max |f(z)|$  für  $|z| = r$  ( $0 < r < 1$ ),  $M(r) = 1$  für  $r \leq 0$ ,  $\Theta_n = \lambda_n^{-1} \lambda_{n+1} - 1$ . Ist dann  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{n_i}^{-1} \Theta_{n_i}^{-2} \log[M(1 - \Theta_{n_i}^2)/\Theta_{n_i}] < \infty$  für eine Indexfolge  $n_i$ , so existiert  $\lim_{i \rightarrow \infty} S_{n_i}(z) = f(z)$  in allen Regularitätspunkten von  $f(z)$  auf  $|z| = 1$ .

W. Meyer-König.

**Salem, R. and A. Zygmund:** Lacunary power series and Peano curves. Duke math. J. 12, 569—578 (1945).

Sei (1)  $\sum_1^\infty a_k z^{n_k}$  eine Lückenreihe mit  $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$  und (2)  $\sum_1^\infty |a_k| < \infty$ .

Es gibt eine absolute Konstante  $\lambda_0 \geq 1$ , so daß, wenn  $\lambda \geq \lambda_0$  ist und (2) hinreichend langsam konvergiert, die von (1) auf  $|z| = 1$  angenommenen Werte eine Peano-Kurve bilden, die ein gewisses Quadrat vollständig ausfüllt. Ob  $\lambda_0 = 1$  oder  $> 1$  ist, bleibt unentschieden.

W. Meyer-König.

**Schur, Issai:** On Faber polynomials. Amer. J. Math. 67, 33—41 (1945).

Grunsky gab notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine in einem endlich vielfach zusammenhängenden Gebiet  $\mathfrak{B}$ , das  $z = \infty$  enthält, eindeutige und bis auf einen Pol bei  $z = \infty$  reguläre Funktion das Gebiet  $\mathfrak{B}$  schlicht abbildet. Um diesen Bedingungen eine für die Berechnung bequemere Form zu geben, werden in der (aus dem Nachlaß herausgegebenen) Arbeit die Beziehungen untersucht, die zwischen den Koeffizienten  $a_r$  einer Potenzreihe

$f(z) = z \sum_{v=0}^\infty a_v z^{-v}$ ,  $a_0 = 1$  und den Koeffizienten  $c_{\mu v}$  des  $m$ -ten Faberschen Polynoms von  $f(z)$   $P_m(f) = z^m + \sum_{v=1}^\infty c_{mv} z^{-v}$  bestehen. Unter Anwendung der Matrizen

$A = (a_{\mu, \mu-v})$ ,  $B = (a_{\mu, \mu+v})$ ,  $C = (c_{\mu v})$  mit positiven ganzen  $\mu, v$ ,  $a_{\mu 0} = 1$ ,  $a_{\mu, -k} = 0$  für  $k \geq 1$  gilt  $B = AC$ , woraus eine explizite Darstellung der  $c_{\mu v}$  als Polynome in den  $a_r$  mit nichtnegativen Koeffizienten folgt. Daraus ergibt sich unmittelbar die von Grunsky mit Hilfe des Residuensatzes abgeleitete Symmetrieformel  $v c_{\mu v} = \mu c_{v \mu}$ .

V. Garten.

**Schaeffer, A. C. and D. C. Spencer:** The coefficients of schlicht functions. Duke math. J. 10, 611—635 (1943); 12, 107—125 (1945); Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 111—116 (1946).

Bezeichnungen: 1.  $F(E)$  sei die Familie der regulären schlichten Funktionen  $f(z)$  auf  $E$ :  $|z| < 1$  mit  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ . 2.  $C$  die Menge der Bildbereiche  $G$  der regulären schlichten Funktionen aus  $F(E)$ . 3.  $F(G)$  Familie der regulären schlichten Funktion  $f(z)$  auf  $G$  mit der Entwicklung um 0:  $f(z) = z + \sum_{n=2}^\infty a_n z^n$ .

4.  $\alpha_n(G) = \sup |a_n|$  ( $f \in F(G)$ ),  $\gamma_n = \inf \alpha_n(G)$ ,  $\Gamma_n = \sup \alpha_n(G)$  ( $G \in C$ ). 5. Für  $f \in F(E)$  werden Polynome  $\lambda_r$  in den Koeffizienten  $a_n$  von  $f$  definiert durch  $f(z)/f'(z) = 2 \sum_{r=1}^\infty \lambda_r z^r$ . 6.  $a_n^{(r)}$ ,  $A_n^{(r)}$  sind definiert durch  $f'(z) = \sum_{n=r}^\infty a_n^{(r)} z^n$  bzw.

durch  $\frac{1}{2}(v-1) f'(z)/f(z) = \sum A_n^{(v)} z^n$ . 7. Jedem Punkt  $(a_2, \dots, a_n)$  im komplexen euklidischen  $R_{n-1}$ , also im reellen euklidischen Raum  $E_{2n-2}$  ( $a_k = x_k + i y_k$ ) heißt eine Funktion  $f(z) = z + \sum b_r z^r$  zugeordnet, wenn  $b_i = a_i$  für  $2 \leq i \leq n$ . Die Menge aller Punkte im  $R_{n-1}$ , welche zu  $f$  aus  $F(E)$  gehören, bilden den Koeffizientenbereich  $V_n$  (für  $n=2$  ist  $V_2$  der Kreis  $|a_2| \leq 2$ ). 8.  $F(a_2, a_2, \dots, a_n, \bar{a}_n)$  reell mit stetigen ersten Ableitungen  $F' = \frac{1}{2}(F'_{x_r} - i F'_{y_r})$  ( $a_r = x_r + i y_r$ ) mit  $\sum_{r=2}^n |F'_r|^2 > 0$  definiert auf einem Bereich, welcher  $V_n$  enthält. Dann werden folgende Differentialgleichungen hergeleitet:

I. 1. Ist  $f(z)$  aus  $F(E)$  mit  $|a_n| = \alpha_n(E)$ , so ist

$$(1) \quad (z f'(z))^2 \alpha_n^{-1} \sum_{r=2}^n a_n^{(v)} f(z)^{-v-1} = n-1 + \sum_{v=1}^{n-1} (v \alpha_v \alpha_n^{-1} z^{-n+v} + \bar{\alpha}_v \bar{\alpha}_n^{-1} z^{n-v}).$$

2. Ist  $n > 1$  und  $G \subset C$ ,  $f(z) \in F(G)$  mit  $|a_n| = \alpha_n(G) = \Gamma_n$ , so ist

$$(2) \quad (z f'(z))^2 \sum_{r=2}^n a_n^{(v)} f(z)^{-v-1} = (n-1) \alpha_n (z w'(z)/w(z))^2 + \sum_{v=1}^{n-1} v \alpha_v z^{-n+v},$$

wo  $z(w)$  den Kreis  $|w| < 1$  auf  $G$  abbildet.

II. 1. Ist  $G(z) \in F(E)$ , dann auch  $a^{-1} G(az) \in F(E)$  für jedes  $a$  mit  $0 < a < 1$ ; ist  $\gamma > 0$  und genügend klein, dann vermittelt  $w = g(z) = \gamma a^{-1} G(az)$  eine Abbildung von  $E$  auf einen in  $|w| < 1$  liegenden Bereich, der von einer einfachen analytischen Jordankurve begrenzt wird. Es gibt dann eine Funktion  $g(z, t) = \gamma e^t (z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n)$ , definiert auf  $E$  und  $0 \leq t \leq T = -\log \gamma$ , wo die  $a_v$  stetige Ableitungen nach  $t$  besitzen,  $g(z, 0) = g(z)$ ,  $g(z, T) = z$  ist und  $g(z, t)$  einer Differentialgleichung  $(3) \quad dg(z, t)/dt = z p(z, t) dg(z, t)/dz$  genügt, wo  $p(z, t) = 1 + 2 \sum c_v(t) z^v$  regulär auf  $E$  und dort positiven Realteil besitzt. Diese Differentialgleichung ist mit der Löwnerschen nahe verwandt. — 2. Für die  $f \in F(E)$  mit maximalen  $|\alpha_n|$  gilt

$$(4) \quad (z f'(z)/f(z))^2 \alpha_n^{-1} \sum_{r=2}^n A_n^{(v)} f(z)^{-v+1} = \sum_{v=1}^{n-1} (n-2v+1) (\alpha_v \alpha_n^{-1} z^{-n+v} + \bar{\alpha}_v \bar{\alpha}_n^{-1} z^{n-v}).$$

III.  $F$  sei definiert nach Bezeichnung 8. Dann kann  $F$  sein Maximum nur in einem Randpunkt  $a = (a_2, \dots, a_n)$  von  $V_n$  annehmen. Ist  $f(z)$  eine zugehörige Funktion, so erfüllt sie die Differentialgleichung

$$(5) \quad (z f'(z))^2 \sum_{r=2}^n A_r f(z)^{-r-1} = \sum_{v=-(n-1)}^{n-1} B_v z^{-v},$$

wo  $A_r = \sum_{k=r}^n a_k^{(v)} F_k$ ,  $B_r = \sum_{k=1}^{n-r} k a_k F_k$ , ( $1 \leq r \leq n-1$ ),  $B_0 = \sum_{k=2}^n (k-1) a_k F_k$ ,  $B_{-r} = \bar{B}_r$  ( $r < 0$ ).

Die Ableitungen in (5) sind an der Stelle  $a$  zu nehmen. Es ist  $B_0$  und die rechte Seite von (5) nicht negativ auf  $|z|=1$ , und sie besitzt dort mindestens eine Nullstelle. Zu jedem Randpunkt  $a$  von  $V_n$  gehört wenigstens ein  $f \in F(E)$ , welches einer Differentialgleichung der Gestalt (5) genügt. Eine Gleichung (5) heißt  $D_n$ -Gleichung, wenn gilt: Ist  $k$  der größte Index, für den  $B_k \neq 0$ , dann sei  $A_k = \bar{B}_k$  und  $A_r = 0$  für  $r > k$  (und umgekehrt). Eine auf  $E$  reguläre Funktion  $f(z)$  [mit  $f'(0) = 1$ ] heißt  $D_n$ -Funktion, wenn sie einer  $D_n$ -Gleichung genügt. Diese Funktionen gehören stets zu  $F(E)$  und entsprechen umkehrbar eindeutig den Randpunkten von  $V_n$ . Die Herleitung der Differentialgleichungen (1) bis (5) erfolgt nach der Variationsmethode. [Für diese Methode und die dazugehörige Literatur sei auf das Buch der Verf. (vgl. dies. Zbl. 41, 409), insbesondere Ch. II verwiesen.] Aus den mannigfachen Anwendungen, welche die Verff. machen, seien einige herausgegriffen: 1. Einfache Herleitung von  $\alpha_2(E) = 2$ ,  $\alpha_3(E) = 3$  mittels I (1) bzw. II (3); Bestimmung von  $V_3$  nach den Methoden von III;  $\alpha_n(E) = \gamma_n$ ; ist die Vermutung

$\alpha_n(E) = n$  richtig, dann  $\Gamma_n = 4^{n-1}$ . 2. Mittels II (4) wird einerseits das Resultat von Bieberbach und Faber  $|\alpha_2| \leq 1$ ,  $|\alpha_3| \leq 1$  gezeigt, andererseits das interessante Ergebnis  $\max |\alpha_4| > 1$  erhalten. 3. Mit Hilfe der Variationsmethode wird die ungerade schlichte Funktion  $\varphi(z) = z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \dots$  mit extremalem  $b_5$  charakterisiert, für die nach Fekete und Szegő (vgl. dies. Zbl. 6, 353)  $b_5 = e^{-2/3} + \frac{1}{2} > 1$  ist. Verff. zeigen, daß es für jedes  $n > 1$  Funktionen  $\varphi$  mit reellen Koeffizienten und  $|b_{2n+1}| > 1$  gibt. Für die Resultate der dritten Arbeit sei auf das Buch der Verff. (dies. Zbl. 41, 409) verwiesen. [Vgl. dazu auch die Fortsetzung von III (s. dies. Zbl. 36, 189).] E. Hlawka.

**Spencer, D. C.:** Some remarks concerning the coefficients of schlicht functions. J. Math. Physics 21, 63—68 (1942).

Verf. konstruiert für jedes  $n > 1$  explizit reguläre schlichte Funktionen  $\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} z^{2k+1}$  ( $b_1 = 1$ ), für die  $|b_{2n+1}| > 1$ . Vgl. die vorstehend besprochenen Arbeiten von Schäffer und Spencer. E. Hlawka.

**Spencer, D. C.:** Note on mean one-valent functions. J. Math. Physics 21, 178—188 (1942).

Ist  $f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$  für  $|z| < 1$  im Mittel 1-wertig,  $d = \inf |f(z)/z|$  für  $|z| < 1$ , dann wird gezeigt:  $d \geq |a_1|/A$  mit  $A < 7$ . (Die scharfe Schranke ist wahrscheinlich 4.) Zur Methode vgl. die frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 25, 259). E. Hlawka.

**Spencer, D. C.:** A function-theoretic identity. Amer. J. Math. 65, 147—160 (1943).

Es sei  $f$  regulär in  $|z| \leq r$ ,  $n(r, w)$  Anzahl der Nullstellen von  $f = w$  in  $|z| \leq r$ ,  $p(r, R) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} n(r, R e^{i\Phi}) d\Phi$ ;  $n(w)$ ,  $p(R)$  die Grenzwerte dieser Funktion für  $r \rightarrow 1$ . Es sei weiter  $g(R)$  für  $R \geq 0$  absolut stetig,  $G(R) = \int g(R) d(\log R)$ ,  $A(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} p(r, R) dg(R)$ . Ist  $V(r)$  die Menge der Punkte  $r = [2g(R)]^{1/2} e^{i\Phi}$  für die  $R e^{i\Phi}$  zur Bildmenge von  $|z| \leq r$  bei der Abbildung  $f$  gehört (mehrfache Punkte mehrfach gezählt), dann ist  $A(r)$  für  $g(r) \geq 0$  und monoton nicht abnehmend, der Flächeninhalt von  $V(r)$ . Dann lautet die Identität

$$r \frac{d}{dr} \int_{-\pi}^{\pi} G(|f(re^{i\Phi})|) d\Phi = \int_{|z|=r} g(R) d\Phi = A(r) + 2\pi g(0) n(r, 0)$$

[außer wenn  $g(0) \neq 0$  und  $f = 0$  auf  $|z| = r$ ]. Für meromorphe Funktionen kommt noch rechts  $-2\pi g(\infty) n(r, \infty)$  hinzu. Spezialfälle sind die Jensensche Formel [ $g(R) = 1$ ], die Identität von Hardy-Stein [ $g(R) = \lambda R^{\lambda}$  für  $\lambda > 0$ ] und die Ahlforsche Formulierung des Nevanlinnaschen Hauptsatzes. Ist  $\psi$  eine weitere absolut stetige nicht abnehmende Funktion mit  $\psi(0) = 0$ , dann nennt Verf.  $f$  im Mittel  $p$ -wertig ( $\psi$ ), wenn es eine Zahl  $p > 0$  gibt, so daß für alle  $R_1 > 0$  gilt:

$$\int_{R_1}^{\infty} p(R) d\psi(R) \leq p \int_0^{\infty} d\psi(R). \quad p\text{-wertige Funktionen fallen unter diese Klasse.}$$

Für  $\psi(R) = R^2$  erhält man die vom Verf. früher studierten, im Mittel  $p$ -wertigen Funktionen (vgl. dies. Zbl. 25, 259; 28, 401). Ist nun  $f$  im Mittel  $p$ -wertig ( $\psi$ ),

dann gilt, wenn formal  $M(F) = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} F(\varphi(R)) d(-p(R))$  gesetzt wird (Bez.

des Ref.), für  $\varphi'' \geq 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ :  $M(\varphi) \leq \varphi(M)$ , bzw. für  $\varphi'' \leq 0$ ,  $\varphi(0) \geq 0$ :



$M(q) = \varphi(M)$ , wo  $M = M(1)$  und  $\varphi(x)$  reelle Funktion. Durch Kombination der Sätze 1 und 2 erhält Verf. weitere Sätze über im Mittel  $p$ -wertige Funktionen,

z. B.  $\int_0^\infty p(e, R) d(R)^2 = p M^2(e, f)$ , wo  $M(e, f) = \max_{|z|=e} f$ . Zum Abschluß wird ein Satz bewiesen, der den bekannten Satz von Nevanlinna lokalisiert (vgl. dies. Zbl. 14, 163; insbes. 197).

E. Hlawka.

**Biernacki, M.:** Sur les fonctions en moyenne multivalentes. Bull. Sci. math., II. Sér. 70, 51—76 (1946).

$f(z)$ , méromorphe dans  $D$ , est  $p$ -valente en moyenne (avec  $a$  pour centre) si  $\int_{-\pi}^{+\pi} n(a + R e^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi p$  quel que soit  $R$ ,  $n(a + R e^{i\varphi})$  étant le nombre de racines de  $f(z) = a + R e^{i\varphi}$ . L'A. définit de même des fonctions  $p$ -valentes en moyenne superficielle. Extension à ces fonctions de propriétés des fonctions  $p$ -valentes. (Voir, sur le même sujet, le mémoire, recensé ci-dessus, de Spencer, Amer. J. Math. 65, 147—160).

J. Dufresnoy.

**Szegő, G.:** Power series with multiply monotonic sequences of coefficients. Duke math. J. 8, 559—564 (1941).

**Robertson, M. S.:** Univalent power series with multiply monotonic sequences of coefficients. Ann. of Math., II. Ser. 46, 533—555 (1945).

L. Fejér (vgl. dies. Zbl. 15, 109) zeigte: Ist eine Folge  $(a_n)$  4-fach monoton (eine Folge ist  $k$ -fach monoton, wenn  $f^{(k)} a_n \geq 0$  für  $j = 0, 1, \dots, k$  und alle  $n$ ),

dann ist  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  regulär und schlicht in  $|z| < 1$ . Sind  $s_n^{(k)}(z)$  definiert durch

$$\sum_{j=0}^n \binom{n-k}{k} \binom{j}{k} z^j, \text{ so ist } f(z) = \sum a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(k)} a_n s_n^{(k-1)}(z) + (1-z)^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

die zugrunde liegende Identität. Szegő zeigt: Der Satz von Fejér bleibt richtig, wenn die Folge  $(a_n)$  nur 3-fach monoton ist, aber ist nicht immer richtig, wenn sie nur 2-fach monoton ist, indem gezeigt wird: Es gibt Zahlen  $p > 0$ ,  $q > 0$ , natürliche Zahlen  $m, n$ , so daß für passendes  $z$  ( $|z| < 1$ ) die Ableitung von  $f(z) = p s_m^{(1)}(z) + q s_n^{(1)}(z)$  verschwindet. Nach E. Egervary (dies. Zbl. 15, 306) ist  $s_n^{(1)}(z)$  schlicht in  $|z| \leq 1$ . Robertson stellt hinreichende Bedingungen dafür auf,

daß bei gegebenen  $c_k \geq 0$  ( $1 \leq k \leq m$ ; nicht alle  $c_k$  Null)  $\sum_{k=1}^m c_k s_{n+k-1}^{(1)}(z)$  schlicht

in  $|z| \leq 1$  ist. Dies ist z. B. sicher der Fall, wenn die Folge  $(c_3, c_4, \dots, c_m, 0, \dots)$  2-fach monoton ist. Er gibt einen neuen Beweis des Satzes von Fejér, bestimmt sogar eine positive, untere Schranke für  $|f(z_1) - f(z_2)|$  ( $z_1 \neq z_2$  ( $\neq 1$ )) auf  $|z| = 1$  und zeigt, daß zwar nicht immer die Partialsummen von  $f(z)$  schlicht sind, dies

aber für die Polynome  $\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (a_k - a_{n+1}) z^k$  zutrifft. Er verschärft den Satz,

indem er zeigt: Ist  $(a_n)$  2-fach monoton und für jedes  $n > n_0$ ,  $(B_2^n, B_3^n, \dots, B_{n-1}^n, 0, \dots)$  2-fach monoton, dann ist  $f(z) = (1-z)^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  (wenn  $\neq 0$ ) regulär und schlicht in  $|z| < 1$ . Dabei ist  $B_k^n = \sum_{j=k-1}^{n-k-1} f^{(2)} a_j + f^{(2)} a_{n-k} + f_n^{(2)} a_{n-k} A^{(1)} a_n$  für  $n \geq k$ .

Der Satz von Szegő und Robertson bedingen einander nicht, sondern ergänzen sich.

E. Hlawka.

**Robertson, M. S.:** The coefficients of univalent functions. Bull. Amer. math. Soc. 51, 733—738 (1945).

Anschließend an die Voraussetzungen des Satzes von Fejér (siehe vorstehendes Referat), welcher  $a_n - a_{n+1} \geq 0$  impliziert, wird gezeigt: Ist (1)  $f(z) = \sum a_n z^n$  (die  $a_n$  reell,  $a_0 = a_1 = 1$ ) regulär in  $|z| < 1$ , konvex in der Richtung der ima-

ginären Achse, dann ist

$$a_{n-1} - a_{n+1} \leq 4n(n^2 - 1)^{-1} (1 - |a_n|) \quad (n \text{ gerade}),$$

$$|a_{n-1} - a_{n+1}| \leq 4n(n^2 - 1)^{-1} (1 - \delta_n) \quad (n \text{ ungerade}).$$

Die Schranken sind scharf (für  $f(z) = z(1 - z)^{-1}$ ). Daraus folgt: Ist (1) regulär und schlicht in  $|z| < 1$ , dann ist

$$(n + 1) a_{n-1} - (n - 1) a_{n+1} \leq 4(n - |a_n|) \quad (n \text{ gerade}),$$

$$|(n + 1) a_{n-1} - (n - 1) a_{n+1}| \leq 4(n - a_n) \quad (n \text{ ungerade}).$$

Die Schranken sind scharf und werden für  $z(1 - z)^{-2}$  angenommen. *E. Hlawka.*

**Dvoretzky, Aryeh:** Sur une classe de fonctions univalentes. C. r. Acad. Sci. Paris **221**, 605—607 (1945).

Es sei (1)  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  schlicht in  $|z| < 1$ . Verf. behauptet: Ist  $\psi(n)$  eine nichtnegative Funktion (definiert für  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) mit  $\sum_{r=1}^n \psi(r)/r = o(n)$ , so gibt es ein  $\delta(\psi) > 0$ , so daß für alle  $f(z)$  aus (1), für welche die obere Dichte der  $a_n$  mit  $|a_n| > \psi(n)$  kleiner als  $\delta(\psi)$  ist,  $a_n = o(w)$  ist. [Obere Dichte einer Teilfolge  $(a_{\lambda_n})$  ( $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ) ist hier  $\lim_{n \rightarrow \infty} n/\lambda_n$ .] Benützt wird  $|a_n| \leq \epsilon n$  (Littlewood). *E. Hlawka.*

**Atkins, H. P.:** On fractional derivatives of univalent functions. Bull. Amer. math. Soc. **52**, 1060—1064 (1946).

Unter Voraussetzung der Bieberbachschen Vermutung für die Koeffizienten schlichter Potenzreihen werden Abschätzungen für die Ableitungen gebrochener Ordnung einer solchen Funktion gegeben, die sich bei ganzer Ordnung auf solche von Marty (dies. Zbl. **4**, 261) reduzieren. *H. Grunsky.*

**Alenitzyn, G.:** On the coefficients of  $p$ -valent functions. Mat. Sbornik, n. Ser. **10** (52), 51—58 (1942) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Les principaux résultats ont déjà été publiés par D. C. Spencer en 1940—1941. *J. Dufresnoy.*

(1) **Yosida, Tokunosuke:** Bemerkungen über die  $p$ -wertigen Funktionen. Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 16—19 (1944).

(2) **Biernacki, M.:** Sur les domaines couverts par des fonctions multivalentes. Bull. Sci. math., II. Sér. **70**, 45—51 (1946).

(3) **Yosida, Tokunosuke:** Ein Satz über die  $p$ -wertigen Funktionen. Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 409 (1944).

(4) **Joh, Kenzo and Yutaka Hukusima:** On the „Verzerrungssatz“ of  $p$ -valent functions. Proc. phys.-math. Soc. Japan, III. Ser. **25**, 377—383 (1943).

(5) **Kobori, Akira:** Sur les fonctions multivalentes. Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 216—217 (1944).

(6) **Gelfer, S.:** Sur les bornes de l'étoilement et de la convexité des fonctions  $p$ -valentes. Mat. Sbornik, n. Ser. **16** (58), 81—86 (1945) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

(1) Soit, pour  $|z| > 1$ , une fonction  $w(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$  qui est holomorphe.

$[w(z)]^p$  étant  $p$ -valente. Alors,  $\sum n |a_n|^2 < 1$  et  $w(z)$  est univalente pour  $|z| > 1/2$ . —

(2) Soit, pour  $|z| < 1$ , une fonction  $f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$  holomorphe et  $p$ -valente. Alors,  $f(z)$  prend toutes les valeurs de module  $< 1/4$ . — (3) On a  $|a_{p+1}| \leq 2p$  et  $|f(z)| \geq (1,0617)^{-p} |z|^p (1 + |z|)^{-2p}$ . — (4)  $|f(z)| \leq 16^p |z|^p (1 - |z|)^{-2p}$ . —

(5)  $|f(z)| \leq (1 + |z|^{1/2})^{2p} |z|^p (1 - |z|)^{-2p}$  pour  $|z| < \text{th } 1$ . — (6)  $f(z)$  a un rayon d'étoilement compris entre  $1/13$  et  $\text{th } 7/4$  et  $F(z) = 1/f(z)$  a un rayon de convexité

$> 0,55$ . *J. Dufresnoy.*

Robertson, M. S.: Star center points of multivalent functions. Duke math. J. 12, 669—684 (1945).

Inégalité portant sur les coefficients du développement en série de puissances d'une fonction  $f(z)$  holomorphe et  $p$ -valente dans  $|z| < 1$  lorsque le domaine décrit par  $f(z)$  est étoilé. J. Dufresnoy.

Boas jr., R. P.: A density theorem for power series. Amer. J. Math. 68, 319—320 (1946).

Es wird angenommen:  $|z| = 1$  ist der Konvergenzkreis von  $f(z) = \sum c_n z^n$ ;  $\{c_n\}$  ist nicht beschränkt; es existieren  $M, L, \beta$  ( $\beta > 1$ ) derart, daß  $|c_{\lambda_n}| < M$ , wenn  $|\lambda_n - n\beta| < L$ . Dann gibt es keine integrierbare Funktion  $\psi(\theta)$  derart, daß  $f(re^{i\theta}) = \psi(\theta)$ ,  $0 < r < 1$  in irgend einem  $\theta$ -Intervall von der Länge  $> 2\pi(1 - 1/\beta)$ . V. Paatero.

Duffin, R. J. and A. C. Schaeffer: Power series with bounded coefficients. Amer. J. Math. 67, 141—154 (1945).

Sei  $f(z)$  eine ganze Funktion,  $|f(z)| \leq A e^{k|z|}$ ,  $k < \pi$ ,  $|f(\lambda_n)| \leq 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), wo  $|\lambda_n - n| \leq T$ ,  $|\lambda_n - \lambda_m| \geq \gamma > 0$  ( $n \neq m$ ),  $T$  und  $\gamma$  Konstanten. Dann ist  $|f(z)| \leq N(T, \gamma, k) e^{k|z|}$  ( $z = x + iy$ ). Ein gleiches Resultat gilt für  $f(z)$ , welche für  $R(z) \neq 0$  regulär ist und sonst den obigen Bedingungen genügt. Falls die Folge  $\{\lambda_n\}$  alle ganzen Zahlen enthält außer einer Folge  $\{\mu_n\}$  derart, daß  $\mu_{n+1} - \mu_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , dann ist  $f(z)$  auf der ganzen reellen Achse beschränkt. Als Anwendung u. a. folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Szegő [Math. Ann. 87, 90—111 (1922)]: Sei  $f(z) = \sum a_n z^n$  in einem Sektor des Einheitskreises beschränkt. Wenn die Koeffizienten  $a_n$  nur endlich viele verschiedene Werte annehmen, so ist  $f(z)$  rational. V. Paatero.

Manning, Rhoda: On the derivatives of the sections of bounded power series. Ann. of Math., II. Ser. 43, 617—622 (1942).

Sei (1)  $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  für  $|z| < 1$  regulär,  $|f(z)| \leq 1$  und  $s_n(z) = a_1 z + \dots + a_n z^n$ . Der Radius  $R_n$  des größten Kreises  $|z| \leq R_n$ , in welchem  $|s'_{n+1}(z)| \leq 1$  für alle Funktionen (1) gilt, ist die kleinste positive Wurzel der Gleichung  $1 - 2r - r^2 + (-1)^n \{(2n+4)r^{n+1} + (2n+2)r^{n+2}\} = 0$ , falls  $n = 2, 4, 6, 8, 10$ . Für ungerades  $n$  ist der Satz schon früher von I. Schur und G. Szegő bewiesen worden (S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. 1925, 545—560). Nach dem Satz ist für gerades  $n$  im allgemeinen  $|s'_{n+1}(z)| \leq 1$  in einem größeren Kreis als  $|f'(z)| \leq 1$  ist. Auch eine andere verwandte Verallgemeinerung wird bewiesen. V. Paatero.

Kakeya, Sôichi: On the function whose imaginary part on the unit circle changes its sign only twice. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 435—439 (1942).

Let  $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$  be regular in  $|z| < 1$  and continuous in  $|z| \leq 1$ . Suppose that the imaginary part of  $f(z)$  on the unit circle  $|z| = 1$  changes its sign only at two points  $e^{i\sigma_1}$  and  $e^{i\sigma_2}$  where  $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 \leq 2\pi$ . The author studies properties of  $f(z)$ , by applying the fact that  $g(z) = e^{-i(\sigma_1 + \sigma_2)/2} \cdot z^{-1} (e^{i\sigma_1} - z)(e^{i\sigma_2} - z)$  is positive on the arc  $z = e^{i\theta}$ ,  $\sigma_1 < \theta < \sigma_2$  and negative for the complementary arc. First, he proves a theorem concerning the domain  $D_n$  in which  $c_n$  lies, when  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  are fixed. In the particular case where  $\sigma_1 = 0$  and  $\sigma_2 = \pi$ , this theorem gives a known inequality  $|c_n| \leq n$  [Ozaki, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku 4, p. 79 (1941)]. Next, letting  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  vary, he proves that  $|c_n| < n^2$  and this inequality is sharp. K. Noshiro.

Golomb, Michael: The convergence of sequences of Hadamard determinants. Duke math. J. 11, 759—777 (1944).

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  sei regulär in dem abgeschlossenen Kreis  $C$  um  $z = 0$ , ausgenom-



men  $p$  Pole  $z_1, \dots, z_p$  im Innern und  $q$  Pole  $z_{p+1}, \dots, z_{p+q}$  auf dem Rand von  $C$  (jeder Pol so oft aufgeschrieben, wie seine Vielfachheit angibt). Nach J. Hadamard gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{(p+q)} / d_{n+1}^{(p+q)} = z_1 z_2 \dots z_{p+q}$ , wenn  $d_n^{(m)}$  die  $m$ -reihige Determinante  $(c_{ij})$

mit  $c_{ij} = c_{n-1+i+j}$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) bedeutet. Es gibt noch weitere Fälle außer  $m = p + q$ , in denen (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{(m)} / d_{n+1}^{(m)}$  existiert. Dies ist z. B. der Fall für  $m = p + \kappa$ ,

wenn  $\kappa$  die Anzahl der Pole höchster Ordnung (jeder einfach gezählt) auf dem Rand von  $C$  ist [Verf., Bull. Amer. math. Soc. 49, 581—592 (1943)]. Andererseits existiert (1) nicht für alle  $m$  zwischen  $p$  und  $p + q$ . Jetzt zeigt Verf., daß die Existenz von (1) im allgemeinen nicht von der relativen Lage der Pole, sondern nur von ihren Vielfachheiten abhängt. Diejenigen  $m$ , für die Konvergenz stattfindet, werden mit Hilfe eines diophantischen Maximumproblems charakterisiert.

W. Meyer-König.

**Piranian, George:** Algebraic-logarithmic singularities and Hadamard's determinants. Duke math. J. 11, 147—153 (1944).

Über die Begriffe a.-l. (algebraisch-logarithmische) Singularität und Gewicht (= compound order bei Verf.) eines a.-l. singulären Elementes vgl. dies. Zbl. 39, 304, Referat über die Arbeit von H. G. Eggleston. Unter dem Gewicht der a.-l. singulären Stelle  $z_0$  einer Funktion  $f(z)$  [oder auch: Gewicht von  $f(z)$  bei  $z_0$ ] versteht man das größte der Gewichte der zugehörigen a.-l. singulären Elemente. Eine a.-l. Singularität heißt gewöhnlich, wenn nur eines der zugehörigen singulären Elemente das Gewicht der a.-l. Singularität besitzt. Verf. löst das Problem: Gegeben ist die Folge  $a_n$ , und es ist bekannt, daß die Funktion  $f(z) = \sum a_n / z^n$  bei  $z_0$  eine gewöhnliche a.-l. Singularität besitzt und für  $|z| > |z_0|$  abgesehen von den Polen  $z_1, \dots, z_m$  mit den Vielfachheiten  $r_1, \dots, r_m$  regulär ist: gesucht ist die compound order von  $f(z)$  bei  $z_0$ . Die beiden Komponenten des fraglichen Gewichtes werden als Grenzwerte zweier Folgen dargestellt, deren Glieder explizit angegeben sind und im wesentlichen  $z_0$ , die  $z_i$ , die  $r_i$  und die Hadamardschen Determinanten  $(a_{ij})$  mit  $a_{ij} = a_{n-2+i+j}$  ( $i, j = 1, \dots, p+1$ ;  $p = r_1 + \dots + r_m$ ) enthalten. Beim Beweis wird an ein Resultat von R. Jungen (dies. Zbl. 3, 119) angeschlossen.

W. Meyer-König.

**Vijayaraghavan, T.:** On functions represented by certain series. Quart. J. Math., Oxford Ser. 13, 113—116 (1942).

Satz: Ist (1)  $a_n \geq 0$ , (2)  $a_n = O(1)$  und unendlich oft  $a_n \neq 0$ , so ist für  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n / (1 - z^n)$  und für  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n / (1 + z^n)$  der Einheitskreis  $|z| = 1$  natürliche Grenze. Bekannte Beispiele zeigen, daß weder (1) noch (2) wegb bleiben kann. Für ganzzahlige  $a_n$  wurde der Satz vermutet von D. Hansen und bewiesen von G. Pólya [Proc. London math. Soc., II. Ser. 21, 22—38 (1922), insbes. p. 36].

W. Meyer-König.

**Mandelbrojt, S.:** L'évaluation des coefficients d'une représentation asymptotique générale. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 471—473 (1946).

Eine Abschätzung der Koeffizienten exponentieller Summen, welche gewisse Funktionen asymptotisch darstellen. Das Resultat ist viel allgemeiner als frühere verwandte Resultate des Verf.

V. Paatero.

**Mandelbrojt, S.:** Sur une inégalité fondamentale. Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 63, 351—378 (1946).

Abschätzung der Koeffizienten einer Dirichletschen Reihe (\*)  $\sum d_k e^{-\lambda_k s}$  ( $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ,  $s = \sigma + it$ ), deren Partialsummen eine in einem rechts ins Unendliche reichenden Gebiete holomorphe Funktion  $F(s)$  hinreichend genau approximieren. Der Approximationsgrad  $p_n(x)$  mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} p_n(x) = \infty$  wird durch

$\inf_{m \geq n} \sup_{\sigma \geq x} |F(s) - \sum_{k=1}^m d_k e^{-\lambda_k s}| \leq e^{-p_n(x)}$  erklärt, und demgemäß zieht die den  $p_n(x)$  auferlegte Bedingung die Konvergenz von (\*) nicht nach sich; sie ist desto schärfer, je größer die (geeignet erklärte) Dichte der  $\lambda_k$ -Folge und je kleiner die vertikale Ausdehnung von  $J$  ist.  $F(s)$  sei durch einen „Kanal“, d. h. ohne aus einer Umgebung eines Jordanschen Bogens hinauszutreten, von  $J$  aus bis in einen Kreis  $C(s_0, \pi R)$  ( $s_0 = \sigma_0 - i t_0$ ) hin analytisch fortsetzbar. Die Breite des Kanals darf nicht unter einer der Dichte von  $\{\lambda_k\}$  proportionalen Schranke liegen. Dann hängt die Abschätzung für  $d_n$  von der Folge  $\{\lambda_k\}$  (insbes. explizit von  $\lambda_n$ ), von  $R$ ,  $\sigma_0$  und dem Maximalwert  $M$  von  $F(s)$  in  $C(s_0, \pi R)$  ab. Sie ist desto restriktiver, je kleiner  $\lambda_n$ ,  $M$  und  $\sigma_0$  sind und je geringer der durch eine spezielle Funktion definierte durchschnittliche, nicht negativ gerechnete, Überschuß der Zahlen  $\lambda_k$  in bezug auf ihre asymptotische Dichte ist. Verf. beweist die stärkste von mehreren, nicht völlig äquivalenten, Varianten dieses „Hauptsatzes“, der eine beträchtliche Verschärfung seiner früheren Ergebnisse ist. — Anwendungen auf Quasianalytizität: Eine im Intervall  $[0, \infty)$  beschränkte und unendlich oft differenzierbare Funktion  $f(x)$ , deren jede Ableitung beschränkt ist, verschwindet identisch, wenn es eine genügend dichte Folge von Ableitungen  $f^{(v_n)}$  mit  $f^{(v_n)}(0) = 0$  gibt, wobei über den „Charakter“  $C_f(\sigma) = \sup_{n \geq 1} (n\sigma - \log m_n)$  von  $f$  ( $m_n = \sup_{x > 0} |f^{(v_n)}(x)|$ )

eine Art von Beschränkung von unten vorausgesetzt wird, desto loser, je größer die Dichte der  $v$ -Folge ist. Dieser Satz ist schärfer als die früheren Ergebnisse über die Quasianalytizität, insbes. enthält er den Denjoy-Carleman'schen Satz als Sonderfall. Es gilt auch ein Satz in der umgekehrten Richtung, welcher die Existenz einer nicht identisch verschwindenden, in  $[0, \infty)$  beschränkten, unendlich oft differenzierbaren Funktion  $f(x)$  mit  $f^{(v_n)}(0) = 0$  und nicht allzu kleinem Charakter feststellt, wenn nur die Komplementärfolge  $\{q_n\}$  zur  $v$ -Folge die Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log q_n = 0$  erfüllt. Dieses Resultat zeigt die Schärfe der vorangehenden.

Den Beweisen wohnt große analytische Feinheit inne. Die Präzision wird auf Kosten einer Anhäufung von Begriffen und Zusammenhängen erzielt, die den Wortlaut der Sätze kompliziert macht. St. Hartman.

Miller, Glen T. and Howard K. Hughes: Analytic continuation of functions defined by factorial series. Amer. J. Math. 65, 423—432 (1943).

Die Fakultätenreihe  $\Omega(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g(m) (-1)^{m(k+1)} [z(z+1) \dots (z+m)]^{-1}$ , wo  $k > 0$  ganz und  $z$  komplex ist, besitzt eine endliche Konvergenzabszisse. Unter gewissen Bedingungen für  $g(w)$  als Funktion der komplexen Veränderlichen  $w$  ist  $\Omega(z)$  in die ganze endliche  $z$ -Ebene, abgesehen von den Stellen  $z = 0, -1, -2, \dots$  fortsetzbar, und es läßt sich für  $\Omega(z)$  dort eine Integraldarstellung angeben. Damit wird ein auf  $k = 0$  bezügliches Ergebnis von H. K. Hughes [dieselbe Zs. 53, 757—780 (1931) (dies. Zbl. 3, 12), insbes. p. 771] ausgedehnt. Beweis-methode anschließend an W. B. Ford (dies. Zbl. 16, 124) und C. V. Newsom (dies. Zbl. 19, 171). W. Meyer-König.

Marth, Ella: Further properties of Garvin's  $F$ -series. Duke math. J. 12, 645—653 (1945).

Es handelt sich um die verallgemeinerte Lambert-Reihe  $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n\lambda}$  ( $1 - z^{\mu\mu}$ )<sup>-1</sup>,  $\lambda$  und  $\mu$  positiv ganz [M. C. Garvin, dies. Zbl. 14, 304]. Verf. untersucht  $\lim (1 - z z_0) F(z)$  für radiale Annäherung und für Winkelraumannäherung von  $z$  an  $z_0 = e^{2\pi i \gamma}$ , wobei die Fälle  $\gamma$  rational bzw. irrational zu unterscheiden sind. Beispiel: Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$  und  $\gamma$  irrational, so ist der fragliche Grenzwert Null bei radialer Annäherung. W. Meyer-König.

Slobodetzky, L. N.: Sur la représentation des fonctions régulières dans le cercle unitaire par certaines séries d'interpolation. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 32, 13—15 (1941).

Groot, J. de: A theorem concerning analytic continuation. I, II. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 49, 213—222, 793—801 = Indagationes Math. 8, 110—119, 496—504 (1946).

Die komplexe Zahlenfolge  $z_j$  besitze lauter verschiedene Glieder und konvergiere gegen  $z'$ . An den Stellen  $z_j$  seien Funktionswerte  $w_j$  vorgegeben. Gibt es eine in der Umgebung der Stelle  $z'$  eindeutige reguläre Funktion  $f(z)$ , so daß  $f(z_j) = w_j$  für fast alle  $j$  ist? In der Literatur vorhandene Hilfsmittel ermöglichen dafür die Angabe einer hinreichenden und notwendigen Bedingung, in die die Differenzenquotienten höherer Ordnung von  $f$ , gebildet an den Stellen  $z_j$ , eingehen. —  $A$  sei eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge der komplexen Zahlenebene, auf der eine Funktion  $f(u)$  ( $u \in A$ ) definiert ist. Läßt sich  $f$  fortsetzen zu einer Funktion  $f(z)$ , die in endlich vielen fremden und  $A$  überdeckenden Gebieten jeweils eindeutig regulär ist? Eine ähnliche Bedingung wie vorhin ist dafür hinreichend und notwendig. W. Meyer-König.

Shen, Yu-Cheng: Interpolation to analytic functions by rational functions. Sci. Record 1, 300—302 (1945).

Shen, Yu-Cheng: Interpolation to certain analytic functions by rational functions. Trans. Amer. math. Soc. 60, 12—21 (1946).

Given  $(a_{ni})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n = 1, 2, \dots$   $|a_{ni}| < 1$ ;  $f(z)$  holomorphic for  $|z| < 1$ ; (1)  $f_n(z) = \sum_{i=1}^n A_{ni}(1 - a_{ni}z)^{-2}$  and the surface integral  $\iint_{|z| < 1} |f(z)|^2 ds$  exists; (2)  $f_n(z) = \sum_{i=1}^n A_{ni}(1 - \bar{a}_{ni}z)^{-2}$  and  $f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{|z| < 1} f(t)(1 - z\bar{t})^{-2} ds$ . Then in (1) and (2)  $f_n(z)$  converges uniformly to  $f(z)$  in  $|z| \leq r < 1$ , provided that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n |a_{ni}|^2 = 0$ . In (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n |a_{ni}| = 0$  suffices if the set  $(a_{ni})$  is normal. N. A. Bowen.

Dvorkine, B.: Sur le développement d'une fonction entière d'une variable complexe en série convergente de Newton. Mat. Sbornik, n. Ser. 12 (54), 377—380 (1943) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

If  $f(z)$  is an integral function satisfying  $|f(z)| < \exp\{(1 - \varepsilon) \log(\alpha - 1) \exp(|z|/\alpha)^{1/\varepsilon}\}$  with  $\alpha > 2$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , then  $f(z)$  can be expanded in a convergent Newton series based on the points  $(\log n)^s$ ,  $n = 1, 2, \dots$  N. A. Bowen.

Okada, Yoshimoto: On the representations of functions in the theory of interpolation. Tôhoku math. J. 49, 119—132 (1942).

Replacing the single line of interpolation points in arithmetic progression in the Newton-Gauss formula by several lines in the complex plane, restrictions on the growth of the integral function  $f(z)$  such that the series converges uniformly to  $f(z)$  are found. N. A. Bowen.

Gontcharoff, W. L.: Sur les facteurs correctifs de procédés d'interpolation. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 32, 471—473 (1941).

Corrective interpolation factors  $M_n(z)$  are found such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} [M_n(z) P_n(z)] = f(z)$  uniformly in every region interior to that in which  $f(z)$  is analytic and which contains the point-set  $\{a_m^{(n)}\}$ ,  $0 \leq m \leq n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $P_n(z)$  being the interpolation polynomial, of degree  $n$ , satisfying  $P_n(a_m^{(n)}) = f(a_m^{(n)})$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, n$ . N. A. Bowen.

Gontcharoff, W. et M. Gontcharoff: Sur une série d'interpolation procédant suivant certaines fonctions rationnelles. Moskovsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski, Mat. 73, 3—22 (1944) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].



Necessary and sufficient conditions on the  $a_n$  and  $c_n$  are found for the expansion of certain classes of functions in the form  $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(z-a_1)}{(1-a_1z)} \cdots \frac{(z-a_n)}{(1-a_nz)}$ , where real  $a_n$  increase to 1,  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-a_n)$  diverges, and  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-a_n) n^{\sigma} = \omega$ ,  $0 < \sigma \leq 1$ ,  $0 < \omega < \infty$ .  
N. A. Bowen.

Greville, T. N. E.: A generalization of Waring's formula. *Ann. math. Statistics* **15**, 218—219 (1944).

Waring's formula, (usually called Lagrange's), gives the polynomial of degree  $n$  taking on specified values at  $n+1$  distinct points  $a_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ . The author shows that, if in addition the first  $m_i$  derivatives are given for each  $a_i$ , then the following generalization holds:  $f(x) = \sum_{i=0}^n \left[ P_i(x-a_i) \prod_{j(\neq i)=0}^n \left( \frac{x-a_j}{a_i-a_j} \right)^{m_j+1} \right]$ , where  $P_i(x-a_i)$  is the polynomial obtained by taking all the terms of degree  $\leq m_i$  in  $(x-a_i)$  in the continued product of the  $n$  binomial expansions  $\left( 1 + \frac{x-a_i}{a_i-a_j} \right)^{-m_j-1}$ ,  $0 \leq j(\neq i) \leq n$ , and the Taylor expansion of  $f(x)$  in powers of  $(x-a_i)$ .  
N. A. Bowen.

• Kuik, Jan van: Stetige Iteration. Diss. Univ. Utrecht 1940. VIII, 73 S. [Holländisch].

Călugăreanu, Georges: Singularités des fonctions analytiques uniformes et polynômes de Tehebiechef. *Mathematica. Timișoara* **19**, 139—147 (1943).

Călugăreanu, Georges: Sur le problème des singularités des fonctions analytiques. *Disquisitiones math. phys.* **4**, 95—104 (1945).

$S$  sei eine beschränkte, abgeschlossene Menge der komplexen  $z$ -Ebene. Ist die  $z$ -Ebene mit einem Quadratnetz der Spanne  $r > 0$  überdeckt, so bestehe  $S(r)$  aus denjenigen abgeschlossenen Quadraten, die mindestens einen Punkt von  $S$  enthalten.  $T_n(z)$  sei das zu  $S$  gehörige Tschebyscheffsche Polynom; ebenso gehöre  $T_n(z, r)$  zu  $S(r)$ . Problem 1: Wie liegen die Nullstellen der  $T_n$  zu  $S$ ? [Wegen früherer Resultate vgl. G. Faber, *J. reine angew. Math.* **150**, 79—106 (1920); L. Fejér, *Math. Ann.* **85**, 41—48 (1922).] Die Nullstellen der  $T_n(z, r)$  rücken gegen  $S(r)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Entstehen  $S(\frac{r}{2})$ ,  $S(\frac{r}{4})$ , ... durch Weiterteilung des ursprünglichen Quadratnetzes, so strebt  $T_n(z, 2^{-m}r) \rightarrow T_n(z)$  für  $m \rightarrow \infty$  bei festem  $n$ , gleichmäßig in jedem beschränkten Bereich der  $z$ -Ebene. Die Nullstellen der  $T_n(z)$  rücken gegen  $S$  für  $n \rightarrow \infty$ . Jeder isolierte Punkt von  $S$  ist Häufungspunkt solcher Nullstellen. — Sei  $f(z)$  eine eindeutige analytische, im Unendlichen reguläre Funktion,  $S$  die beschränkte und abgeschlossene Menge ihrer Singularitäten und  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i z^{-i}$  für  $|z| > R$ . Problem 2: Man bestimme, ohne  $S$  zu kennen, die zu  $S$  gehörigen  $T_n(z)$  und  $M_n = \max |T_n(z)|$ , für  $z \in S$  direkt von den  $\lambda_i$  aus. Verf. gibt ein Programm zur Lösung dieses Problems an und schlägt in der zweiten Arbeit ein verbessertes Verfahren vor. In Verbindung mit Problem 1 bedeutet dies einen Beitrag zum Problem der Bestimmung der Singularitäten von  $f$  durch die  $\lambda_i$ . Im zweiten Teil der zweiten Arbeit handelt es sich um notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein im Unendlichen reguläres Funktionselement eine eindeutige Funktion darstellt.  
W. Meyer-König.

Haruki, Hiroshi: On characterisation of the elemental functions. *Proc. phys.-math. Soc. Japan*, III. Ser. **25**, 457—459 (1943).

Simple theorems on the elementary functions. The following theorem is typical: If  $f(z)$  is a single-valued function, regular and univalent in the half-plane  $R(z) > 0$ , which satisfies either  $f''(1) - f'(1) = 0$  or  $f'''(1) - 3f''(1) - 3f'(1) = 0$ , then  $f(z)$  becomes  $\alpha z^2 + \beta$ .  
K. Noshiro.

**Badell, Enrique and Mario O. González:** Berechnung des Phasenintegrals mittels komplexer Veränderlicher. *Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat.* **1**, 37—41 (1942) [Spanisch].

**Tschebotaröw, N.:** On a particular type of transcendent equations. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. **34**, 38—41 (1942).

Über die Nullstellen von ganzen Funktionen der Form  $g(z) \cosh z + h(z) \sinh z$ , wo  $g(z)$  und  $h(z)$  reelle Polynome darstellen. Probleme dieser und weit allgemeinerer Art werden in dem Buch von Tschebotaröw und Meyman (dies. Zbl. **41**, 198) behandelt.  
*H. Schwerdtfeger.*

**Smith, C. A. B.:** On the definitions of elliptic functions. *Math. Gaz.* **28**, 41—45 (1944).

Meromorphie der elliptischen Funktionen ohne Benutzung des Additionstheorems aus der Umkehrung elliptischer Integrale.  
*W. Maier.*

**Neville, E. H.:** Jacobian elliptic functions. *J. London math. Soc.* **18**, 177—191 (1943).

**Dean, W. R.:** Note on the evaluation of an elliptic integral of the third kind. *J. London math. Soc.* **18**, 130—132 (1943).

Reduktion vollständiger Integrale 3. Art.  
*W. Maier.*

**Zuckerman, H. S.:** Certain functions with singularities on the unit circle. *Duke math. J.* **10**, 381—395 (1943).

Sei  $F(\tau) = f(e^{2\pi i \tau})$  eine Modulform positiver Dimension, wobei  $f(x)$  regulär genau in  $|x| < 1$  mit Ausnahme eines Poles bei  $x = 0$  ist. Bei der Bestimmung der Fourier-Koeffizienten von  $F(\tau) [f(x) = \sum_{m=-\mu}^{\infty} a_m x^m]$  nach H. Rademacher und Verf.

(dies. Zbl. **19**, 22) wird die Transformationseigenschaft von  $F$  nur zur Bestimmung des Verhaltens von  $f(x)$  auf den Farey-Bögen benötigt, worauf sich die Koeffizienten durch eine Integration ergeben [so daß also  $f(x)$ , roh gesprochen, bestimmt ist durch sein asymptotisches Verhalten in der Nähe der rationalen Punkte auf  $|x| = 1$ ]. Wird nun irgendein Verhalten auf den Farey-Bögen vorgegeben, so kann man daraus formal in der gleichen Weise Fourier-Koeffizienten bestimmen.

Die Frage ist aber, ob dann das so gewonnene  $\sum_{m=-\mu}^{\infty} a_m x^m$  wirklich die geforderten Eigenschaften besitzt. Es kann nämlich sein, daß es gar keine Funktion  $f(x)$  gibt, die das vorgeschriebene Verhalten aufweist. Verf. zeigt dies durch ein Beispiel und gibt Verhaltensweisen an, die vorgeschrieben werden können.

*W. Meyer-König.*

**Teissier du Cros, F.:** Sur la convergence d'une série entière dont le terme général à sa partie réelle bornée en deux points de la circonférence-unité. *C. r. Acad. Sci., Paris* **219**, 44—45 (1944).

**Valiron, Georges:** Sur l'approximation des nombres réels et un théorème de M. Teissier du Cros. *C. r. Acad. Sci., Paris* **219**, 45—47 (1944).

Ist  $R(\gamma_n z^n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) für  $z = e^{i\theta_1}$  und  $z = e^{i\theta_2}$  beschränkt, wo  $(\theta_2 - \theta_1)/\tau^{-1} = \omega$  algebraisch und irrational ist, so konvergiert  $\sum \gamma_n z^n$  für  $|z| < 1$ . Das Resultat wird auf eine umfangreichere Klasse der Zahlen  $\omega$  verallgemeinert.  
*V. Paatero.*

● **Schubert, H.:** Ganzwertige Funktionen in Verbindung mit verallgemeinerten Dirichlet-Reihen. *Diss. Freiburg i. B.* 26 S. (1943).

Verf. behandelt ganzwertige Funktionen  $g(s)$ , die sich in eine Dirichletreihe entwickeln lassen:  $g(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s}$ . Je nachdem, ob Ganzwertigkeit für  $s = 0, 1, \dots, n, \dots$  oder nur für  $s = n \geq n_0$  verlangt wird, muß die Dirichlet-

reihe für  $\Re s \geq 0$  bzw. für  $\Re s > n_0$  absolut konvergieren. Verf. beweist als Hauptsatz, daß notwendig für die Ganzwertigkeit von  $g(s)$  für  $s = n$  ist, daß es eine abbrechende Dirichletentwicklung  $g(n) = \sum_{k=1}^l C_k (e^{\gamma_k})^n$  gibt, in der die  $C_k$  algebraische und die  $e^{\gamma_k}$  ganz algebraische Zahlen sind. Dann wird der Fall

$$g(s) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k s} \left( \sum_{j=1}^{m+1} B_j e^{\beta_j s} \right)^{-1}$$

auf seine Entwickelbarkeit in eine Dirichletreihe und auf Ganzwertigkeit untersucht. Es folgen mit ähnlichen Methoden Untersuchungen über Fastganzwertigkeit, d. h. es wird verlangt  $g(n) = g_n + \varepsilon_n$  ( $g_n$  ganzzahlig,  $|\varepsilon_n| = O^n$ ,  $\theta < 1$ ).

E. Schulenberg.

**Pisot, Charles:** Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 988—990 (1946).

**Pisot, Charles:** Sur les fonctions analytiques arithmétiques et presque arithmétiques. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 1027—1028 (1946).

$f(x)$  ( $x = re^{i\varphi}$ ) ist arithmetisch, wenn  $f(n)$  ganzrational für alle nichtnegativen ganzen Zahlen  $n$  ist. Es erfülle  $f(z)$  Voraussetzung A bzw. B. A: Es gibt ein  $\delta > 0$  und reelle  $\gamma$ ,  $r_0 > 0$ , so daß im Winkel  $|\varphi - \gamma| < \delta$   $f(x)$  regulär ist und für alle  $x$  mit  $|x| > r_0$   $|f(x)| < e^{|\gamma|}$  gilt. Dann ist die Laplacetransformierte  $l(s)$  von  $f(x)$  im Äußeren des Durchschnittes  $S$  aller Halbebenen  $r \cos(\varphi - \gamma_0) \leq \gamma$ ,  $|\gamma_0| < \delta$  regulär.  $T$  sei der Bildbereich von  $S$  bei der Abbildung  $z = e^s$ . B: Es gelte A mit  $\delta \leq \pi/2$ , und  $S$  liege ganz in einem Streifen parallel zur reellen Achse von einer Breite  $< 2\pi$ . Satz I: 1. Ist  $f(x)$  arithmetisch, erfüllt sie A und ist der transfinite Durchmesser von  $T$  kleiner als 1, dann gibt es Polynome  $P_1(x), \dots, P_k(x)$  und ganze algebraische Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , welche mit ihren Konjugierten in  $T$  liegen (es können nur endlich viele in  $T$  liegen), so daß für alle ganzen Zahlen  $x \geq 0$  (1)  $f(x) = \alpha_1^x P_1(x) + \dots + \alpha_k^x P_k(x)$ . 2. Erfüllt  $f(x)$  auch B, so gilt (1) für alle  $x$ . Die Resultate von Pólya [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **31**, 107—115 (1922)], Carlson [Math. Z. **29**, 549—624 (1929)], A. Selberg (dies. Zbl. **24**, 329; **25**, 168) und dem Verf. (dies. Zbl. **27**, 55) sind darin enthalten. Verf. wendet I auf Funktionen der

Gestalt  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i(x) e^{-\lambda_i x}$  ( $x \geq 0$ ) an, wo die  $A_i(x)$  Polynome von beschränktem

Grad sind. In der zweiten Arbeit wird weiter vorausgesetzt, daß  $f(x)$  ganz ist (also  $S: s = \gamma$ ) und auch  $f(-x)$  arithmetische Funktion ist. Es sei  $T^*$  Bildbereich von  $S$  bei  $z = e^{-s}$ . Satz II: 1. Ist der transfinite Durchmesser  $\tau^*$  von  $T^*$  kleiner als 1, dann gibt es Polynome  $U_1, \dots, U_k, V_k$  und algebraische Einheiten  $\eta_1, \dots, \eta_k$ , welche mit ihren Konjugierten in  $T$  liegen und durch  $T^*$  bestimmt sind, so daß

für alle ganzrationalen Zahlen  $x$  (2)  $f(x) = \sum_{i=1}^k (\eta_i^x U_i(x) + \eta_i^{-x} V_i(x))$  gilt. Er-

füllt  $f(x)$  auch B, dann gilt (2) für alle  $x$  und stellt eine Verschärfung von Sätzen von Carlson und Selberg (l. c.) dar. —  $f(x)$  heißt fast arithmetisch, wenn es ein  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ), eine natürliche Zahl  $n_0$  und zu jeder natürlichen Zahl  $n > n_0$  eine ganze Zahl  $u_n$  gibt, so daß  $f(n) = u_n + O^n$  für  $n > n_0$  ist. Dann gilt Satz III: Es sei  $f(x)$  fast arithmetisch, erfülle A, und der transfinite Durchmesser der Vereinigungsmenge  $M$  von  $T$  und  $E: |z| = \theta$  sei  $< 1$ , dann gibt es Polynome  $P_1(x), \dots, P_k(x)$ , ganz algebraische Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  in  $T$ , und außerhalb  $E$ , deren Konjugierten in  $M$  liegen, so daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_1(\varepsilon)$  gibt, so daß

für alle natürlichen Zahlen  $x > n_1(\varepsilon)$  (3)  $f(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j^x P_j(x) + \theta_x$  mit  $|\theta_x| < (\theta + \varepsilon)^x$

gilt. Ist der Durchschnitt von  $T$  und  $E$  leer, so ist  $\theta_x$  stets 0. Erfüllt dann  $f(x)$  auch B, so gilt (3) für alle  $x$  mit  $\theta_x = 0$ .

E. Hlawka.



Salem, R.: Power series with integral coefficients. Duke math. J. 12, 153—172 (1945).

Bezeichnung:  $K$  Körper der rationalen Zahlen  $R$  oder ein imaginär quadratischer Zahlkörper über  $R$ . Zunächst wird ein Satz von Pisot (dies. Zbl. 19, 155) vom Verf. so formuliert (Satz C im Referat in spezieller Gestalt): Ist  $f(z)$  regulär um 0 mit der Entwicklung  $\sum a_n z^n$ , wo die  $a_n$  aus  $K$  sind, analytisch in  $E: |z| < 1$  bis auf eine endliche Anzahl von Polen  $1/\theta_i$  ( $|\theta_i| > 1$ ;  $i = 1, \dots, k$ ) und gleichmäßig beschränkt in der Umgebung von  $|z| = 1$ , so ist  $f(z)$  rational und die  $\theta_i$  sind ganze algebraische Zahlen. Ist insbesondere  $k = 1$  und  $K = R$ , so ist  $\theta_i = \theta$  eine P.-V.- (Pisot-Vijayaraghavan-) Zahl, d. h. ihre Konjugierten liegen in  $E$ . [Zu diesen P.-V.-Zahlen vgl. noch Vijayaraghavan, J. London math. Soc. 17, 137—138 (1942); Salem, Trans. Amer. math. Soc. 54, 218—228 (1943), 56, 32—49 (1944), Duke math. J. 11, 103—108 (1944); C. L. Siegel, Duke math. J. 11, 597—602 (1944).] Notwendig und hinreichend dafür, daß zu einem reellen  $\theta > 1$  ein  $\lambda \neq 0$  existiert, so daß  $\sum \sin^2 \pi \lambda \theta^n$  konvergiert, ist nach Pisot, daß  $\theta$  P.-V.-Zahl ist. Dann ist  $\lambda$  in  $R(\theta)$  (Satz A). Verf. gibt einen neuen Beweis [früherer Beweis im Duke math. J. 11, 103—108 (1944)] für die Abgeschlossenheit der Menge der P.-V.-Zahlen und verallgemeinert Satz C zu Satz I: Es sei  $f(z)$  meromorph in  $|z| < 1$  (die Anzahl  $A$  der Pole kann unendlich sein) und  $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$  ( $k \geq 0$ ) die Ent-

wicklung um 0. Es gebe weiter einen Index  $p$ , so daß für  $n \geq p$  alle  $a_n$  aus  $K$  sind. Besitzt  $f(z)$  einen Ausnahmewert  $\alpha$ , dann ist  $f(z)$  rational [ $\alpha$  heißt Ausnahmewert, wenn es positive Zahlen  $\delta, \eta$  ( $\eta < 1$ ) gibt, so daß  $|f(z) - \alpha| > \delta$  für jeden regulären Punkt  $z$  im Ring  $1 - \eta < |z| < 1$  ist]. Spezialfälle: 1)  $K = R, k = p = 0$ . Vergleich mit dem Satz von Carlson und Pólya. 2) Ist  $k = -1$ ,  $f(z)$  analytisch und schlicht in  $E$  und die  $a_n$  in  $K$  für  $n \geq p$ , so ist  $f(z)$  rational. 3.  $k = p = 0, A = 1$  (Pol  $1/\tau, |\tau| > 1$ ), dann ist  $f(z) = P(z)/Q(z)$  ( $P, Q$  Polynome). — Ist  $f(z)$  nicht beschränkt auf  $E^\circ: |z| = 1$ , und sind nicht alle Nullstellen von  $Q(z)$  auf  $E^\circ$  Einheitswurzeln (sonst ist  $\tau$  P.-V.-Zahl), so ist  $\tau$  eine ganze algebraische Zahl, deren Konjugierte in  $E$  oder auf  $E^\circ$  liegen. Die Menge dieser Zahlen [Klasse (T)] (die P.-V.-Zahlen ausgenommen) werden näher untersucht. Die  $\tau$  aus (T) sind reell, vom geraden Grad  $d$ , eine (reelle) Konjugierte ( $1/\tau$ ) liegt in  $E$ , alle anderen auf  $E^\circ$  [ $d = 4$  bereits bei Vijayaraghavan (dies. Zbl. 28, 113)] und lassen sich als Quotienten von P.-V.-Zahlen darstellen. Alle  $\tau \neq 0$  aus gleichen Zahlkörpern sind positive Potenzen der kleinsten von ihnen. Jede P.-V.-Zahl ist sowohl links- wie rechtsseitiger Grenzwert von T-Zahlen. Es gibt auch ein Analogon zum Satze A. Zum Schluß wird gezeigt (Satz V): Es sei  $q(n)$  eine positive, monoton gegen  $x$

wachsende Funktion (definiert für alle natürlichen Zahlen  $n$ ),  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) z^n$

besitze den Konvergenzradius  $r$  ( $0 < r < 1$ ) und sei eine rationale Funktion. Dann ist  $z = r$  Pol von  $f(z)$ . Seine Ordnung sei  $k$  und  $f(z) = g(z) (z - r)^{-k}$ . Weiter sei  $\xi$  eine reelle Zahl. Ist dann nicht zugleich 1)  $1/r$  ganz algebraisch und 2)  $\xi g(r)$

in  $R(r)$ , dann haben  $\sum_{n=0}^{\infty} [q(n) \xi] z^n, \sum_{n=0}^{\infty} (q(n) \xi) z^n \in E^\circ$  als natürliche Grenze

[( $u$ ) Bruchteil von  $u$ ]. Für  $q(n) = n$  erhält man den bekannten Satz von Hecke, der hier ohne Theorie der Gleichverteilung bewiesen ist. E. Hlawka.

Myrberg, P. J.: Über analytische Funktionen auf transzendenten zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit reellen Verzweigungspunkten. Acta math. 76, 185—224 (1945).

Myrberg, P. J.: Über einige Probleme der Funktionentheorie. S.-Ber. Finnisch. Akad. Wiss. 1945, 229—233 (1946).

Es sei  $F$  die zweiblättrige Riemannsche Fläche mit den gegen Unendlich

konvergierenden Windungspunkten  $e_1, e_2, \dots$  auf der positiven reellen Achse.  $D(x)$  sei eine ganze Funktion, deren Nullstellen alle einfach und genau die  $e_i$  sind. Mit  $y^2 = D$  haben die meromorphen Funktionen auf  $F$  die Darstellung  $f = (A + B y)/C$ , und die Integrale auf  $F$  sind von der Form  $q = \int f(x) dx$ , wobei  $A, B$  und  $C$  ganze Funktionen in der  $x$ -Ebene sind und im folgenden reell sein sollen. Es wird ein kanonisches Schnittsystem  $(A_n, B_n)$  eingeführt, wobei  $A_n$  die Punkte  $e_{2n-2}, e_{2n-1}$  umschließt. Normalintegrale erster Gattung nennt Verf. solche Integrale  $q$ , deren Imaginärteil auf der kanonisch zerschnittenen Fläche  $F'$  beschränkt ist, die elementaren unter ihnen sind definiert durch die Bedingungen  $\int_{\gamma_v} q = 2\pi i \delta_{v, \mu}$ . Verf. beweist: Die Normalintegrale erster Gattung sind jene  $q$ ,

die in lokal gleichmäßig konvergente Reihen  $\sum c_r q_r$  mit beschränkten  $\sum_1^q c_r$  entwickelbar sind. Normalintegrale dritter Gattung haben logarithmische Singularitäten mit den Residuen  $\pm 1$  über den Intervallen  $(e_{2r-1}, e_{2r})$  in gleichmäßig beschränkter Anzahl und auf der zerschnittenen Fläche  $F'$  einen beschränkten Imaginärteil. Sie lassen sich in lokal gleichmäßig konvergente Reihen  $\sum \chi_{a,b}$  von sogenannten elementaren Normalintegralen dritter Gattung  $\chi_{a,b}$  entwickeln. Es werden ferner Existenz und Eigenschaften von sogenannten Normalfunktionen untersucht, das sind solche meromorphen Funktionen  $f$  auf  $F$ , wo  $\arg f$  auf  $F'$  beschränkt bleibt. Sie können als eine Verallgemeinerung der algebraischen Funktionen angesehen werden, und es ist bemerkenswert, daß zwischen deren Nullstellen und Polen ein System von Gleichungen besteht, das der Abelschen Relation in der Theorie der algebraischen Funktionen entspricht. In einem letzten Abschnitt werden Integrale erster Gattung von der Form  $\int [h(x)/y(x)] dx$  ( $h$  = ganze Funktion in der  $x$ -Ebene) mit vorgeschriebenen  $A$ - und  $B$ -Perioden konstruiert. Dieses Resultat erlaubt zu vorgegebenen Nullstellen über der reellen Achse zugehörigen ganze Funktionen auf  $F$  zu konstruieren mit Hilfe einer zur Weierstraßschen analogen Produktdarstellung.

A. Pfluger.

Macintyre, A. J. and W. W. Rogosinski: Some elementary inequalities in function theory. Edinburgh math. Notes, Nr. 35, 1—3 (1945).

Es handelt sich um die für in  $|z| \leq 1$  reguläres  $f(z)$  gültigen Ungleichungen

$$(1 - |z|^2) |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta, \quad \frac{(1 - |z|^2)^2}{|z| - (1 + |z|^2)^{1/2}} |f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})| d\theta,$$

wovon die erste von Egerváry [Math. Ann. 99, 542—561 (1928)] stammt.

G. Aumann.

Hardy, G. H. and J. E. Littlewood: Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions. Quart. J. Math., Oxford Ser. 12, 221—256 (1941).

Exposé synthétique de résultats obtenus par les AA. depuis 1924. Les démonstrations anciennes ont été simplifiées. Certains théorèmes dont l'énoncé seul avait déjà été publié, sont démontrés. Le mémoire contient enfin un théorème entièrement nouveau.

J. Dufresnoy.

Nehari, Zeev: On certain classes of meromorphic functions. J. London math. Soc. 20, 219—225 (1945).

$f(z)$  étant méromorphe dans  $|z| < \infty$ , soient  $\alpha_r$  ses zéros,  $\beta_r$  ses pôles et  $\gamma_r$  les zéros de  $f(z) - 1$ . Si  $\alpha_r, \beta_r$  et  $\gamma_r$  sont des entiers rationnels, alors  $|f'(\alpha_r)| \leq 2\pi$ . Si ce sont des entiers de Gauss,  $|f'(\alpha_r)| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$ .

J. Dufresnoy.

Heins, Maurice H.: The problem of Milloux for functions analytic throughout the interior of the unit circle. Amer. J. Math. 67, 212—234 (1945).

Sei  $F_m$  die Klasse folgender Funktionen  $f(z)$ :  $f(z)$  ist für  $|z| < 1$  analytisch und  $|f(z)| < 1$ ; es existiert eine in  $|z| < 1$  gelegene, abgeschlossene Punktmenge  $E$ ,

deren Durchschnitt mit  $|z| = R$  ( $0 \leq R < 1$ ) nicht leer ist, derart, daß  $|f(z)| \leq m < 1$  für  $z \in E$ . Es wird  $\inf_{f \in F_m} M(f; r)$  ( $0 < r < 1$ ,  $M(f; r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ ) bestimmt.

Die zugehörige Extremalfunktion ist eindeutig bestimmt und von  $r$  unabhängig; sie wird mit Hilfe der Jacobischen Thetafunktionen bestimmt. V. Paatero.

Robinson, R. M.: Bounded analytic functions. Univ. California Publ. Math., n. Ser. 1, 131—146 (1944).

Robinson, R. M.: Bounded univalent functions. Trans. Amer. math. Soc. 52, 426—449 (1942).

Sei  $f(z)$  regulär und schlicht für  $|z| < 1$ , und  $|f(z)| < 1$ ,  $f(0) = 0$ . Unter Anwendung der Löwnerschen Differentialgleichung werden gewisse Ungleichungen hinsichtlich  $|f'(0)|$ ,  $|z|$ ,  $|f(z)|$ ,  $|f'(z)|$  abgeleitet, welche teils bekannt, teils neu sind (vgl. G. M. Golusin, dies. Zbl. 14, 221). Für nicht beschränkte schlichte Funktionen ergibt sich als Grenzfall u. a. folgender Satz: Sei  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ; wenn  $|f(z_0)| \leq 1/4$ , so ist  $|f'(z_0)| \leq 1 + 3 \cdot 2^{-3/2} \approx 2,06$ ; wenn aber  $|f(z_0)| > 1/4$ , so gibt es keine obere Schranke für  $|f'(z_0)|$ . — Für beschränkte Funktionen, deren Schlichtheit nicht vorausgesetzt ist, werden analoge Ungleichungen mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas bewiesen. Auch der Fall, daß die Annahme  $f(0) = 0$  weggelassen ist, wird berücksichtigt. Sämtliche Ungleichungen sind genau.

V. Paatero.

Heins, Maurice H.: Extremal problems for functions analytic and single-valued in a doubly-connected region. Amer. J. Math. 62, 91—106 (1940).

Sei  $Tz (\neq z)$  eine lineare Transformation, welche den Einheitskreis auf sich selbst abbildet, und  $Uz$  eine andere derartige Transformation (der Fall  $Uz = z$  mitgenommen). Für Funktionen  $w(z)$ , welche in  $|z| < 1$  regulär analytisch sind mit  $|w| < 1$ , und welche der Funktionalgleichung  $w(T) = U(w(z))$  genügen, wird ein Interpolationsproblem gelöst. Als Folgerungen wird u. a. das Pick-Nevanlinnasche Interpolationsproblem für zweifach zusammenhängende Gebiete gelöst.

V. Paatero.

Robinson, Raphael M.: Analytic functions in circular rings. Duke Math. J. 10, 341—354 (1943).

Robinson, Raphael M.: Hadamard's three circles theorem. Bull. Amer. math. Soc. 50, 795—802 (1944).

Heins, Maurice H.: On a problem of Walsh concerning the Hadamard three circles theorem. Trans. Amer. math. Soc. 55, 349—372 (1944).

Sei  $f(z)$  meromorph und eindeutig für  $q \leq |z| \leq 1$ ,  $|f(z)| \leq p$  für  $|z| = q$ ,  $|f(z)| \leq 1$  für  $|z| = 1$ . Der größte mögliche Wert von  $|f(z)|$  in einem gegebenen Punkt  $z_0$  ( $q < |z_0| < 1$ ) und die zugehörige Extremalfunktion werden bestimmt. Die Lösung des Problems gründet sich auf folgendes Lemma: Sei  $f(z)$  für  $q < |z| < 1$  regulär mit Ausnahme eines einfachen Poles in  $-b$  ( $q < b < 1$ ) und sei  $|f(z)| \leq 1$  für  $|z| = q$  und  $|z| = 1$ ; dann ist  $|f(z)| \leq 1$  für  $q < |z| < 1$ . Die Gleichheit gilt nur für  $f(z) = \text{konst.}$  Mit Hilfe des Lemmas wird auch der Hadamardsche Dreikreisesatz bewiesen und die zugehörige Extremalfunktion bestimmt [vgl. Teichmüller (dies. Zbl. 20, 235) und Heins (s. vorsteh. Referat)]. — Diejenigen Fälle, in denen die Laurent-Koeffizienten von  $f(z)$  alle  $\geq 0$  sind, bzw.  $f(z)$  überall für  $|z| \leq 1$  regulär ist, werden studiert. Im letztgenannten, von Walsh herrührenden Fall wird das Maximum für eine rationale Funktion  $f_0(z)$  mit  $|f_0(z)| = 1$  für  $|z| = 1$  erreicht, deren Grad  $n$  ist, wenn  $q^n \leq p < q^{n+1}$ . Im Falle  $p = q^n$  ist  $f_0(z) = z^n$ , und  $|f_0(z)| = p$  für  $|z| = q$ ; im Falle  $q^n < p < q^{n+1}$  dagegen ist  $|f_0(z)| = p$  nur in  $n$  Punkten von  $|z| = q$ .

V. Paatero.

(1) Macintyre, A. J. and R. Wilson: The logarithmic derivatives and flat regions of analytic functions. Proc. London math. Soc., II. Ser. 47, 404—435 (1942).



(2) Selberg, Henrik L.: Über den absoluten Betrag einer analytischen Funktion für gegebene Werte des Funktionsargumentes. Acta Math. 78, 335—341 (1946).

(3) Littlewood, J. E. and A. C. Offord: On the distribution of the zeros and  $\alpha$ -values of a random integral function. I. J. London math. Soc. 20, 130—136 (1945).

Von verschiedenen Gesichtspunkten her wird der Grad von Dominanz derjenigen Gebiete betrachtet, in denen  $f(z)$  sich nahe dem Maximalbetrag für das betreffende  $|z| = r$  hält („flat regions“ nach Whittaker), u. a. in Vergleich mit den „Gräben“ um die Nullstellen in der Modulfläche. (1): Für meromorphes  $f$ ,  $r < R$ , gilt  $|D^q \ln f(z)| < F(R, T(kR), q)$  außerhalb höchstens  $K T(kR)$  Kreisen der Flächensumme  $< h^2 \pi R^2$  oder Radiensumme  $< h R$  ( $T =$  Nevanlinna-Charakteristik). Integration ergibt  $|\ln f(z) - \ln f(z')| < F(R, T(kR), 1) \cdot |z - z'|$ , wenn nur die Strecke  $zz'$  die Ausnahmekreise vermeidet. Ist  $\infty$  defekter Wert und  $f$  von endlicher Ordnung, ergeben sich schärfere Aussagen mit  $k = 1$ . Gleichartige Resultate über in einem Winkelraum meromorphe Funktionen.

In (2) wird der Teil  $\lambda(r, \mathfrak{M})$  von  $\lambda(r) = \int_0^{2\pi} \ln^2 |f(r e^{i\varphi})| d\varphi$  untersucht, der durch Integration nur über Werte  $\varphi$  mit  $\arg f(r e^{i\varphi}) \in \mathfrak{M} \pmod{2\pi}$  entsteht. Ist  $0 < \delta < 2$ , so gilt gleichmäßig für alle Argumentmengen  $\mathfrak{M}$  aus  $(0, 2\pi)$  mit linearem Maß  $\geq h$ , daß  $\liminf_{r \rightarrow \infty} \lambda(r, \mathfrak{M}) \geq \delta h^2 / 16 \pi^2$ , wenn nur  $r$  auf einer gewissen

Intervallfolge bleibt, auf der die Schwankung von  $\ln r$  in jedem Intervall  $1 < r < t$  die Zahl  $(1 - \delta/2) \ln t$  übersteigt. Die obige Fassung betrifft ganze Funktionen; Verf. betrachtet einen allgemeineren Fall. (3): Aus  $f_0(z) = \sum a_n z^n$ , ganz von der Ordnung  $\rho$ , bilde man die Klasse  $f(z) = \sum \pm a_n z^n$  und schreibe in jedem Glied, unabhängig von den anderen, den Zeichen  $+$  und  $-$  die Wahrscheinlichkeiten je 1,2 zu. Ist  $0 < \varepsilon < 1$  und gehört  $f(z)$  nicht zu einer Ausnahmemenge der Wahrscheinlichkeit  $< \varepsilon$ , so gilt für  $r > R_0(\varepsilon)$ : Es ist  $\ln^+ |f| > \ln m(r) - r^\varepsilon$  mit  $m(r) = \max |a_n| r^n$ , falls nicht  $z$  in einem „Graben“ liegt, welcher dann in einem Kreise mit Radius  $e^{-r^\varepsilon}$  enthalten ist, in welchem jeder Wert  $\alpha$  mit  $|\alpha| < m(r) e^{-r^{3\varepsilon}}$  gleich oft angenommen wird. Schätzungen der Graben-Anzahlen in Sektoren, Kreisingen und Kreisen. Beweise fehlen.

G. af Hällström.

(1) Spencer, D. C.: On an inequality of Grunsky. Proc. nat. Acad. Sci. USA 26, 616—621 (1940).

(2) Bermant, A.: Sur la variation de la dilatation d'une fonction régulière. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 45, 271—273 (1944).

(3) Bermant, A.: Dilatation d'une fonction modulaire et problèmes de recouvrement. Mat. Sbornik, n. Sér. 15 (57), 285—324 (1944) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

In (1) Beweis einer Integralungleichung von der Art: Geometrisches Mittel  $\leq$  arithmetisches in einem Falle mit nicht notwendig positiven Gewichten. Ausnützung: Es sei  $w = f(z)$  in  $|z| < 1$  regulär,  $f(0) = 0$ ,  $W$  das  $w$ -Bild des Kreises,  $W^*$  der von 0 aus gestrichene sternförmige Teil von  $W$ ,  $Z^*$  das  $z$ -Bild von  $W^*$ . Bezeichnen  $Z^*$ ,  $W^*$  auch Flächeninhalt, so ist  $|f'(0)| \leq (Z^* W^*)^{1/2} / \pi$ . Liegt der  $W^*$ -Rand in  $||w| - 1| < \varepsilon$  und ist die Schwankung von  $|w|$  daselbst durch  $K\varepsilon | \arg w |$  majorisiert (außer auf  $n$  Radialsegmenten), so erhält Bermant in (2) mit Hilfe von Lindelöfs Prinzip und Martchenko (dies. Zbl. 11, 261) doppelseitig  $|f'(0)| = (W^* / \pi)^{1/2} = (n+1) o(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|)$ . In (3) schätzt er  $|\psi'(0; w_1, w_2)|$  bei Veränderung von  $w_1, w_2$  ab, wobei  $\psi$  die  $w_1, w_2$ ,  $\infty$  auslassende, in  $|z| < 1$  definierte Modulfunktion mit  $\psi(0) = 0$  ist. Folgerungen für alle in  $|z| < 1$  regulären  $f(z)$  mit  $f(0) = 0$ ,  $|f'(0)| = 1$ , von der Art: Von zwei passend gewählten  $w$ -Punktmengen wird wenigstens die eine von Werten  $f(z)$  überdeckt. Typische Spezial-

fälle: (a) Von zwei geeigneten Kreisen wird sicher der eine überdeckt. (b) Auf jeder Geraden durch  $w = 0$  wird eine 0 enthaltende Strecke der Länge  $\geq 0.456 \dots$  überdeckt (beste Schranke). G. af Hällström.

Tsuji, Masatsugu: On an extension of Bloch's theorem. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 170—171 (1942).

Mittels der sphärischen Metrik verallgemeinert der Verf. den Blochschen Satz auf die im Einheitskreise meromorphen Funktionen, indem er den Landauschen Beweisgang des Originalsatzes modifiziert. Y. Komatu.

Seidel, W. and J. L. Walsh: On the derivatives of functions analytic in the unit circle and their radii of univalence and of  $p$ -valence. Trans. Amer. math. Soc. 52, 128—216 (1942).

Loomis, Lynn H.: On an inequality of Seidel and Walsh. Bull. Amer. math. Soc. 48, 908—911 (1942).

Das Verhalten des Ausdrucks  $|f^p(z)|(1 - |z|)$  für  $|z| \rightarrow 1$  wird untersucht, wenn  $f(z)$  für  $|z| < 1$  analytisch ist und zu einer der folgenden Klassen gehört: (I)  $f(z)$  ist schlicht, (II)  $f(z)$  ist beschränkt, (III) es gibt zwei Werte, welche  $f(z)$  in  $|z| < 1$  nicht annimmt. Sei  $R$  die Riemannsche Fläche, auf welche  $w = f(z)$  den Kreis  $|z| < 1$  abbildet, und  $w_0$  ein Punkt von  $R$ , der kein Verzweigungspunkt ist. Der Radius  $D_1(w_0)$  des größten um  $w_0$  beschriebenen schlichten, in  $R$  gelegenen Kreises wird als Radius der Schlichtheit von  $R$  in  $w_0$  bezeichnet. Für ein  $f(z)$  der Klasse (I) gilt dann (1)  $D_1(w_0) \leq |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2) \leq 4D_1(w_0)$ . ( $w_0 = f(z_0)$ ). Die Ungleichungen sind genau. Aus (1) folgt u. a.: Sei  $|z_n| < 1$ ,  $w_n = f(z_n)$ ; damit (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'(z_n)|(1 - |z_n|) = 0$  sei, ist dann notwendig und hinreichend, daß (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(w_n) = 0$  ist;  $|f'(z_n)|(1 - |z_n|)$  ist dann und nur dann beschränkt, wenn  $D_1(w_n)$  beschränkt ist. Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(w_n) = 0$ , so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(z_n)(1 - |z_n|)^k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). — Wenn  $|f(z)| \leq M$ , so gilt (4)  $D_1(w_0) \leq |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2) \leq (8MD_1(w_0))^{1/2}$ . Für (2) ist wieder (3) notwendig und hinreichend. — Der Radius  $D_p(w_0)$  der  $p$ -Wertigkeit von  $R$  in  $w_0$  wird in analoger Weise wie  $D_1(w_0)$  definiert. Den obigen Ungleichungen (1) und (4) analoge Ungleichungen werden für  $|f^{(k)}(z)|(1 - |z|^2)^k$  und  $D_p(w)$  bewiesen, wenn  $f(z)$  zur Klasse (II) oder (III) gehört. Wenn  $f(z)$  beschränkt ist, so ist notwendig und hinreichend, damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(z_n)(1 - |z_n|)^k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) gelte, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_p(w_n) = 0$ . Zahlreiche Anwendungen, u. a. mit den Sätzen von Lindelöf und Montel verwandte Sätze über Randwerte von analytischen Funktionen, eine Verallgemeinerung des Blochschen Satzes, Verallgemeinerungen der oben erwähnten Ungleichungen auf  $p$ -wertige Funktionen und meromorphe Funktionen, welche drei gegebene Werte nicht annehmen. — Sei  $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ ,  $|f(z)| < M$  und  $f(0) = w_0$ . Es existieren zwei Konstanten  $\lambda_p$  und  $A_p$ , welche von  $p$  und  $M$  abhängen, derart, daß  $\lambda_p D_p(w_0) \leq \sum_{n=1}^p |a_n| \leq A_p [D_p(w_0)]^{2-p}$ . Loomis beweist, daß hier  $2^{-p}$  durch  $1/(p+1)$  ersetzt und  $\lambda_p = 1$  genommen werden kann. V. Paatero.

Kametani, Shunji and Tadasu Ugaheiri: A remark on Kawakami's extension of Löwner's lemma. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 14—15 (1942).

Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $|z| < 1$  et telle que  $|f(z)| < 1$ ,  $f(0) = 0$ . Si  $E$  et  $E'$  sont deux ensembles de  $|z| < 1$  tels que, en chaque point de  $E$ ,  $f(z)$  ait une limite radiale appartenant à  $E'$ , alors mes. int.  $E \leq$  mes. ext.  $E'$ . J. Dufresnoy.

Wishard, A.: Functions of bounded type. Duke math. J. 9, 663—676 (1942).

Sei  $f(z)$  in einem vertikalen Band  $G$  meromorph. Notwendige und hinreichende Bedingungen, damit  $f(z)$  in  $G$  beschränktartig sei, sind folgende: 1. Eine gewisse Summe, welche über die Pole von  $f(z)$  erstreckt ist, konvergiert. 2. Ein Mittelwert

von  $f(z)$ , als ein gewisses Integral ausgedrückt, bleibt endlich, wenn der Integrationsweg gegen den Rand von  $G$  strebt. Die kleinste positive harmonische Funktion  $U(z)$ , für welche  $\log|f(z)| = U(z)$  in  $G$ , wird bestimmt. Als  $G$  werden folgende Gebiete genommen:  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 < x \leq \pi$ ,  $x > 0$  ( $z = x + iy$ ). V. Paatero.

Mandelbrojt, S.: Sur les fonctions holomorphes et bornées dans une partie infinie d'un demi-plan. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 361—363 (1946).

Mandelbrojt, S.: Sur les fonctions holomorphes et bornées dans un domaine infini. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1157—1158 (1946).

Mandelbrojt, S. et Gérald MacLane: Sur les fonctions holomorphes dans une région-bande et une généralisation du problème de Watson. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 186—188 (1946).

Die Resultate sind hauptsächlich in folgender Arbeit enthalten: S. Mandelbrojt und G. R. MacLane. Trans. Amer. math. Soc. 61, 454—467 (1947); vgl. dies. Zbl. 32, 67. V. Paatero.

McMillan, Audrey Wishard: A Phragmén Lindelöf theorem. Amer. J. Math. 66, 405—410 (1944).

Zwei Verallgemeinerungen eines Satzes von F. Wolf (dies. Zbl. 21, 240), von denen die eine lautet: Sei  $f(z)$  analytisch für  $x > 0$  ( $z = x + iy$ ),  $|f(iy)| \leq 1$ ,  $|f(re^{i\theta})| \leq \exp(r e^{-\psi(\theta)})$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , wo  $\psi(\theta)$  im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Dann existiert ein  $k$  derart, daß  $|f(x + iy)| \leq e^{kx}$ .  $k$  kann  $\lim_{r \rightarrow \infty} (\log|f(re^{i\theta})| - r \cos \theta)$  für beliebiges  $\theta$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ), genommen werden.

V. Paatero.

Ganapathy Iyer, V.: The influence of zeros on the magnitude of functions regular in an angle. J. Indian math. Soc., n. Ser. 7, 1—16 (1943).

Heins, Maurice: On the Phragmén-Lindelöf principle. Trans. Amer. math. Soc. 60, 238—244 (1946).

In  $x > 0$  sei  $f(z)$  regulär ( $z = x + iy$ ), und bei Annäherung an die Imaginärachse gelte in jedem Punkt  $\limsup_{x \rightarrow 0} |f(re^{i\varphi})| \leq 1$ . Mit  $M(r) = \sup_{x > 0} |f(x + iy)|$ ,  $\alpha =$

$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r}$ ,  $\beta = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r}$  besagte das Phragmén-Lindel  fsche Prinzip

(etwas erweitert): Für  $\alpha = -\infty$  ist  $f \equiv 0$ , für  $-\infty < \alpha \leq 0$  ist  $\beta \leq 0$  und  $|f| \leq 1$ , für  $0 < \alpha$  ist  $\beta \leq 4\alpha/\pi$  und  $\ln M(r)/r \leq 4\alpha/\pi$ . Verf. beweist nun  $\alpha = \beta$ , und zwar  $\alpha = -\infty$  oder  $\alpha \geq 0$ . Hilfsmittel ist ein Poissonintegral, Majorante von

$\ln|f| - 4\alpha x/\pi$ . Ist  $m(r) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln|f(re^{i\varphi})| \cos \varphi d\varphi$ , beweist Verf.  $\frac{1}{2}\pi\alpha = \alpha' =$

$\liminf_{r \rightarrow \infty} r^{-1}m(r)$  ( $= \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-1}m(r)$  nach Ahlfors: dies. Zbl. 16, 32), was übrigens mit  $\beta \leq 2\alpha'\pi$  [F. u. R. Nevanlinna. Acta Soc. Sci. Fennicae 50, 5 (1922)] von neuem  $\alpha = \beta$  ergeben hätte.

G. af H  llstr  m.

Fuchs, W. H. J.: A generalization of Carlson's theorem. J. London math. Soc. 21, 106—110 (1946).

Boas jr., R. P.: The rate of growth of analytic functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 186—188 (1946).

Boas jr., R. P.: The growth of analytic functions. Duke math. J. 13, 471—481 (1946).

Es sei  $R_k$  die Klasse der in  $x > 0$  regulären  $f(z)$  mit  $|f(z)| = O(e^{kx})$ ,  $z = x + iy$ ,  $= r e^{i\theta}$ . Es heiße  $(a_n)$  mit  $a_n > 0$ ,  $a_{n+1} - a_n > c > 0$  eine determinierende Folge, falls aus  $f(z) \in R_k$ ,  $f(a_n) = 0$  für jedes  $n$ , folgt  $f(z) \equiv 0$ . Als Verschärfung von Carlsons Theorem,  $a_n = n$  ist determinierend für  $k < \pi$ , beweist Fuchs die notwendige und hinreichende Bedingung  $\limsup_{r \rightarrow \infty} \left( \sum_{a_n < r} a_n^{-1} - \frac{k}{\pi} \ln r \right) = \infty$ . Damit

für alle  $f(z) \in R_k$   $\limsup \ln |f(x)|/x = \limsup \ln |f(b_r)|/b_r$  sei, ist notwendig, daß  $(b_r)$  determinierend ist. Daß dies nicht hinreicht, wird durch ein Beispiel gezeigt.



Boas gibt gewisse hinreichende Bedingungen (Verschärfungen der Resultate von Bernstein und Levinson). Zugleich liefert er Sätze von Phragmén-Lindelöf-Typus: Aus Beschränktheit auf gewissen Kurven in  $x > 0$  und hinreichend schwachem Zuwachs überhaupt in  $x > 0$  folgt Beschränktheit auf  $z > 0$ .

G. af Hällström.

Boas jr., R. P.: A note on functions of exponential type. Bull. Amer. math. Soc. 47, 750—754 (1941).

Neue Beweise für drei Sätze über ganze Funktionen vom Exponentialtypus.

1. Satz von Widder:  $f(x)$  sei auf  $\langle 0, 1 \rangle$  beliebig oft differenzierbar und genüge dort den Bedingungen  $(-1)^n f^{(2n)}(x) \geq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ; dann stimmt  $f(x)$  in  $(0, 1)$  mit einer ganzen Funktion  $g(z)$  überein, deren Exponentialtypus höchstens  $\pi$  ist, d. h.  $g(z)$  ist höchstens vom Mitteltypus  $\pi$  der Ordnung 1. Ist  $f^{(4n)}(x) \geq 0$ ,  $(-1)^n f^{(2n)}(1) \geq 0$ ,  $(-1)^n f^{(2n+1)}(0) \leq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , so ist der Typus  $\leq \pi/2$ .

2. Satz von Schoenberg:  $f(z)$  sei vom Exponentialtypus  $\leq T$  und  $f^{(2n)}(0) - f^{(2n)}(1) = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ; dann ist  $f(z)$  von der Form  $f(z) = \sum_{j=0}^N a_j \sin \pi j z$ .  $N \leq T/\pi$ .

3. Satz von Poritzky-Whittaker: Es sei  $P_0(z) = z$ ,  $P_n''(z) = P_{n-1}(z)$ ,  $P_n(0) = P_n(1) = 0$ ,  $n \geq 1$ . Ist  $f(z)$  vom Exponentialtypus  $\leq T < \pi$ , dann ge-

stattet  $f(z)$  die Darstellung  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n)}(1) P_n(z) - \sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n)}(0) P_n(z-1)$  (Lidstone-Reihe). Die Reihen konvergieren gleichmäßig auf jedem beschränkten Teilbereich der  $z$ -Ebene.

H. Wittich.

Boas jr., R. P. and A. C. Schaeffer: A theorem of Cartwright. Duke Math. J. 9, 879—883 (1942).

Die ganze transzendente Funktion  $g(z)$  genüge den Bedingungen  $|g(z)| = O(e^{k|z|})$ ,  $0 < k < \pi$ , und  $|g(n)| \leq M$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ ; dann ist  $g(z)$  auf der reellen Achse beschränkt:  $|g(x)| \leq A(k) \cdot M$ . Die Voraussetzung  $k < \pi$  ist wesentlich, wie die Funktion  $g(z) = z \cdot \sin \pi z$  zeigt. Für  $k > \pi$  gilt  $A(k) \rightarrow \infty$ . Verf. zeigen, daß  $A(k)$  bei  $k \rightarrow \pi$  wie  $\log(1/(\pi - k))$  anwächst.

H. Wittich.

Boas jr., R. P.: Entire functions of exponential type. Bull. Amer. math. Soc. 48, 839—849 (1942).

Zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen über ganze Funktionen vom Exponentialtypus, die auf A. J. Macintyre, G. Pólya, J. Schoenberg, Verf. u. a. zurückgehen. Verf. führt eine Folge von Operatoren  $L_n$  ein, die einer ganzen Funktion vom Exponentialtypus wieder eine Funktion dieser Klasse zuordnen, z. B.  $L[f(z)] = f'(z)$ ,  $L[f(z)] = f(z+1) - f(z)$  usw. Aus der Darstellung  $f(z) = \int_C e^{zw} \Phi(w) dw$  folgt  $L[f(z)] = \int_C e^{zw} \Phi(w) \lambda(w) dw$ , wobei in den auf-

geführten Beispielen  $\lambda(w) = w$ ,  $\lambda(w) = e^w - 1$  ist. Neben einer Folge von Operatoren  $L_n$  wird eine Folge komplexer Zahlen  $a_0, a_1, \dots$  betrachtet und gefragt: Für welche ganzen Funktionen  $f(z)$  vom Exponentialtypus folgt aus  $L_n[f(a_n)] = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $f(z) = 0$ ? Bekannte Eindeutigkeitsätze erscheinen als Sonderfälle:  $L_{2n}[f] = L_{2n+1}[f] = f^{(2n)}(z)$ ,  $a_{2n} = 0$ ,  $a_{2n+1} = 1$ . Ist dann  $f(z)$  vom Exponentialtypus  $c$ , so folgt aus  $L_n[f(a_n)] = 0$ :  $f(z)$  ist ein Sinuspolynom der Ordnung  $\leq c\pi^{-1}$  und im Falle  $c < \pi$  gilt  $f(z) \equiv 0$ . Analog ergibt sich für zwei einparametrische Operatoren  $L_l$  und  $M_l$  die Frage: Welche Aussagen lassen sich aus Wachstumsbeschränkungen von  $L_{\lambda_n}[f(a_n)]$  über das Anwachsen von  $M_{\mu_n}[f(b_n)]$  bzw.  $M[f(x)]$  gewinnen?

In diese Fragestellung ordnen sich Untersuchungen von S. Bernstein, A. J. Macintyre, Verf. u. a. ein. Beispiele: Ist  $f(z)$  vom Exponentialtypus  $c' < \pi$  und  $|f(n)| \leq K$ , so gilt  $|f'(x)| \leq c' A(c') \cdot K$ . Aus  $|f(n)| \leq K$  folgt  $|f''(x) + \pi^2 f(x)| \leq A \cdot K$ , falls  $c' < \pi$ . Ein umfangreiches Schriftenverzeichnis informiert über die einschlägigen Arbeiten.

H. Wittich.

Boas jr., R. P.: Functions of exponential type. I, II, IV. Duke math. J. 11, 9—15, 17—22, 799 (1944).

[Teil III: Duke math. J. 11, 507—511 (1945).] I: Eine ganze Funktion vom Exponentialtypus, die auf der reellen Achse periodisch ist, reduziert sich auf eine endliche trigonometrische Summe. Ist  $f(z)$  vom Typus  $c$  und existiert  $M[f] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)| dx$ , so gilt für reelle  $\lambda$   $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$ ,

falls  $|\lambda| \geq c$  ist. Da fastperiodisch im Sinne von Besicovitch die Existenz des Mittelwertes  $M[f]$  nach sich zieht, gilt das eingangs erwähnte Resultat für solche fastperiodischen Funktionen. Weiter wird noch gezeigt, daß  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \left(1 - \cos \frac{z}{n}\right)^n$

vom Exponentialtypus, auf der reellen Achse unbeschränkt und dort im Sinne von Besicovitch fastperiodisch ist. — II: Die Whittakersche Konstante  $W$  ist die obere Grenze aller Zahlen  $C$  folgender Eigenschaft: Jede ganze Funktion  $f(z)$  vom Exponentialtypus  $C$ , für welche  $f^{(n)}(z) = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , auf  $|z| \leq 1$  mindestens eine Wurzel hat, ist  $\equiv 0$ . Verf. verschärft die Abschätzung  $\log 2 \leq W \leq \pi/4$  zu  $0,718 < W < 0,748$ . Ob die Vermutung  $W = 2/e$  zu Recht besteht, ist nicht bekannt. Ein Versehen in der numerischen Rechnung wird in Teil IV berichtigt. H. Wittich.

Boas jr., R. P.: Functions of exponential type. V. Duke math. J. 12, 561—567 (1945).

[Teil IV s. vorsteh. Referat.] Die Folge  $\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_1, \dots$  komplexer Zahlen habe folgende Eigenschaften:  $|a_{j+1} - a_j| > \delta > 0$ ,  $|a_j + a_{-j}| = O(j^\beta)$ ,  $\beta < 1$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} n(r; \theta_1, \theta_2) r^{-1} = n(\theta_2) - n(\theta_1)$ . Dabei ist  $n(r; \theta_1, \theta_2) =$  Zahl der  $a_j$ , die  $|a_j| \leq r$ ,  $\theta_1 \leq \arg a_j \leq \theta_2$  genügen;  $n(\theta)$  eine wachsende Funktion:  $n(\theta) = \frac{1}{2}(n(\theta + 0) + n(\theta - 0))$ ,  $n(\theta + 2\pi) = n(\theta) + 2\pi$ . Verf. diskutiert das Produkt  $f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \left(1 - \frac{z}{a_{-j}}\right)$  und stellt fest:  $f(z)$  ist eine ganze Funktion der Ordnung 1. Ihr Indikator  $h(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log |f(r e^{i\theta})|$  genügt den Bedingungen  $h(\theta + \pi) = h(\theta)$  und  $h(\theta) = \pi \int_0^{\theta} \sin t \, dn(\theta + t)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Im Falle  $n(\theta) = L\theta$

(gleiche Nullstellendichte in allen Richtungen) ist  $f(z)$  vom Typus  $2\pi L$ . Das Resultat ist in Untersuchungen von A. Pfluger enthalten. H. Wittich.

Boas jr., R. P.: Fundamental sets of entire functions. Ann. of Math., II. Ser. 47, 21—32 (1946).

Eine Menge  $\{u_n(z)\}$  heißt fundamental oder vollständig, wenn jede in  $|z| < 1$  analytische Funktion innerhalb  $|z| < 1$  durch eine Linearkombination der  $u_n(z)$  gleichmäßig approximiert werden kann. Als Menge  $\{u_n(z)\}$  werden die aus einer ganzen Funktion  $F(z)$  entstehenden Funktionen  $F(a_n z)$  und  $F(z + a_n)$  betrachtet, wobei im Falle  $F(a_n z)$   $F^{(m)}(0) \neq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , gelten soll (Vor. P) und im Falle  $F(z + a_n)$   $F(z)$  keine Exponentialsumme sein soll (Vor. T). Die Bestimmung dieser Mengen  $\{u_n(z)\}$  hängt eng zusammen mit der Frage, ob die Folge  $\{a_n\}$  eine  $E$ -Menge der Klasse  $(\rho, \tau)$  ist, d. h. ob für eine ganze Funktion  $f(z)$  der Ordnung  $\rho$  und des Typus  $\tau$  aus  $f(a_n) = 0$   $f(z) = 0$  folgt. Die Art, wie die  $E$ -Mengen in die Resultate eingehen, zeigt das Ergebnis:  $\{a_n\}$  sei  $E$ -Menge der Klasse  $(\rho, \tau)$ . Dann ist  $F(a_n z)$  vollständig, wenn  $F(z)$  zur Klasse  $(\rho, \tau)$  gehört und Vor. P genügt. Die entsprechende Behauptung für  $F(z + a_n)$  beweist Verf. für ganze Funktionen vom Exponentialtypus. Ist  $\{a_n\}$  keine  $E$ -Menge der Klasse  $(\rho, \tau)$ , dann gibt es Funktionen  $E(z)$  der Klasse  $(\rho, \tau_1)$ ,  $\tau_1 > \tau$ , die Vor. P genügen, aber zu keinem vollständigen System  $E(a_n z)$  führen. Entsprechende Beispiele gibt es für  $F(z + a_n)$ . Diese und andere Sätze verallgemeinern Ergebnisse von N. Levinson, A. Gelfond und A. Marcouchewitch. H. Wittich.

**Maitland, B. J.:** On analytic functions bounded at a double sequence of points. Proc. London math. Soc., II. Ser. 45, 440—457 (1939).

Die Untersuchung verallgemeinert den Satz A: Die ganze Funktion  $f(z)$  genüge den Bedingungen  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-2} \log M(r) < \pi/2$  und  $|f(m + in)| \leq C$ ,  $m, n = 0, \pm 1, \dots$ ; dann ist  $f(z)$  eine Konstante. — In den Quadraten  $Q_{mn}$  mit den Eckpunkten  $m + in$ ,  $m + 1 + in$ ,  $m + 1 + i(n + 1)$ ,  $m + i(n + 1)$  wird ein Punkt  $z_{mn}$  ausgewählt, der die Rolle des Gitterpunktes in Satz A übernimmt. Dann gilt Satz B:  $f(z)$  sei vom Typus  $< \pi/2$  der Ordnung 2 und in der Punktfolge  $z_{mn}$  beschränkt, wobei zwei beliebige Interpolationspunkte einen Abstand  $> \varrho > 0$  besitzen sollen; dann ist  $f(z)$  eine Konstante. Ohne die Abstandsbedingung gilt die gleiche Aussage, falls der Typus  $< \pi/8$  ist. Da die Beweise für Satz A zum Vorbild dienen, liegt die Hauptarbeit in der Aufstellung passender Interpolationsformeln. Vgl. A. Pfluger, dies. Zbl. 27, 306. H. Wittich.

**Besicovitch, A. S.:** A note on integral functions. J. London math. Soc. 19, 207 (1944).

Kurzer Beweis des Satzes: Eine ganze transzendente Funktion  $f(z)$  der Ordnung  $< 1$  kann in keiner Halbebene beschränkt sein. Aus  $|f(z)| < M$  für  $\Re z = x \geq 0$  folgt  $f(z) + M = A \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z_j - z}{z_j}$ ,  $z_j = -a_j + ib_j$ ,  $a_j > 0$ , und daraus  $|f(-x + iy) + M| < |f(x + iy) + M| < 2M$ , also  $|f(z)| < 3M$  für alle  $z$ , was unmöglich ist. H. Wittich.

**Levinson, Norman:** The Gontcharoff polynomials. Duke math. J. 11, 729—733 (1944).

Mit Hilfe der Gontcharoffschen Polynome  $G_0(z) \equiv 1$ ,  $G_1(z, z_0) = z - z_0, \dots$ ,  $G_n(z, z_0, \dots, z_{n-1}) = \int_{z_0}^z dt_1 \int_{z_1}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{z_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_n$  ( $n > 1$ ), wird für die Whittakersche Konstante die Schranke  $W > 0,7199$  abgeleitet. H. Wittich.

**Nachbin, Leopoldo:** An extension of the notion of integral functions of the finite exponential type. Anais Acad. Brasil. Ci. 16, 143—147 (1944).

Mit den reellen Zahlen  $\alpha_n$ ,  $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots$ ,  $\alpha_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , wird die ganze transzendente Funktion  $e(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{\alpha_0 \cdots \alpha_n}$  gebildet. Eine ganze transzendente Funktion  $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$  heißt vom endlichen  $\{e(z); s\}$ -Typus, wenn  $s$  die kleinste nicht negative reelle Zahl mit folgender Eigenschaft ist: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Zahl  $K(\varepsilon)$ , so daß für alle  $z$   $|f(z)| \leq K(\varepsilon) e[(s + \varepsilon)|z|]$  gilt.  $f(z)$  ist genau dann vom endlichen  $\{e(z); s\}$ -Typus, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_0 \cdots \alpha_n) \cdot |a_n|^{1/n} = s$  erfüllt ist. Für  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_n = n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ist  $f(z)$  vom Exponentialtypus. H. Wittich.

**Buck, R. Creighton:** A class of entire functions. Duke math. J. 13, 541—559 (1946).

$K_A$  bedeute die Klasse ganzer Funktionen der Ordnung 1, deren Indikator  $h(q)$  der Abschätzung  $h(q) \leq A$  genügt. Für die Klasse  $K(a, c)$  sei noch  $h(0) \leq a$ ,  $h(\pi) \leq a$ ,  $h(\pm \frac{\pi}{2}) \leq c$ . Wenn die Folge  $w_n$  der Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n|^{1/n} < \infty$  genügt, gibt es stets Funktionen  $f(z) \in K(a, \pi)$  oder  $K_A$  mit der Eigenschaft  $f(n) = w_n$ . Unter zusätzlichen Annahmen über die  $w_n$  gibt es auch Funktionen  $f(z)$  der Klasse  $K(a, c)$ ,  $c < \pi$ , mit  $f(n) = w_n$ :  $G(z) = \sum_0^{\infty} w_n z^n$  sei in einer Umgebung des Nullpunktes regulär und besitze eine analytische Fortsetzung, die in  $z = \infty$  und in einer offenen Menge, die die ganze neg. reelle Achse enthält, noch regulär ist.



Dann gilt  $f(n) = w_n$ ,  $f(z) \in K(a, c)$  mit  $c < \pi$ . Dieser Satz, der mit Hilfe eines Resultates von G. Pólya über Boreltransformierte bewiesen wird, gestattet die Herleitung weiterer, z. T. bekannter Sätze. Beispiele: Aus  $f(z) \in K(a, c)$  mit  $c < 0$  folgt  $f(z) \equiv 0$ ; aus  $f(z) \in K(a, c)$ ,  $c < \pi$ ,  $f(n) = 0$  folgt  $f(z) \equiv 0$ ; aus  $f(z) \in K_A$  und  $h(0) + h(\pi) < 0$  folgt  $f(z) \equiv 0$  oder: Aus  $f(z) \in K(a, c)$ ,  $c < \pi$ ,  $f(n) = r_n e^{i\theta_n}$  folgt  $f(z) \equiv 0$ , falls für eine Zahl  $\lambda$ ,  $c < \lambda < \pi$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\theta_n + n\lambda))^{1/n} > 0$

gilt. Die Untersuchungen über ganzzahlige  $f(n)$  werden verallgemeinert: Es sei  $f(n) = A_n + \gamma_n$ ,  $A_n$  ganz und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{1/n} = 1$ . Aus  $f(z) \in K(a, c)$ ,  $c < \pi$ ,  $h(0) \leq 0$  folgt  $f(z) = F(z) + g(z)$  mit  $F(n) = A_n$ ,  $g(n) = \gamma_n$ , wobei  $F, g$  zur Klasse  $K(a', c')$ ,  $c' < \pi$ , gehören. Aus  $f(z) \in K(0, c)$  folgt unter denselben Vor.  $\gamma_n = 0$  für alle  $n$ . Ist  $p_n$  die  $n$ -te Primzahl, so gibt es zur Klasse  $K(0, \pi)$  gehörige Funktionen der Eigenschaft  $f(n) = p_n$ , während die Klasse  $K(a, c)$ ,  $c < \pi$ , keine solche Funktion aufweist.  
H. Wittich.

Shimizu, Tatsujiro: On some property of regular functions in  $|z| < 1$ . Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 140—143 (1942).

Sei  $f(z)$  regulär für  $|z| < 1$ ,  $M_\theta(r, \varepsilon) = \sup_{\theta - \varepsilon < \varphi < \theta + \varepsilon} |f(r e^{i\varphi})|$ ,  $\lim_{r \rightarrow 1} M_\theta(r, \varepsilon) = \overline{M}_\theta(1, \varepsilon)$ ,  $\inf_{\varepsilon > 0} \overline{M}_\theta(1, \varepsilon) = \overline{M}_\theta(1)$ . Sei  $E_\theta$  eine  $\theta$ -Menge, die in  $(0, 2\pi)$  überall dicht ist. Wenn für jedes  $\theta$  von  $E_\theta$   $\lim_{r \rightarrow 1} f(r e^{i\theta})$  existiert und  $M_\theta(1) = \infty$ , so hat die Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion von  $f(z)$  im Endlichen keinen Randteil.

V. Paatero.

(1) Dufresnoy, Jacques: Sur les fonctions méromorphes et univalentes dans le cercle unité. Bull. Sci. math., II. Sér. 69, 21—36 (1945).

(2) Dufresnoy, Jacques: Remarques complémentaires sur deux propriétés de la représentation conforme. Bull. Sci. math., II. Sér. 69, 117—121 (1945).

(1): Nach Mlle J. Ferrand sind die Ausnahmемengen der Fatouschen Sätze für beschränkte analytische Funktionen nicht nur vom gewöhnlichen Maße Null, sondern auch vom  $h$ -Maß Null. Verf. zeigt, daß diese Mengen auch von der Kapazität Null sind. (2): Zwei ergänzende Sätze werden bewiesen.

H. P. Künzi.

Dufresnoy, Jacques: Sur la correspondance des frontières dans la représentation conforme. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 189—190 (1945).

Zusammenfassung von Resultaten der vorstehend besprochenen Arbeiten.

H. P. Künzi.

Ríos, Sixto: Über den Picardschen Satz. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 5, 151—163 (1945) [Spanisch].

Montel, Paul: Sur les fonctions analytiques dont les valeurs couvrent un domaine d'aire bornée. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. 6, 273—286 (1946).

In  $D$  sei  $f(z)$  regulär und bilde  $D$  auf ein Riemannsches Flächenstück vom Inhalt  $\leq \pi \varrho^2$  ab. Aus der Normalität dieser  $f$ -Familie folgen Sätze von Picard-, Schottky-, Landau-Typus. Ist  $D: |z| < 1$ ,  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ , so folgt  $|f(z)| \leq |a_0| + \varrho \ln(1 - r^2)^{-1/2}$ . Gleichheit bei Extremalfunktion. Ist  $D: |z| < R$ , so gilt  $R \leq \varrho/|a_1|$ , Gleichheit für  $f = a_0 + a_1 z$ .  
G. af Hållström.

(1) Gueller, S.: On the class of regular functions which do not take on any pair of values  $w$  and  $-w$ . Mat. Sbornik, n. Ser. 19 (61), 33—46 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(2) Jørgensen, Vilhelm: Elementarer Beweis eines Satzes vom Picardschen Typus. Mat. Tidsskr. B 1946, 129—134 (1946) [Dänisch].

Die Voraussetzung  $R f(z) > 0$  der Sätze von Schwarz-Pick und Julia-Caratheodory wird verallgemeinert, die Sätze werden dementsprechend modi-

fiziert. In (1) wird  $f(z)$  in  $|z| < 1$  regulär angenommen und gefordert (a)  $f = 1 + a_1 z + \dots$  und  $f(z_1) \neq -f(z_2)$  oder (b)  $f = a_1 z + \dots$  und  $f(z_1) \cdot f(z_2) \neq 1$ . In (2) wird gefordert, daß  $w = f(z)$ , regulär in  $\Re z > 0$ , daselbst Werte der imaginären  $w$ -Achse ausläßt, so daß jedes Komplementärintervall dieser Achse  $\leq 2\pi$  ist. G. af Hällström.

**Biggeri, Carlos:** Über die Juliaschen Linien ganzer Funktionen. Bol. Mat. 14, 264—265 (1941) [Spanisch].

**Biggeri, C.:** Über die Ausnahmewerte analytischer Funktionen. Bol. Mat. 15, 9—13 (1942) [Spanisch].

**Biggeri, C.:** Über die Uniformisierung analytischer Funktionen. Bol. Mat. 15, 49—56 (1942) [Spanisch].

**Pu, Pao-Ming:** On the unified theory of meromorphic functions in the unit circle. Wu-Han Univ. J. Sci. 8, Nr. 1, 3.1—3.14 (1942).

**Dufresnoy, Jacques:** Sur les fonctions méromorphes dans le cercle unité et couvrant une aire bornée. C. r. Acad. Sci., Paris 219, 274—276 (1944).

**Dufresnoy, Jacques:** Sur quelques progrès récents de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Revue sci. 79, 608—612 (1941).

Kurze Zusammenfassung der Nevanlinnaschen Wertverteilungslehre sowie der Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen, an die sich einige neue Resultate des Verf. anschließen. H. P. Künzi.

**Milloux, H.:** Sur une inégalité de M. R. Nevanlinna. Revista Ci. 47, 507—544 (1945).

Estimations du terme complémentaire de la seconde formule fondamentale de Nevanlinna dans la théorie des fonctions méromorphes. J. Dufresnoy.

**Selberg, H. L.:** Über einen Satz von Collingwood. Arch. Math. Naturvid. 48, Nr. 9, 119—126 (1944).

**Selberg, H. L.:** Über den zweiten Hauptsatz der Wertverteilungslehre. Arch. Math. Naturvid. 48, Nr. 10, 127—144 (1944).

**Selberg, Henrik L.:** Eine Ungleichung der Potentialtheorie und ihre Anwendung in der Theorie der meromorphen Funktionen. Commentarii math. Helvet. 18, 309—326 (1946).

**Selberg, Henrik L.:** Über eine Ungleichung der Potentialtheorie. Commentarii math. Helvet. 18, 327—330 (1946).

Soit  $g(z, z_0)$  la fonction de Green de pôle  $z_0$  d'un domaine  $G$ . Si un cercle coupe  $G$  suivant des arcs  $Q$  d'angle total  $\theta$ , on a  $\int_Q g(z, z_0) dq \leq \pi^2 \operatorname{tg} \theta / 4$ . Inégalité analogue lorsque le cercle est remplacé par une droite. — Applications: Soit  $W$  la surface de Riemann correspondant à une fonction méromorphe  $f(z)$ . 1° Si, sur un voisinage de  $a$ ,  $W$  a seulement des îles d'un nombre fini de feuilletts, alors  $m(r, a) = O(\log r)$ . 2° Si les points frontières de  $W$  sont situés sur un nombre fini de points  $a_v$  et si les points de ramification algébriques ne sont pas trop abondants en dehors des voisinages immédiats des  $a_v$ , on peut donner pour le terme complémentaire de la seconde relation fondamentale de Nevanlinna une borne inférieure analogue à la borne supérieure bien connue. J. Dufresnoy.

**Teichmüller, Oswald:** Einfache Beispiele zur Wertverteilungslehre. Deutsche Math. 7, 360—368 (1944).

Für gewisse durch den Streckenkomplex gegebene Funktionen werden Defekte und Indizes berechnet und die charakteristische Funktion abgeschätzt. Die Resultate ergeben sich wegen der Periodizität des Komplexes. G. af Hällström.

**Tôki, Yukinari:** On the behaviour of a meromorphic function in the neighbourhood of a transcendental singularity. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 296—300 (1941).

$f(z)$  sei eindeutig und meromorph in einem Gebiet  $D$  mit dem Rand  $\Gamma$ . Einem Randpunkte  $z_0$  werden drei Mengen, nämlich zwei Limesmengen  $S_{z_0}^{(D)}$  und  $S_{z_0}^{(\Gamma)}$

sowie der Vorrat  $R_{z_0}^{(D)}$  zugeordnet in üblicher Weise. Es ist zunächst bewiesen, daß, wenn  $z_0$  ein nicht isolierter Punkt von  $I'$  ist und  $\Omega$  ein beliebiges Gebiet ist mit der Beschaffenheit  $\Omega \cap S_{z_0}^{(D)} = \emptyset$  und  $\Omega \subset C(S_{z_0}^{(D)})$ , dann  $R_{z_0}^{(D)}$  alle Werte von  $\Omega$  bis auf höchstens zwei enthält. Der Beweis beruht auf der Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen. Der Satz wird sodann angewandt auf die Sätze von Beurling-Kunugui und Iversen-Groß-Noshiro. Y. Komatu.

Tsuji, Masatsugu: On an extension of Löwner's theorem. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 220—221 (1942).

Der sog. Löwnersche Hilfssatz verallgemeinert sich wie folgt:  $w = f(z)$  mit  $f(0) = 0$  sei regulär in  $|z| < 1$  und genüge dort der Bedingung  $|f(z)| < 1$ .  $E$  sei die maximale Menge von  $\theta$  mit der Beschaffenheit, daß der Limes  $f(e^{i\theta}) = e^{i\psi}$  existiert für und nur für  $\theta \in E$ , und ferner sei  $E^*$  die entsprechende  $\psi$ -Menge auf  $w = 1$ . Dann sind  $E$  und  $E^*$  beide meßbar; es gilt stets  $m E \leq m E^*$ , und sogar  $m E < m E^*$ , insofern  $0 < m E < 2\pi$  ist. Y. Komatu.

(1) Tsuji, Masatsugu: On the behaviour of a meromorphic function in the neighbourhood of a closed set of capacity zero. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 213—219 (1942).

(2) Tsuji, Masatsugu: On the domain of existence of an implicit function defined by an integral relation  $G(x, y) = 0$ . Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 235—240 (1943).

(3) Tsuji, Masatsugu: On the Riemann surface of an inverse function of a meromorphic function in the neighbourhood of a closed set of capacity zero. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 257—258 (1943).

(4) Tsuji, Masatsugu: Theory of meromorphic functions in a neighbourhood of a closed set of capacity zero. Japanese J. Math. 19, 139—154 (1944).

(1):  $E$  sei eine in einem beschränkten Gebiet  $D$  enthaltene abgeschlossene Menge der Kapazität Null auf der  $z$ -Ebene. Eine in  $D - E$  meromorphe Funktion  $w = f(z)$  besitze jeden Punkt von  $E$  als eine wesentliche Singularität. Dem Evansschen Satze gemäß gibt es dann eine positive Maßverteilung  $\mu$  mit dem Gesamtmaß Eins, derart, daß die durch  $u(z) = \int_E \left( \log \frac{1}{|z - a|} \right) d\mu(a)$  definierte Funktion

sich in  $D - E$  harmonisch verhält und sogar  $u(z) = \infty$  überall auf  $E$ . Sei  $\theta(z)$  zu  $u(z)$  konjugiert harmonisch, dann spielt das Paar  $e^{u(z)}$  und  $\theta(z)$  eine analoge Rolle für die Theorie der in  $D$  meromorphen Funktionen wie das Paar  $|z|$  und  $\arg z$  für die der in  $|z| < \infty$  meromorphen Funktionen. Die Analoga der Nevanlinnaschen Hauptsätze, eine Verallgemeinerung des Großschen Satzes sowie die verwandten Sätze werden dann hergeleitet. In (2) wird die durch eine Gleichung  $G(x, y) = 0$  definierte analytische Funktion  $y(x)$  betrachtet, wo  $G(x, y)$  eine ganze Funktion in bezug auf  $x$  und  $y$  bedeutet. Während G. Julia [Bull. Soc. math. France 54, 26—37 (1926)] bewiesen hat, daß der Wertevorrat von  $y(x)$  kein Kontinuum auslassen kann, beweist Verf. hier sogar, daß  $y(x)$  alle Werte unendlich oft annimmt außer einer Menge von der Kapazität Null, insofern die Umkehrfunktion nicht in eine algebraische Funktion ausartet. Ferner zeigt er, daß jeder nur endlich oft angenommene Wert  $y_0(\infty)$  ein Zielwert von  $y(x)$  sein muß; dies ist eine Verallgemeinerung eines Resultats von Iversen [Diss., Helsingfors (1914)]. In (3) sei  $E$  wieder eine abgeschlossene Menge von der Kapazität Null, und  $C$  sei eine  $E$  umschließende Jordankurve, die zusammen mit  $E$  ein Gebiet  $D$  begrenzt. Nun sei  $w(z)$  eine in  $D$  eindeutige reguläre Funktion, die jeden Punkt von  $E$  als eine wesentliche Singularität besitzt. Dann läßt sich zeigen, daß die Menge auf der  $w$ -Ebene, die aus Projektionen der direkt kritischen Singularitäten der Umkehrfunktion  $z(w)$  besteht, stets verschwindende Kapazität besitzt. (4) enthält die ausführlichen Überlegungen der oben mitgeteilten Resultate. Y. Komatu.



**Tsuji, Masatsugu:** On the cluster set of a meromorphic function. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 60—65 (1943).

$E$  sei eine abgeschlossene Menge von verschwindender Kapazität auf der  $z$ -Ebene, die auf dem Rand  $\Gamma$  eines beschränkten Gebietes  $\Delta$  liegt. Es gelte  $U \cap (\Gamma - E) \neq \emptyset$  für jede Umgebung  $U$  eines gegebenen Punktes  $z_0$  von  $E$ . Neben der Limesmenge an  $z_0$  aus dem Inneren von  $\Delta$  wird die Limesmenge an  $z_0$  längs  $\Gamma - E$  eingeführt, indem  $E$  aus  $\Gamma$  beseitigt wird. Bezüglich der letzteren beweist Verf. einige Resultate, die denen von Iversen, Noshiro und Kunugui im gewöhnlichen Falle entsprechen.

*Y. Komatu.*

(1) **Tsuji, Masatsugu:** On the behaviour of an inverse of a meromorphic function at its transcendental singular point. I. II. III. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 414—417, 474—475 (1941); 18, 132—139 (1942).

(2) **Tsuji, Masatsugu:** Nevanlinna's fundamental theorems and Ahlfors' theorem on the number of asymptotic values. Japanese J. Math. 18, 675—708 (1943).

(1), I:  $w = f(z)$  sei eine in  $|z| < \infty$  meromorphe Funktion, und  $\omega$  sei eine auf  $w = 0$  gelegene transzendente Singularität der Umkehrfunktion  $z = q(w)$ .  $\Delta$  sei die Punktmenge auf der  $z$ -Ebene, die der  $q$ -Umgebung von  $\omega$  auf der Riemannschen Fläche  $F$  entspricht, und  $\Delta_r$  sei die zusammenhängende Komponente von  $\Delta \cap \{|z - z_0| < r\}$ , die einen gegebenen Punkt  $z_0$  von  $\Delta$  enthält. Ferner sei  $L(r)$  die Länge des Bildes des auf  $|z - z_0| = r$  gelegenen Randteils von  $\Delta_r$ , und  $A(r)$  sei die Anzahl der innerhalb  $\Delta_r$  gelegenen Löcher, und es sei  $S(r) = A(r) \pi \varrho^2$ , wo  $A(r)$  der Flächeninhalt des  $\Delta_r$  entsprechenden Gebietes auf  $F$  bedeutet. Dann läßt sich zeigen, daß  $A(r) \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow \infty$  gilt, und daß es eine Folge  $\{r_n\}$  mit  $r_n \rightarrow \infty$  gibt, für welche  $L(r_n)/S(r_n) \rightarrow 0$  ist; genauer, daß für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge von  $r$  mit  $L(r) > A^{\varepsilon+1/2}$  stets eine endliche logarithmische Länge besitzt. Weiter zeigt sich, daß, wenn sämtliche über den punktfremden Grundgebieten  $D_k$  ( $k = 1, \dots, q$ ) liegenden einfach zusammenhängenden Inseln mindestens  $\mu_k$ -blättrig sind,  $\sum_{k=1}^q \left(1 - \frac{1}{\mu_k}\right) \leq 1 + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{S(r)} \leq 2$  gilt. Der Beweis beruht auf der Ahlforsschen

Theorie der Überlagerungsflächen. II enthält eine Berichtigung für den in I gelieferten Beweis von  $A(r) \rightarrow \infty$  ( $r \rightarrow \infty$ ). In III wird erwähnt, daß die Analoga der Nevanlinnaschen Hauptsätze und somit auch des Borelschen Satzes gültig bleiben für die Wertverteilung in  $\Delta$ . Weiter ist ein Analogon des Ahlforsschen Satzes über die Anzahl der direkt kritischen transzendenten Singularitäten hergeleitet. Nun sei  $n(r)$  die Anzahl der  $w_0$ -Stellen von  $f(z)$  in  $\Delta \cap \{|z - z_0| \leq r\}$  für einen erreichbaren Randpunkt  $w_0$  von  $F$ . Ferner sei die Gesamtlänge des in demjenigen einfach zusammenhängenden Gebiet  $\Delta$  enthaltenen Teils von  $|z - z_0| \leq r$  gleich  $r \theta(r)$ , welches aus  $\Delta$  nach Zufügung der Löcher entsteht. Gilt die Unglei-

chung  $n(r) \leq K \int_{r_0}^r dr/r \theta(r)$  mit einer Konstanten  $K = K(z_0, \varrho)$  für jedes zugelassene

Paar von  $z_0$  und  $\varrho$ , dann soll  $w_0$  eine quasi-direkt kritische Singularität genannt werden. Dann läßt sich zeigen, daß die Anzahl  $n$  derartiger Singularitäten jeder Funktion von endlicher Ordnung  $P$  für  $|z| < \infty$  höchstens gleich  $2P$  ist, insofern  $n \geq 2$  ist. — (2) enthält die ausführlichen Beweisführungen der oben vorläufig mitgeteilten Sätze.

*Y. Komatu.*

**Kunugui, Kinjiro:** Une généralisation des théorèmes de MM. Picard-Nevanlinna sur les fonctions méromorphes. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 283—288 (1941).

**Kunugui, Kinjiro:** Sur la théorie des fonctions méromorphes et uniformes. Japanese J. Math. 18, 583—614 (1943).

$f(z)$  sei eine in einem beliebigen Gebiet  $D$  meromorphe Funktion, und  $z_0$  sei ein Punkt auf dem Rand  $\Gamma$  von  $D$ . Zwei Limesmengen  $S_{z_0}^{(D)}$  und  $S_{z_0}^{(\Gamma)}$  werden

definiert wie üblich. Verf. beweist, daß  $S_{z_0}^{(D)} = S_{z_0}^{(I)}$  eine offene Menge ist (dies. Zbl. 21, 240). Nun sei  $\Omega$  eine zusammenhängende Komponente von  $S_{z_0}^{(D)} = S_{z_0}^{(I)}$ , und ferner sei  $I$  ein Teilgebiet von  $\Omega$ . Dann untersucht Verf. die Wertverteilung von  $f(z)$  auf dem Gebiet  $f^{-1}(I)$  und gewinnt u. a. das Analogon des zweiten Hauptsatzes in der Ahlforsschen Form.

*Y. Komatu.*

Kunugui, Kinjiro: Sur la théorie de la distribution des valeurs. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 269—275 (1942).

Verf. versucht für die in einem beliebigen Gebiet meromorphen Funktionen, ein Analogon des ersten Hauptsatzes aufzustellen. Aber die hier gewonnene Abschätzung ist unrichtig, da sie mittels eines Gegenbeispiels widerlegt worden ist; vgl. die unten besprochene Arbeit von Tumura in Japanese J. Math. 18, 797—876 (1943) insbes. p. 819.

*Y. Komatu.*

Kunugui, Kinjiro: Sur l'allure d'une fonction analytique uniforme au voisinage d'un point frontière de son domaine de définition. Japanese J. Math. 18, 1—39 (1942).

Verf. beschäftigt sich mit einer eindeutigen analytischen (regulären oder meromorphen) Funktion, insbes. in bezug auf deren Verhalten um nichtisolierte Randpunkte, indem er sein früheres Resultat benutzt (s. dies. Zbl. 21, 240). Die im Zusammenhang mit dem Picardschen Satze sowie dem Phragmén-Lindelöfschen Prinzip stehenden Resultate werden hergeleitet. An eine Verallgemeinerung des letzteren anschließend, wird die Folge derjenigen in einem Kreise meromorpher Funktionen untersucht, die dort drei Werte auslassen.

*Y. Komatu.*

Tumura, Yoshiro: Sur les singularités non directement critiques. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 606—611 (1942).

Es zeigt sich, daß einige Sätze über die Zielwerte der ganzen Funktionen auch im allgemeineren Falle der meromorphen Funktionen  $f(z)$  gültig bleiben, die verhältnismäßig wenig Pole besitzen. Die beschränkenden Bedingungen sind dargestellt in üblicher Schreibweise, z. B. durch  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} < \infty$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f)}{(\log r)^2} < \infty$  und  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r, f)}{\log r} < 1$ , usw.

*Y. Komatu.*

Tumura, Yoshiro: Sur le problème de M. Kunugui. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 289—295 (1941).

Tumura, Yoshiro: Sur le premier théorème dans la théorie des fonctions méromorphes. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 164—169 (1942).

Tumura, Yoshiro: Sur la distribution des valeurs. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 612—616 (1942).

Folgende Vermutung von Kunugui wird mittels eines Gegenbeispiels widerlegt: Bleibt die Charakteristik  $T(r, 1; a)$  einer in einem Gebiet  $I$  eindeutigen meromorphen Funktion  $f(z)$  stets invariant bis auf ein beschränktes Glied, wenn der Parameterpunkt  $a$  in  $f(I)$  variiert? Verf. liefert eine Abschätzung für die Differenz  $T(r, 1; a) - T(r, 1; b)$ , und weiter zieht er eine Verallgemeinerung des Resultats auf die algebroiden Funktionen in Betracht.

*Y. Komatu.*

Tumura, Yoshiro: Recherches sur la distribution des valeurs des fonctions analytiques. Japanese J. Math. 18, 797—876 (1943).

Die Abhandlung enthält die Erörterung der früher vom Verf. vorläufig mitgeteilten Resultate. In der ersten Hälfte beschäftigt er sich mit der Theorie der Limesmengen, insbes. mit der Kunuguischen Aufgabe (vgl. vorsteh. Referat). Er leitet zuerst den ersten Hauptsatz her. Sodann konstruiert er ein Gegenbeispiel, womit die Kunuguische Vermutung im allgemeinen verneint wird. Nachdem ein Hilssatz über konforme Abbildung auf das Schlitzgebiet aufgestellt worden ist, wird ein Fall untersucht, in dem diese Vermutung tatsächlich gilt. Sodann wird der zweite Hauptsatz hergeleitet. Die Verallgemeinerung der Resultate

auf die algebroiden Funktionen wird auch in Betracht gezogen. Die zweite Hälfte bezieht sich auf die Untersuchung der Singularitäten der Umkehrfunktion einer meromorphen Funktion. Insbesondere wird eine Klasse von indirekt kritischen Singularitäten betrachtet, deren Einflüsse auf die Ordnung der Funktion näher untersucht werden. Ein Satz von Phragmén-Lindelöf wird auch untersucht. Zum Schluß wird eine Klasse von meromorphen Funktionen betrachtet, die die Gesamtheit der ganzen Funktionen enthält.

*Y. Komatu.*

**Tumura, Yoshiro:** Quelques applications de la théorie de M. Ahlfors. Japanese J. Math. **18**, 303—322 (1942).

Die Ahlforssche Theorie der Überlagerungsflächen läßt sich verallgemeinern auf den Fall, daß mehrere Überlagerungsflächen auf einer Grundfläche vorhanden sind. Der so gewonnene Hauptsatz wird dann angewandt auf die eindeutig-meromorphen sowie algebroiden Funktionen.

*Y. Komatu.*

**Tumura, Yoshiro:** Sur une extension d'un théorème de M. Teichmüller. Proc. imp. Acad. Tokyo **19**, 55—59 (1943).

Ein Satz von Teichmüller (s. dies. Zbl. **16**, 266) bezüglich einfach zusammenhängender Gebiete wird hier auf mehrfach zusammenhängende Gebiete erweitert wie folgt.  $G$  sei ein durch  $n$  Kontinua begrenztes Gebiet auf der  $\zeta$ -Ebene, dessen Greensche Funktion mit  $g(\zeta, \zeta_0)$  bezeichnet werde.  $S$  sei eine auf einer Geraden gelegene Transversale mit der Beschaffenheit, daß alle Strecken auf  $S$ , deren beide Endpunkte auf verschiedenen Randkomponenten liegen, das Gebiet teilen, es sei denn, daß sie leer sind. Dann gilt die Abschätzung  $\frac{1}{2\pi} \int_S g(\zeta, \zeta_0) d\zeta \leq C_n L$ ,

worin  $L$  die Länge von  $S$  bedeutet und  $C_n$  eine nur von  $n$  abhängige Konstante ist. Bald darauf hat Kunugui (s. nachstehend angezeigte Arbeit) gezeigt, daß im Falle  $n=1$  der bestmögliche Wert des Koeffizienten  $C_1$  gleich  $\pi/2$  ist. Schließlich hat jedoch H.L. Selberg [Commentarii math. Helvet. **18**, 337—330 (1946); dies. Zbl. **60**, 226] sogar bewiesen, daß  $C_n$  gleich  $\pi/2$  gesetzt werden kann für jedes  $n$ .

*Y. Komatu.*

**Kunugui, Kinjiro:** Sur une constante de la transformation conforme. Proc. imp. Acad. Tokyo **19**, 278—281 (1943).

Teichmüller proved the following theorem: Let  $\zeta = \zeta(w)$  be regular and univalent in the unit circle  $|w| < 1$ . Denote by  $D$  the image of  $|w| < 1$  by  $\zeta = \zeta(w)$ . Let  $\gamma$  be a rectilinear segment which is a cross-cut of the domain  $D$ . Then we have  $\int_\gamma \log \frac{1}{|w|} |d\zeta| \leq cl$ , where  $l$  denotes the length of  $\gamma$  and  $c$  is a constant independent

on  $\zeta(w)$ . Further, Teichmüller conjectured that the best possible value of  $c$  is  $\pi/2$  and attained by the function  $\zeta = w(1 - w^2)^{-1}$  (s. Fis. this Zbl. **16**, 266). The present author shows that the conjecture is true, by extending Koebe's distortion theorem as follows: If  $\zeta(w)$  omits two values  $-\frac{1}{2}$  and  $+\frac{1}{2}$ , then there holds  $|dw|(1 - |w|^2) \geq |d\zeta|/|1 - 4\zeta^2|$ .

*K. Noshiro.*

**Kametani, Shunji:** The exceptional values of functions with the set of capacity zero of essential singularities. Proc. imp. Acad. Tokyo **17**, 429—433 (1941).

Verf. verallgemeinert einen Satz von R. Nevanlinna [Eindeutige analytische Funktionen (dies. Zbl. **14**, 163), insbes. S. 135, Satz 3] wie folgt: Jede eindeutige nicht-konstante analytische Funktion, die in einem Gebiet definiert ist, abgesehen von einer Menge  $E$  der wesentlich singulären Punkte mit verschwindender Kapazität, nimmt in beliebiger Umgebung jedes Punktes von  $E$  alle Werte unendlich oft an, außer höchstens den Werten einer Menge der Kapazität Null. Der Beweis beruht auf der Arbeit von P. J. Myrberg (dies. Zbl. **7**, 163) über die Existenz der Greenschen Funktion auf einer gegebenen Riemannschen Fläche. Das Resultat läßt sich auch als eine Verallgemeinerung eines Satzes von M. L. Cartwright (dies. Zbl. **13**, 69) ansehen.

*Y. Komatu.*



Kametani, Shunji: The exceptional values of functions with the set of linear measure zero, of essential singularities. I. II. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 117—120 (1941); 19, 438—443 (1943).

Die bewiesenen Sätze lauten: I. Jede meromorphe Funktion, die in einem Gebiet definiert ist, abgesehen von einer Menge  $E$  der wesentlich singulären Punkte mit verschwindendem linearem Maß, nimmt um jeden Punkt von  $E$  alle Werte an, evtl. bis auf die Werte einer Menge vom  $h$ -Maß Null, wenn und nur

wenn  $\lim_{\sigma \rightarrow +0} \int_{\sigma}^{\tau} t^{-2} h(t) dt < \infty$  ist für ein  $\tau > 0$ . Dies ist eine Verallgemeinerung eines

Cartwrightschen Satzes. II. Angenommen, es sei  $V(L) = \sup_{w \in L} \int_L |d \arg(w - w)| < \infty$

für einen rektifizierbaren Jordanbogen  $L$  in der  $w$ -Ebene. Wenn  $f(z)$  sich regulär verhält in einem Gebiet  $D$ , abgesehen von einer kompakten Teilmenge der wesentlich singulären Punkte mit verschwindendem linearem Maß, dann nimmt  $f(z)$  in  $D - E$  alle Werte unendlich oft an, bis auf eine Menge, deren Durchschnitt mit  $L$  das lineare Maß Null besitzt. Der Beweis beruht auf einem Satz von A. S. Besicovitch [Proc. London math. Soc., II. Ser. 32, 1—9 (1931)]. Y. Komatu.

Dufresnoy, Jacques: Sur les valeurs ramifiées des fonctions méromorphes. Bull. Soc. math. France 72, 76—92 (1944).

Für die Funktionen  $w = f(z)$ , meromorph in  $|z| < R$  ( $R < \infty$ ), welche zu Riemannschen Flächen  $\Sigma(R)$  gehören, die sich über  $q$  geschlossenen einfach-zusammenhängenden,  $u$ -blättrigen Inseln  $D_i$  ausbreiten, wird in Erweiterung einer Arbeit des Verf. die charakteristische Beziehung  $\Sigma(1 - 1/\mu_i) \geq 2$  diskutiert. Unter einer bestimmten Bedingung  $C$  gehören die betrachteten Funktionen einer normalen Familie an. H. P. Künzi.

Coluccio, Antonio: Sul prolungamento analitico. Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser. 12, 182—187 (1942).

Eine Untersuchung von P. Painlevé [vgl. L. Zoratti, Leçons sur le prolongement analytique (Paris 1911), p. 79—81; Encykl. math. Wiss. II, 3.1 (Leipzig 1909—1921), S. 407] wird verallgemeinert. W. Meyer-König.

Heins, Maurice H.: On the continuation of a Riemann surface. Ann. of Math., II. Ser. 43, 280—297 (1942).

Gibt es zu einer Riemannschen Fläche  $F$  eine Riemannsche Fläche  $F'$ , von der  $F$  ein echtes Teilgebiet ist, so heißt  $F$  fortsetzbar und  $F'$  eine Fortsetzung von  $F$ , im anderen Fall nichtfortsetzbar oder maximal. Für das von Radó gegebene Beispiel einer nichtfortsetzbaren Fläche [Math. Z. 20, 1—16 (1924)] vergleiche auch die nachstehend angezeigte Arbeit von Tsuji. Daß jede fortsetzbare Riemannsche Fläche eine maximale Fortsetzung besitzt, hat S. Bochner [Math. Ann. 28, 406—421 (1927)] mit Hilfe der Wohlordnungshypothesen und transfiniten Induktionen bewiesen. Verf. gibt einen davon unabhängigen Beweis des Bochner'schen Satzes sowie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Fortsetzbarkeit einer Fläche: Ist die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{G}$  der Fläche  $F$  als Gruppe von linearen Transformationen von  $z \leq 1$  in sich auf  $|z| = 1$  noch eigentlich diskontinuierlich, so ist  $F$  fortsetzbar; ist sie vom Grenzkreistypus, so kann  $F$  dann und nur dann fortgesetzt werden, wenn  $F$  ein Randelement erster Art im Sinne von Kerékjártó hat. A. Pfluger.

Tsuji, Masatsugu: On non-prolongable Riemann surfaces. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 429—430 (1943).

Yang, T.: Analyse zur Definition der Riemannschen Flächen. Tôhoku math. J. 49, 208—212 (1943).

Diskussion der von Weyl, Radó und Stoilow gegebenen Definitionen der Riemannschen Fläche. A. Pfluger.

Teichmüller, Oswald: Veränderliche Riemannsche Flächen. Deutsche Math. 7, 344—359 (1944).

Verf. hat das Anliegen zu beweisen, daß die konformen Klassen Riemannscher Flächen vom Geschlecht  $g$  durch eine  $\tau$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  dargestellt werden können [ $\tau = 0, 1$  oder  $3(g-1)$ , je nachdem  $g = 0, 1$  oder  $> 1$  ist]. Das Problem wird einfacher, wenn eine gewisse Überlagerungsmannigfaltigkeit  $\bar{M}$  von  $M$  betrachtet wird, bestehend aus den Paaren  $(F, T)$ , wo  $F$  eine beliebige Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  ist und  $T$  eine topologische Abbildung einer festen Fläche  $F'$  auf  $F$ . Zwei Paare  $(F, T)$  und  $(F', T')$  heißen gleich, wenn eine konforme Abbildung  $A$  von  $F$  auf  $F'$  existiert, so daß  $T'^{-1} A T$  auf  $F$  in die Identität deformierbar ist. Sein Hauptresultat lautet (in verkürzter Form): Die Paare  $(F, T)$  bilden eine  $\tau$ -dimensionale analytische Mannigfaltigkeit.

A. Pfluger.

Volkovyskij, L. I.: On the problem of type of simply-connected Riemann surfaces. Mat. Sbornik, n. Ser. 18 (60), 185—212 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Anwendungen der quasikonformen Abbildung auf das Typenproblem. Mit Hilfe des Grötzschschen Prinzips von der Superadditivität des Moduls werden hinreichende Kriterien für den parabolischen (Ahlfors) und hyperbolischen Typus gegeben sowie die Methoden erläutert, wie diese Kriterien mit Hilfe quasikonformer Abbildung und Verheftungen angewendet werden können. Mehrere interessante Beispiele.

A. Pfluger.

Laasonen, Pentti: Beiträge zur Theorie der fuchsoiden Gruppen und zum Typenproblem der Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 25, 87 p. (1944).

In einem ersten, topologisch-gruppentheoretischen Teil wird der Zusammenhang zwischen den fuchsoiden Hauptkreisgruppen vom Geschlecht Null ohne elliptische Substitutionen und den zugehörigen Fundamentalbereichen untersucht. Vor allem wird das Problem diskutiert, wann ein unendlichvielseitiges Orthogonalbogenpolygon in  $|z| < 1$  Fundamentalbereich einer fuchsoiden Gruppe sei. Dieses Problem wird im Grenzkreisfalle gelöst, im Falle eigentlicher Diskontinuitäten auf dem Hauptkreis sind die Verhältnisse, wie an verschiedenen Beispielen gezeigt wird, recht kompliziert. Der zweite, funktionentheoretische Teil enthält die Konstruktion von automorphen Funktionen für fuchsoiden Gruppen vom Geschlecht Null mit lauter parabolischen Erzeugenden, ausgehend von automorphen Funktionen, die zu den Fuchsschen Untergruppen gehören. Die singulären Ecken des Fundamentalbereiches werden in punkt- und kurvenartige Singularitäten unterschieden, je nachdem die automorphen Funktionen dort einen bestimmten Grenzwert oder eine Grenzmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums haben. Für beide Arten werden hinreichende Kriterien gegeben. Anwendung auf die Uniformisierung von schlichtartigen Riemannschen Flächen, die als Überlagerungsflächen der  $z$ -Ebene nur über endlich vielen Grundpunkten verzweigt sind, und damit zusammenhängende Typenfragen.

A. Pfluger.

Stoilow, S.: Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes dont la surface de Riemann a sa frontière de mesure harmonique nulle. Mathematica, Timişoara 19, 126—138 (1943).

Pour une telle fonction, tout nombre complexe est valeur limite relativement à la frontière de la surface de Riemann, sauf dans le cas où la fonction inverse est une algébroïde généralisée.

J. Dufresnoy.

Čufistova, A. M.: Angenäherte konforme Abbildung mit Hilfe der Exponentialfunktion. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski, Ser. mat. Nauk 6, 119—126 (1939) [Russisch].

Cisotti, Umberto: Corrispondenza conforme tra campi complementari. Atti Accad. Italia. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 4, 278—286 (1943).

Cisotti, Umberto: Funzioni analitiche complementari. Atti Accad. Italia. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 4, 388—397 (1943).

Keldyš, M. V.: Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf kanonische Bereiche. Uspechi mat. Nauk 6, 90—119 (1939) [Russisch].

Ferrand, Jacqueline: Sur l'inégalité d'Ahlfors et son application au problème de la dérivée angulaire. Bull. Soc. math. France 72, 178—192 (1944).

Ferrand, Jacqueline et Jacques Dufresnoy: Extension d'une inégalité de M. Ahlfors et application au problème de la dérivée angulaire. Bull. Sci. math., II. Sér. 69, 165—174 (1945).

Ferrand, Jacqueline: Sur les transformations conformes d'un domaine en lui-même laissant un bout premier invariant. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 189—190 (1946).

Dufresnoy, Jacques: Sur un théorème d'Ahlfors et son application à l'étude de la représentation conforme. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 424—427 (1945).

Ferrand, Jacqueline: Extension d'une inégalité de M. Ahlfors. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 873—874 (1945).

Ferrand, Jacqueline: Sur la déformation analytique d'un domaine. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 132—134 (1945).

Ferrand, Jacqueline: Étude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme. Bull. Soc. math. France 70, 143—174 (1942).

$z = q(\zeta)$  vermittelt eine eindeutige konforme Abbildung des einfach zusammenhängenden Gebietes  $I$  mit dem Rand  $I'$  auf  $|z| < 1$ . Verf. untersucht das Randverhalten und erweitert die Resultate auf quasikonforme Abbildungen. Für  $\zeta \rightarrow \Omega$  ( $\Omega$  = Primende von  $I'$ ) strebt  $z = q(\zeta)$  gegen einen festen Punkt von  $|z| = 1$  mit  $|z - a| < 2\pi |\log R|^{-1/2}$ .

H. P. Künzi.

Ferrand, Jacqueline: Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière. Ann. sci. Ecole norm. sup., III. Sér. 59, 43—106 (1942).

Zusammenfassung verschiedener C.-r.-Noten, in welcher die Abbildung des endlichen einfach zusammenhängenden Gebietes  $I$  auf  $|z| < 1$  untersucht wird. Mit Hilfe von H. Cartan- und Ahlforschen Methoden beweist Verf. einen Satz von Denjoy unter schwächeren Voraussetzungen, nach welchem für fast alle Randpunkte  $a$  auf  $|z| = 1$  die Beziehung  $f'(z) = o(|z - a|^{-1/2})$  gilt. Mit Methoden von Ostrowski wird das Verhalten der Funktion in der Nähe solcher Randpunkte  $a$  untersucht.

H. P. Künzi.

Ferrand, Jacqueline: Nouvelle démonstration d'un théorème de M. Ostrowski. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 550—551 (1945).

Mit Hilfe normaler Familien nach Montel wird bei konformer Abbildung zweier Gebiete aufeinander das Verhalten in der Umgebung eines Primendes untersucht.

H. P. Künzi.

Teichmüller, Oswald: Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossen orientierten Riemannschen Flächen. Abh. Preuss. Akad. Wiss., math.-nat. Kl. 1943, Nr. 4, 42 S. (1943).

In der 1940 erschienenen Arbeit über „extremale Abbildungen und quadratische Differentiale“ zeigt Verf., teilweise heuristisch, wie sich berandete und geschlossene, orientierbare und nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten bei gewissen Nebenbedingungen stets durch eine extremale quasikonforme Abbildung ineinander überführen lassen. Hier werden Resultate aus dieser früheren Arbeit für geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeiten streng bewiesen. Unter Benutzung eines vom Verf. in einer anderen Arbeit bewiesenen Satzes, daß die Abbildungen von einer gewissen analytischen Bauart alle extremal quasikonform sind, wird für deren Existenz ein im Sinne Koebes ausführlicher Kontinuitätsbeweis erbracht.

H. P. Künzi.



**Teichmüller, Oswald:** Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung. Deutsche Math. **7**, 336—343 (1944).

Eine Aufgabe zur vorstehend besprochenen Arbeit wird gelöst, indem der Einheitskreis quasikonform auf sich abgebildet wird, unter Festhaltung aller Randpunkte. Die extremale quasikonforme Abbildung, bei der das Maximum des Dilationsquotienten minimal wird, stellt sich als eine affine Abbildung heraus. Der Mittelpunkt des Kreises wird höchstens um  $2(\text{Sup } D - 1)$  verschoben. *H. P. Künzi.*

**Teichmüller, Oswald:** Beweis der analytischen Abhängigkeit des konformen Moduls einer analytischen Ringflächenschar von den Parametern. Deutsche Math. **7**, 309—336 (1944).

Verf. sucht in dieser Arbeit Methoden zur Begründung der beiden vorstehend besprochenen Arbeiten, verwendet sie aber dort nicht wesentlich. Eine Kreisringfläche wird im gewöhnlichen  $(x_1, x_2, x_3)$ -Raum durch  $f(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, \dots, p_r) = 0$   $\{(p_1, p_2, \dots, p_r) = \text{Parameterraum}\}$  festgelegt.  $\Omega(p_1, p_2, \dots, p_r)$  wird als zugehörige Modulfunktion eingeführt. Durch die festgelegte Metrik  $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$  läßt sich die Ringfläche konform in eine  $Z$ -Ebene abwickeln.  $\Omega$  hängt analytisch von  $p_1, p_2, \dots, p_r$  ab.  $Z$  ist nur stetig in  $x, y, p_1, p_2, \dots, p_r$  hingegen analytisch in  $p_1, p_2, \dots, p_r$  bei konstantem  $x$  und  $y$ . *H. P. Künzi.*

**Denjoy, Arnaud:** Sur la représentation conforme des aires planes. Mathematica, Timişoara **20**, 73—89 (1944).

**Denjoy, Arnaud:** Sur la représentation conforme. C. r. Acad. Sci., Paris **219**, 11—14 (1944).

Randwertprobleme: Wenn  $z_1$  und  $z_2$  die Kreisperipherie  $\gamma$  durchlaufen und  $f(z)$  auf  $\gamma$  und im Kreisinnern  $c$  analytisch ist, so gilt die Beziehung

$$\int_{\gamma} |dz_2| \int_{\gamma} |(f(z_2) - f(z_1))/(z_2 - z_1)|^2 |dz_1| = 4\pi \iint_c |f'(z)|^2 dS.$$

Daraus ergeben sich verschiedene Anwendungen im Gebiet der konformen Abbildungen, die zum Teil mit dem Satze von Fatou für beschränkte Funktionen im Zusammenhang stehen. *H. P. Künzi.*

**Huron, Roger:** Sur deux lemmes de représentation conforme. C. r. Acad. Sci., Paris **221**, 367—369 (1945).

Neuer Beweis einer von Kravtchenko aufgestellten Ungleichung bei der Ränderabbildung zweier konform aufeinander bezogenen Gebiete. *H. P. Künzi.*

**Komatu, Yūsaku:** Über das Randverhalten beschränkter Schlitzabbildungen und seine Anwendungen. Proc. phys. math. Soc. Japan, III. Ser. **24**, 187—197 (1942).

Using Poisson's integral, the author gave a very simple proof for a well-known Löwner's theorem on bounded slit-mappings (this Zbl. **24**, 422). The object of this paper is to extend Löwner's differential equation concerning bounded slit-mappings to the case of a boundary point whose image does not lie on the slit and to state some applications of his useful method. In particular, the author gives another simple proof for a theorem (in the case of univalent mappings) of V. Paatero (this Zbl. **17**, 173).

*K. Noshiro.*

**Komatu, Yūsaku:** Über eine Verschärfung des Löwner'schen Hilfssatzes. Proc. imp. Acad. Tokyo **18**, 354—359 (1942).

Let  $w = f(z)$  ( $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ ) be a univalent regular function in the unit circle such that  $|f(z)| < 1$  for  $|z| < 1$ . Suppose that an arc of length  $l$  of  $|z| = 1$  corresponds to an arc of length  $L$  of  $|w| = 1$  in a continuous manner. The author proves that  $\sin(L/4) \leq f'(0)^{-1/2} \sin(l/4)$  and the equality holds only when  $f'(z)/(1 + \bar{z}f(z))^2 = f'(0)z/(1 + \bar{z}f(z))^2$ , ( $\bar{z} = 1$ ), by applying his method (see the preceding review). This is a sharp form of Unkelbach's result (this Zbl. **18**, 224) on a well-known Löwner's lemma. Some applications of this theorem are stated.

*K. Noshiro.*

**Komatu, Yûsaku:** Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten. Proc. phys. math. Soc. Japan, III. Ser. **25**, 1—42 (1943).

The author establishes an important theory of univalent regular functions in doubly connected domains. He adopts a concentric circular ring as a canonical domain. By applying H. Villat's formula [Rend. Circ. mat. Palermo **33**, 134—175 (1912)] of an integral representation, the author extends Löwner's differential equation for simply connected domains to the case of doubly connected domains. He investigates properties of the extremal function which plays an important part in his theory. In the limiting case where the circular ring is changed into the pricked unit circle, (ordinary) Löwner's differential equation for slit-mappings of the unit circle is deduced. His fundamental differential equation also gives a simple proof of Grötzsch's distortion theorem [Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, mat.-phys. Kl. **80**, 497—502 (1928)]. Moreover, he extends his precise form (see the preceding review) of Löwner's lemma to the case of doubly connected domains. Finally the author states an analytic representation of Teichmüller's estimation (this Zbl. **20**, 238) concerning Ahlfors's distortion theorem on strip-domains [Acta Soc. Sci. Fennicae, n. Ser. A **1**, 1—40 (1930)].

*K. Noshiro.*

**Komatu, Yûsaku:** Sur la variation d'une fonction de représentation conforme, lorsque le domaine varie. Proc. imp. Acad. Tokyo **19**, 599—608 (1943).

Let  $D$  be a domain bounded by a simple closed regular analytic curve in the  $w$ -plane. Denote by  $z = \Phi(w)$ , ( $\Phi(a) = 0$ ,  $\Phi'(a) > 0$ ), the function which maps  $D$  conformally upon the unit circle  $|z| < 1$ , where  $a$  denotes an arbitrarily fixed point in  $D$ . The author gives a simple proof for Julia's theorem [C. r. Acad. Sci., Paris **172**, 568—570 (1921); Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. **39**, 1—28 (1922)] on the variation of the mapping function  $\Phi(w)$  when the contour of  $D$  varies, by using Poisson's integral formula (see Komatu, this Zbl. **24**, 422). The author's method also admits an extension of Julia's theorem to the case of doubly connected domains.

*K. Noshiro.*

**Komatu, Yûsaku:** Einige Anwendungen der Verzerrungssätze auf Hydrodynamik. Proc. imp. Acad. Tokyo **19**, 454—461 (1943).

By applying some known distortion theorems concerning the conformal mapping of the exterior of the unit circle onto the exterior  $D$  of a bounded continuum (closed Jordan domain), the author obtains some inequalities on the magnitude and direction of the velocity vector of an ideal incompressible fluid flowing past the continuum. The circulation about the boundary is not assumed to be zero. Furthermore the author adds a remark on the extremal property of de Possel's (parallel-slit) mapping of the domain  $D$  [see this Zbl. **3**, 314; cf. also Tsuji, Japanese J. Math. **18**, 759—775 (1943); this Zbl. **60**, 273].

*K. Noshiro.*

**Komatu, Yûsaku:** Über Verzerrungen bei der konformen Parallelschlitzabbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten. Proc. imp. Acad. Tokyo **21**, 1—5 (1945).

Let  $D$  be a doubly connected domain, containing  $z = \infty$ , with two boundary components  $I_0$  and  $I_1$ . By a well-known theorem of de Possel, there exists a function  $w = f(z)$  [ $f(\infty) = \infty$ ,  $f'(\infty) = 1$ ] which maps  $D$  conformally onto a slit-domain  $A$  formed by cutting the  $w$ -plane along two segments parallel to the real axis (such a function is unique, if an additive constant is disregarded). Let  $\beta_0$  and  $\beta_1$  be the constant values which  $\Re f(t)$  takes on  $I_0$  and  $I_1$  respectively and let  $M_r$  and  $m_r$  be the maximum and minimum of  $\Re z$  on  $I_r$  respectively ( $r = 0, 1$ ). The author proves the following distortion theorem:  $m_1 - M_0 \leq \beta_1 - \beta_0 \leq M_1 - m_0$ , where each equality holds only when  $D$  coincides with the slit-domain  $A$  stated above. This extremal property gives a characterization of the slit-domain  $A$ . Some analogous distortions and their hydrodynamical meanings are stated.

*K. Noshiro.*

**Komatu, Yûsaku:** Die Geschwindigkeitspotentiale und die Kutta-Joukowski-schen Bedingungen für die Strömungen in vielfach zusammenhängenden Gebieten. I, II. Proc. imp. Acad. Tokyo **21**, 6—15, 83—93 (1945).

(I) Let  $D$  be an arbitrary multiply connected domain which contains the point at infinity in its interior and whose boundary consists of a finite number of continua. Using the function mapping  $D$  conformally onto a parallel-slit domain and a generalized Green's function defined in  $D$ , the author obtains an analytic representation of the velocity potential for the unique flow in  $D$  which has a given velocity at infinity and given circulations about the boundary components. If the velocity at infinity and the points of separation on the boundary components are prescribed, then the circulation constants are decided and the author gives a formula for determining them. (II) As a concrete example of the general theory in (I), the author adopts a concentric circular ring. The various functions and relations in (I) are explicitly calculated by using elliptic functions. *K. Noshiro.*

**Komatu, Yûsaku:** Einige Darstellungen analytischer Funktionen und ihre Anwendungen auf konforme Abbildung. Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 536—541 (1944).

The author gives some general formulas, using Herglotz's representations for regular functions in the unit circle. As applications of these formulas, the author obtains some known distortion theorems for some classes of univalent functions and the well-known Schwarz-Christoffel's formula concerning polygonal mapping.

*K. Noshiro.*

**Komatu, Yûsaku:** Darstellungen der in einem Kreisringe analytischen Funktionen nebst den Anwendungen auf konforme Abbildung über Polygonalringgebiete. Japanese J. Math. **19**, 203—215 (1945).

The author rewrites Villat's representations for regular analytic functions in a concentric circular ring [Rend. Circ. mat. Palermo **33**, 134—175 (1912)], by using Stieltjes' integral. Applying the Villat-Stieltjes' representation, he obtains some general formulas for regular functions in a concentric circular ring. By a method based on such a formula, the author determines a concrete form of the function which maps a concentric circular ring conformally upon a polygonal ring-domain bounded by two polygons, as an extension of Schwarz-Christoffel's formula to the case of doubly connected domains (s. the preceding review). *K. Noshiro.*

**Komatu, Yûsaku:** Sur la représentation de Villat pour les fonctions analytiques définies dans un anneau circulaire concentrique. Proc. imp. Acad. Tokyo **21**, 94—96 (1945).

The object of this paper is to give a simple direct proof for Villat's theorem [Rend. Circ. mat. Palermo **33**, 134—175 (1912)] on the integral representation of a regular function in a concentric circular ring, by using the Green's function in such a domain [Compare with: Dini, Rend. Circ. mat. Palermo **36**, 1—28 (1913); Demtchenko, J. Math. pur. appl., IX. Sér. **10**, 201—211 (1931)]. *K. Noshiro.*

**Komatu, Yûsaku:** Ein alternierendes Approximationsverfahren für konforme Abbildung von einem Ringgebiete auf einen Kreisring. Proc. Japan. Acad. **21**, 146—155 (1949).

Let  $D$  be a doubly connected domain in the  $z$ -plane. We may suppose without loss of generality that the boundary consists of the circle  $|z| = 1$  and a simple closed regular analytic curve  $\gamma$  which contains  $z = 0$  in its interior and is contained in  $|z| < 1$ . Using conformal mappings of circular domains (the interior or exterior of a circle) alternately, the author constructs a sequence of functions which converges to the function mapping  $D$  conformally onto a concentric circular ring. For the proof, some elementary but interesting lemmas and Carathéodory's theorem on the kernel of domains [Math. Ann. **72**, 107—144 (1912); cf. also Bieberbach, Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. **1913**, 552—564 (1913)] are used.

*K. Noshiro.*



**Komatu, Yûsaku:** Note on the theory of conformal representation by meromorphic functions. I. Proc. Japan Acad. **21**, 269—277 (1949).

Consider a family of univalent analytic functions  $\{g(\zeta)\}$  ( $g(\infty) = \infty$ ,  $g'(\infty) = 1$ ) defined on  $|\zeta| > 1$  and normalized at  $\zeta = \infty$  and on the other hand a family of univalent analytic functions  $\{f(z)\}$ , ( $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ) defined in  $|z| < 1$  and normalized at  $z = 0$ . It is clear that there exists a one-to-one correspondence between them by the relations  $\bar{\zeta}z = 1$ ,  $g(\bar{\zeta})/f(z) = 1$ . Utilizing this correspondence, the author obtains systematically some distortion theorems of Montel's type in the case where  $f(z)$  admits a pole in  $|z| = 1$  [cf. Montel, Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. **46**, 1—23 (1929); Bieberbach, S.-Ber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1929, 620—624 and this Zbl. **18**, 29; Fenchel, this Zbl. **2**, 269].

K. Noshiro.

**Tsuji, Masatsugu:** Theory of conformal mapping of a multiply connected domain. I, II, III. Japanese J. Math. **18**, 759—775, 977—984 (1943); **19**, 155—188 (1944).

**Tsuji, Masatsugu:** On conformal mapping of an infinitely multiply connected domain. Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 3—6 (1944).

In I wird die konforme Abbildung eines gegebenen unendlich-vielfach zusammenhängenden Gebiets auf ein kanonisches Gebiet betrachtet; z. B. Parallelschlitz-, Kreisbogenschlitz- oder Radialschlitzgebiet. Verf. beweist zuerst, daß bei den durch die Extremalmethoden nach de Possel bzw. Rengel gewonnenen Abbildungen das zweidimensionale Maß der Bildränder stets gleich Null ist. Sodann denkt er die Uniformisierung der algebraischen Funktionen vom Geschlecht  $p$  ( $p \geq 2$ ) mittels der zu einer Gruppe vom Schottkyschen Typ gehörigen automorphen Funktionen zu behandeln, um die Koebesche Theorie zu vereinfachen. In II wird die Berichtigung der als unvollkommen erkannten Überlegungen in der zweiten Hälfte von I versucht. In III wird weiter bemerkt, daß dieser Versuch ihm wieder mißlungen ist, und er legt sodann dar, daß die Richtigkeit der Resultate plausibel scheint. Jedoch zeigte schon P. J. Myrberg (dies. Zbl. **27**, 217) mittels eines Gegenbeispiels, daß das nicht der Fall ist. Die letztgenannte Abhandlung ist die vorläufige Mitteilung von III.

Y. Komatu.

(1) Schiffer, Menahem: The span of multiply connected domains. Duke math. J. **10**, 209—216 (1943).

(2) Schiffer, Menahem: Variation of the Green function and theory of the  $p$ -valued functions. Amer. J. Math. **65**, 341—360 (1943).

(3) Schiffer, Menahem: Hadamard's formula and variation of domain-functions. Amer. J. Math. **68**, 417—448 (1946).

(4) Schiffer, Menahem: On the modulus of doubly-connected domains. Quart. J. Math., Oxford Ser. **17**, 197—213 (1946).

(5) Schiffer, Menahem: The kernel function of an orthonormal system. Duke math. J. **13**, 529—540 (1946).

(1): Es seien  $D_n$  ein  $n$ -fach zusammenhängendes,  $\infty$  enthaltendes Gebiet der  $z$ -Ebene,  $\Phi(D_n)$  die Funktionenfamilie, deren Glieder  $F(z)$  in  $D_n$  schlicht und bei  $\infty$  so normiert sind:  $F(z) = z + A_2/z + A_3/z^2 + \dots$ ,  $f(z)$ ,  $g(z)$  die speziellen Funktionen aus  $\Phi(D_n)$ , die Parallelschlitzbereiche mit horizontalen bzw. vertikalen Schlitten liefern,  $a_2$ ,  $b_2$  die zugehörigen Werte von  $A_2$ . Bekanntlich ist (vgl. z. B. de Possel, dies. Zbl. **3**, 314)  $\Re a_2 = \max \Re A_2$ ,  $\Re b_2 = \min \Re A_2$  innerhalb  $\Phi(D_n)$ . Ist ferner  $\widehat{S}(D_n) = \text{Maximum des inneren Maßes des Komplementes innerhalb der Menge der durch Funktionen aus } \Phi(D_n) \text{ erzeugten Bildgebiete, so wird gezeigt, daß die zugehörige Extremalfunktion } \frac{1}{2}(f + g) \text{ ist, und daß gilt: } \widehat{S}(D_n) = S(D_n) = \Re(a_2 - b_2)$ ; diese Größe wird mit „span“ bezeichnet. Für  $n = 1$  ist  $S = 2$ , und die Aussage ist der zweite Bieberbachsche Flächensatz.

Der Beweis macht Gebrauch von der Variation des Bildbereiches, bei dem das Maximum  $\mathfrak{F}$  erreicht wird, durch die folgende Hilfsabbildung: das Äußere eines in der Komplementärmenge liegenden Kreises wird auf das Äußere eines geradlinigen Schlitzes abgebildet. Der Grundgedanke dieser Methode wird in anderer Ausgestaltung — mit einer dem Innern des Bildbereiches angehörenden Kreisscheibe — in den folgenden Arbeiten aufgegriffen und zunächst in größter Allgemeinheit durchgeführt. (2):  $\mathfrak{R}$  sei eine  $p$ -blättrige geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ ;  $q(z)$  sei eindeutig und regulär auf  $\mathfrak{R}$ , ausgenommen die Punkte  $z_0, \dots, z_m$ , die endlich und nicht Verzweigungspunkte seien; dort sei  $q(z) = a_\mu \cdot (z - z_\mu)^{-1} + \text{regul.}$  Dann bildet  $z^* = z + \varrho q(z)$  ( $\varrho > 0$ ) den Teil von  $\mathfrak{R}$ , der nach Ausschluß eines kleinen Kreises  $k_\mu$  um jedes  $z_\mu$  übrigbleibt, auf ein  $p$ -blättriges Riemannsches Flächenstück ab, das von gewissen einfach geschlossenen Kurven, den Bildern der  $k_\mu$ , berandet wird: werden diese Löcher ausgefüllt, so erhält man eine neue  $p$ -blättrige Fläche vom Geschlecht  $g$ ,  $\mathfrak{R}_{\varrho, q}^*$ . Ein Gebiet  $D \subset \mathfrak{R}$ , das die  $z_\mu$  enthält, wird verwandelt in ein anderes  $D_{\varrho, q}^*$ . Es wird eine Formel für die Variation der Greenschen Funktion von  $D$ , d. h. für die Glieder erster Ordnung in  $\varrho$  der Differenz der zu  $D$  und zu  $D_{\varrho, q}^*$  gehörigen Greenschen Funktionen, gegeben: ferner eine Formel für die Variation der Funktion, die, bei einfach zusammenhängendem  $D$ , den Einheitskreis auf  $D$  abbildet. Diese wird mit der Spezialisierung  $q(z) = z/(z - z_0)$  ( $z_0 \in D$ ) auf das Koeffizientenproblem schlichter Funktionen angewendet. Sei  $f_n(\zeta)$  diejenige in  $|\zeta| < 1$  schlichte, normierte Funktion, für die der Betrag des  $n$ -ten Koeffizienten maximal ist. Ausnutzung der Tatsache, daß für jede nach obigem Verfahren variierte Funktion jener Koeffizient nicht kleineren Betrag hat, liefert die Differentialgleichung für  $f_n(\zeta)$ :

$$[1] \quad \frac{\zeta^2 f_n''(\zeta)}{f_n'^2(\zeta)} P_n \left( \frac{1}{f_n(\zeta)} \right) = R_{n-1}(\zeta).$$

Hier ist  $P_n(t)$  ein Polynom  $n$ -ten,  $R_{n-1}(\zeta)$  eine rationale Funktion  $(n-1)$ -ten Grades; beider Koeffizienten hängen von denen von  $f_n(\zeta)$  ab.  $P_n(t)$  hängt engste zusammen mit  $F_n(t)$ , dem  $n$ -ten Faberschen Polynom, der  $f_n(\zeta)$  zugeordneten Schar (vgl. Ref., dies. Zbl. 22, 151). [1] ist eng verwandt mit einer vom Verf. früher nach einer ähnlichen Variationsmethode (Randvariation) gefundenen Differentialgleichung für die Randkurve des Extremalbereiches (dies. Zbl. 19, 122), die jedoch, nach Ansicht des Ref., nicht, wie Verf. behauptet, unmittelbar aus [1] gefolgert werden kann. Es lassen sich gewisse geometrische Eigenschaften des Extremalbereiches erschließen. — Es werden entsprechende Anwendungen auf  $p$ -wertige Funktionen gemacht. In (3) wird die Methode mit der Hadamardschen Variationsformel für die Greensche Funktion in Verbindung gebracht, bei der ein schlichtes Gebiet mit glattem Rand vorausgesetzt wird, dessen Punkte längs der Randnormalen verschoben werden. Ist die Voraussetzung über den Rand erfüllt, so läßt sich die Variationsformel des Verf. für die Greensche Funktion als Spezialfall der Hadamardschen deuten, doch ist jene von der genannten Voraussetzung unabhängig. — Die Greensche Funktion ist nicht die einzige, für die die Formel des Verf. gilt; er zeigt eine ganze Klasse von Gebietsfunktionen auf, für die sie zutrifft; zu ihnen gehören z. B.  $\gamma_m(z) = \log |f_m(z)|$ , wo  $w = f_m(z)$  eine Funktion ist, die das gegebene Gebiet mit den Randkomponenten  $C_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ) auf  $|w| > 1$  mit konzentrischen Kreisbogenschlitzten abbildet, derart, daß  $C_m$  in  $|w| = 1$  übergeht. Es folgen Anwendungen auf Extremalprobleme der konformen Abbildung. Z. B. wird nach derjenigen normierten Abbildung eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes  $D$  mit  $\infty \in D$  gefragt, bei der das Bild einer bestimmten Randkomponente größten oder kleinsten transfiniten Durchmesser hat; oder nach derjenigen normierten Abbildung von  $|z| > 1$ , bei der ein gegebener Bogen auf  $|z| = 1$  ein Bild mit möglichst kleinem transfinitem Durchmesser besitzt. — Es werden schließlich Variationsformeln für die harmonischen Maße der

Randkomponenten und die Perioden ihrer konjugierten hergeleitet; ferner für die Elementarintegrale auf geschlossenen Riemannschen Flächen. In (4) wird die Methode zur Lösung folgender Probleme verwendet: Gegeben zwei punktfremde Bogen auf  $z = 1$ ,  $B_1$  und  $B_2$ ; die beiden Komplementärbogen seien  $C_1$  und  $C_2$ . Man bilde  $z = 1$  durch  $s(z)$  schlicht und bei  $\infty$  normiert so ab, daß aus  $B_1$  und  $B_2$  zwei Bildkontinua  $\tilde{B}_1$  und  $\tilde{B}_2$  entstehen, die ein zweifach zusammenhängendes Gebiet von möglichst großem Modul  $M(\tilde{B}_1, \tilde{B}_2)$  beranden. Geometrisch ist die Lösung so zu kennzeichnen: Wird das von  $\tilde{B}_1$  und  $\tilde{B}_2$  berandete Gebiet auf einen Kreisring abgebildet, so gehen die beiden Kontinua  $\tilde{C}_1$  und  $\tilde{C}_2$  in die beiden Ufer eines Radialschlittes über. — Wird eine beliebige geschlossene Kurve in vier Teilbogen  $B_1, \Gamma_1, B_2, \Gamma_2$  unterteilt, so gilt für die Moduln der entstandenen zweifach zusammenhängenden Bereiche:  $\lg M(B_1, B_2) + \lg M(\Gamma_1, \Gamma_2) \leq \pi^2$ . — (Gegeben vier Punkte  $\zeta_r (r = 1, \dots, 4)$ ;  $B_1$  und  $B_2$  seien zwei Kontinua mit  $\zeta_1, \zeta_2 \in B_1, \zeta_3, \zeta_4 \in B_2$ . Gesucht die scharfe obere Schranke für  $M(B_1, B_2)$ . Der Extremalfall wird geometrisch unter Zuhilfenahme eines elliptischen Integrals erster Gattung gekennzeichnet. (5) bezieht sich auf die Bergmannsche Kernfunktion eines endlich vielfach zusammenhängenden (beschränkten) Gebietes  $G$ , die durch die Greensche Funktion ausgedrückt wird:

$$K(z, \bar{z}) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} \quad \left( \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right).$$

Man beweist nach Wirtinger (dies. Zbl. 5, 361), daß die rechte Seite die reproduzierende Eigenschaft hat. Eine Variationsformel für die Kernfunktion, die der Hadamardschen für die Greensche Funktion entspricht, wird angegeben; ferner eine solche für eine Variation des Gebietes in der vom Verf. in der zweiten Arbeit angegebenen Art. Entsprechendes wird ausgeführt für die Kernfunktion der Klasse der Funktionen mit eindeutigem Integral:

$$K^*(z, \bar{\zeta}) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 g_m(z, \bar{\zeta})}{\partial z \partial \bar{\zeta}} \quad \text{wobei} \quad g_m(z, \bar{\zeta}) = \log |f_m(z, \bar{\zeta})|$$

$[f_m(z)$ : s. oben;  $\zeta$  bezeichnet den nach  $\infty$  übergehenden Punkt].

$K^*$  ist unabhängig von  $m$ . Sie läßt sich auch mittels der Parallelschlitzfunktionen darstellen. Bekannte Extremalprobleme aus dem Fragenkreis der Bieberbachschen Flächensätze lassen sich elegant einordnen; insbesondere ergibt sich die Gleichung:  $A_I(\bar{\zeta}) A_I(\zeta) = \pi^2$ , wobei  $A_I(\bar{\zeta})$  bzw.  $A_I(\zeta)$  minimaler Inhalt des Innengebietes bei einer Abbildung  $f(z)$  mit  $f'(\bar{\zeta}) = 1$ , bzw. maximaler Inhalt des Außengebietes bei einer schlichten Abbildung  $f(z)$  mit  $f(\zeta) = \infty$ ,  $\text{res} f(\zeta) = 1$  sind.

H. Grunsky.

Glhika, A. I.: Sur une propriété de la représentation conforme des domaines à contours rectifiables. C. r. Acad. Sci. Roumanie 6, 19—25 (1943).

Der Rand  $C$  eines einfach zusammenhängenden Bereiches sei rektifizierbar. Verf. beweist, daß die Funktionenfolge  $\{z^n; \bar{z}^n ds dz\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $ds = |dz|$  vollständig ist in bezug auf die längs  $C$  quadratisch integrierbaren Funktionen. Wird der Einheitskreis  $|\zeta| = 1$  durch  $z = \varphi(\zeta)$  auf den obigen Bereich konform abgebildet, so ist die Behauptung äquivalent mit der Vollständigkeit des Systems  $\{\varphi^n(\bar{\zeta}) | \varphi'(\zeta); \varphi^n(\bar{\zeta}) | \varphi'(\zeta) \cdot d\sigma d\bar{\zeta}\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  auf  $|\zeta| = 1$ . Letzteres folgt aus der Vollständigkeit des Systems  $\{\bar{\zeta}^n; \bar{\zeta}^n d\sigma d\bar{\zeta}\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  auf  $|\zeta| = 1$ . Als Anwendung ergibt sich der folgende Approximationssatz: Wenn der obige Bereich durch  $q(z)$  auf den Einheitskreis abgebildet wird, so ist  $\sqrt{q^2(z)}$  Grenzfunktion einer Polynomfolge, die im Innern gleichmäßig und auf dem Rande im quadratischen Mittel konvergiert. Dieser Satz wurde von Szegő [Math. Z. 9, 218—270 (1921), insbes. S. 244], für analytische Randbogen bewiesen. A. Pfluger.



Ghika, A.: Sur des transformations isométriques définies par la représentation conforme. C. r. Acad. Sci. Roumanie 6, 25—31 (1943).

Es sei der Rand  $R$  eines einfach zusammenhängenden Bereiches  $B$  rektifizierbar und  $\bar{B}$  der komplementäre Bereich. Es bezeichne  $C^{(p)}(R)$  die Menge der Funktionen  $f(z)$ , welche den Bedingungen (1)  $f(z) \in L^{(p)}$  längs  $R$ , (2)  $\int_R \frac{f(z)}{z-x} dz = 0$  für  $x \in \bar{B}$  genügen. Verf. teilt unter anderem mit, daß diese Menge  $C^{(p)}(R)$  wenigstens im Falle  $p = 2$  identisch ist mit der Menge der Grenzfunktionen solcher Polynomfolgen, welche längs  $R$  im quadratischen Mittel konvergieren. A. Pfluger.

Laurentiev, M.: Les représentations quasi-conformes et leurs systèmes dérivés. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 52, 287—289 (1946).

Das System

$$\Phi_1\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \quad \Phi_2\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad (I)$$

erzeugt eine quasikonforme Abbildung, falls durch  $u = u(x, y)$  und  $v = v(x, y)$  eine eindeutige Beziehung zwischen dem Gebiet  $D$  der  $(x, y)$ -Ebene und dem Gebiet  $A$  der  $(u, v)$ -Ebene besteht. Durch eine Linearisierung des Systems I geht dieses in ein System I' über, das Verf. explizite bestimmt. I' heißt ein stark elliptisches System. Im folgenden werden Eigenschaften solcher stark elliptischer Systeme untersucht. H. P. Künzi.

Fuks, B. A.: Über die invarianten Riemannschen Metriken in der Theorie der pseudokonformen Abbildungen und ihre Anwendungen. Uspechi mat. Nauk 6, 251—286 (1939) [Russisch].

Dedecker, Paul: Pseudo-surfaces de Riemann et pseudo-involutions. I. II. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 30, 120—133, 179—188 (1945).

Pseudo-Riemannsche Flächen nennt Verf. eine Fläche mit einer pseudokonformen Struktur, d. i. einer Winkelmetrik ohne Auszeichnung der Orientierung. Es werden eine Reihe von Fragen diskutiert, die im Spezialfalle der Riemannschen Flächen klassisch sind, wie z. B. Überlagerungsflächen, Uniformisierung, Anzahl der reellen Moduln einer berandeten Riemannschen Fläche von gegebenem topologischem Typus, Symmetrien usw., ohne auf unerwartete Resultate zu stoßen. A. Pfluger.

Oka, Kiyosi: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. V. L'intégrale de Cauchy. Japanese J. Math. 17, 523—531 (1941).

[Teil IV ibid. 517—521.] Die für die Weilsche Integraldarstellung notwendige Zerlegung regulärer Funktionen  $f(z_1, \dots, z_n)$  (dies. Zbl. 11, 123) wird unter gewissen Einschränkungen in analytischen Polyedern als möglich nachgewiesen. Beweis ohne Einschränkung inzwischen durch H. Cartan (dies. Zbl. 35, 171) und H. Hefer (dies. Zbl. 38, 238). K. Stein.

Oka, Kiyosi: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VI. Domaines pseudoconvexes. Tôhoku math. J. 49, 15—52 (1942).

Teil V s. vorhergehendes Referat. Verf. beweist: Im Raume  $C^2$  von zwei komplexen Veränderlichen  $w, z$  ist jedes endliche schlichte pseudokonvexe Gebiet ein Regularitätsgebiet. Damit ist für den  $C^2$  eine als Problem von E. E. Levi bekannte fundamentale Fragestellung beantwortet. Wesentlich benutzt wird ein Lemma:  $G$  sei ein beschränktes Gebiet;  $H_1$  und  $H_2$  seien die Halbräume  $\text{Im}(w) > a_1$  bzw.  $\text{Im}(w) < a_2$  mit  $a_1 < a_2$ . Sind dann die Komponenten der Durchschnitte  $H_1 \cap G$  und  $H_2 \cap G$  sämtlich Regularitätsgebiete, so ist auch  $G$  Regularitätsgebiet. In den Beweisen werden insbesondere herangezogen: a) der Satz von Cartan-Thullen über die Regulärkonvexität von Regularitätsgebieten, b) die Weilsche Integralformel, c) ein Ergebnis von Behnke-Stein über konvergente Folgen von Regularitätsgebieten. K. Stein.

Lelong, Pierre: Sur la capacité de certains ensembles de valeurs exceptionnelles. C. r. Acad. Sci., Paris **214**, 992—994 (1942).

Folgerungen aus Resultaten von H. Cartan über Punktmengen der äußeren Kapazität Null [C. r. Acad. Sci. Paris **211**, 994—996 (1942)]. Verschärfung früherer Ergebnisse des Verf. (dies. Zbl. **26**, 15), insbesondere über das Konvergenzverhalten Hartogsscher Entwicklungen  $\sum_n A_n(x) y^n$ . K. Stein.

Martin, W. T.: Mappings by means of systems of analytic functions of several complex variables. Bull. Amer. math. Soc. **50**, 5—19 (1944).

Martin, W. T.: Functions of several complex variables. Amer. math. Monthly **52**, 17—27 (1945).

Vorträge über neuere Entwicklungen der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen. Behandelt werden: a) Fragen der Abbildungstheorie, b) der Hartogs-Osgoodsche Satz über die Fortsetzung einer analytischen Funktion vom Rande eines Gebiets ins Innere, sowie die Probleme von Cousin und Poincaré. K. Stein.

Tamarkin, J. D. and A. Zygmund: Proof of a theorem of Thorin. Bull. Amer. math. Soc. **50**, 279—282 (1944).

Neuer Beweis eines Satzes von G. O. Thorin (dies. Zbl. **21**, 144) über Konvexitätseigenschaften des absoluten Betrages einer analytischen Funktion  $f(z_1, \dots, z_n)$ . K. Stein.

Thullen, Peter: Über die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Regularitätsbereiche und Reinhardts Meromorphiebereiche. Revista Un. mat. Argentina **11**, 33—46 (1945) [Spanisch mit französ. Zusammenfassg.].

Das Levische Problem und verwandte Fragestellungen werden am Beispiel der Reinhardtschen Körper diskutiert und ihre in diesem Falle einfachen Lösungen angegeben. K. Stein.

Bergman, Stefan: The method of the minimum integral and analytic continuation of functions of complex variables. Proc. nat. Acad. Sci. USA **27**, 328—332 (1941).

Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen werden über den Rand ausgezeichneter Gebiete mittels Spiegelung analytisch fortgesetzt und der analytische Charakter der Fortsetzung mit Hilfe von Integralformeln aus der Theorie der Orthogonalfunktionen nachgewiesen. F. Sommer.

Bergman, Stefan: Über uneigentliche Flächenintegrale in der Theorie der analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Revista Ci. **43**, 675—682 (1941); **44**, 131—140, 377—394 (1942).

Das Gebiet  $\mathfrak{G}$  in der komplexen  $z$ -Ebene werde von einer stetig differenzierbaren Kurve  $\mathfrak{C}$  berandet. Die Funktion  $f(z)$  sei regulär in  $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ . Dann ist für alle Punkte  $z$  auf  $\mathfrak{C}$ :  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2} f(z)$ , wo links der Hauptwert des uneigentlichen Integrals zu nehmen ist. Diese Formel wird auf zwei komplexe Veränderliche verallgemeinert: Man lasse  $\mathfrak{G}(\lambda)$ ,  $\mathfrak{C}(\lambda)$ ,  $f(z, \lambda)$  und  $z(\lambda)$  noch stetig differenzierbar von einem Parameter  $\lambda$ ,  $\lambda' = \lambda''$  abhängen.  $\mathfrak{G} = E[\zeta \in \mathfrak{C}(\lambda), \lambda' \leq \lambda \leq \lambda'']$  sei die Mantelfläche des Gebietes  $\mathfrak{B} = E[\zeta \in \mathfrak{G}(\lambda), \lambda' \leq \lambda \leq \lambda'']$ ,  $z(\lambda)$  liege auf  $\mathfrak{C}(\lambda)$ . Dann gilt bei singemäßer Definition des uneigentlichen

Integrals:  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta, \lambda)}{\zeta - z(\lambda)} d\zeta d\lambda = \frac{1}{2} \int_{\lambda'}^{\lambda''} f(z(\lambda), \lambda) d\lambda$ . Durch eine Transformation

$z_1 = h_1(z, \lambda)$ ,  $z_2 = h_2(z, \lambda)$  läßt sich  $\mathfrak{B}$  auf ein analytisches Hyperflächenstück  $\mathfrak{B}^*$  im  $(z_1, z_2)$ -Raum abbilden, dessen Mantelfläche  $\mathfrak{G}^*$  das Bild von  $\mathfrak{G}$

ist. Dort kann dann das uneigentliche Integral  $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{G}^*} F(z_1, z_2) d\tau$  berechnet werden, wenn  $F(z_1, z_2)$  auf  $\mathfrak{G}^*$  eine Kurve einfacher Polstellen besitzt und im übrigen in  $\mathfrak{B}^*$  und  $\mathfrak{G}^*$  regulär ist. Es werden noch einige Hinweise auf andere Integraldarstellungen gegeben. *F. Sommer.*

**Bergman, S. et J. Marcinkiewicz:** Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes. *J. Math. Physics* **21**, 125—141 (1942).

Im  $(z_1, z_2)$ -Raum werden auf Gebiete  $\mathfrak{G} = E(|z_2| < 1, z_1 \in \mathfrak{B}(z_2))$ , wobei  $\mathfrak{B}(z_2)$  das Innere einer einfach geschlossenen Kurve  $\mathfrak{C}(z_2) = E(z_1 = h(z_2, \lambda))$ ,  $0 \leq \lambda < 2\pi$  ist, Aussagen vom Typus der Fatouschen Sätze übertragen. Dabei spielt die ausgezeichnete Randfläche  $\tilde{\mathfrak{G}} = E(z_2 = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi, z_1 = h(e^{i\theta}, \lambda), 0 \leq \lambda < 2\pi)$  die Rolle des Einheitskreises im Falle einer Veränderlichen. *F. Sommer.*

**Bergman, Stefan:** A remark on the paper „Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes“. *J. Math. Physics* **21**, 141—143 (1942).

Unter Benutzung der vorstehend besprochenen Ergebnisse wird für eine erweiterte Funktionenklasse (extended class) analog der Klasse der harmonischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen die Randwertaufgabe für die genannten Gebiete gelöst. *F. Sommer.*

**Bergman, Stefan:** The behavior of the kernel function at boundary points of the second order. *Amer. J. Math.* **65**, 679—700 (1943).

Die Ordnung des Randverhaltens des Kernes  $K_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2, z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$  eines Gebietes  $\mathfrak{G}$  im Randpunkt  $[z_1^{(0)}, z_2^{(0)}]$  ist durch das Verhalten des Ausdrucks

$$[(z_1 - z_1^{(0)})^2 + (z_2 - z_2^{(0)})^2]^{1/3} K_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

gegeben. Bleibt dieser Ausdruck bei bestimmten Annäherungen an den Punkt  $[z_1^{(0)}, z_2^{(0)}]$  zwischen zwei positiven Grenzen, so liegt ein  $R$ -Punkt der Ordnung  $t$  vor. Existiert sogar der Grenzwert, so heißt der Randpunkt  $L$ -Punkt der Ordnung  $t$ . Für  $R$ - und  $L$ -Punkte zweiter Ordnung werden hinreichende Bedingungen angegeben. *F. Sommer.*

**Bergman, Stefan and Menahem Schiffer:** Bounded functions of two complex variables. *Amer. J. Math.* **66**, 161—169 (1944).

Gegeben sei ein Gebiet  $\mathfrak{G}$  im  $(z_1, z_2)$ -Raum, dessen Rand ein Stück  $\tilde{\mathfrak{G}}$  einer analytischen Hyperfläche enthalte. In der Umgebung eines Punktes  $[z_1^{(0)}, z_2^{(0)}]$  auf  $\tilde{\mathfrak{G}}$  sei  $\tilde{\mathfrak{G}}$  dargestellt durch zwei Gleichungen  $z_1 = h_1(Z, \lambda)$ ,  $z_2 = h_2(Z, \lambda)$ , die in  $Z$  regulär und in  $\lambda$  stetig differenzierbar seien.  $\mathfrak{M}$  sei eine Menge von Funktionen  $f(z_1, z_2)$ , die in  $\mathfrak{G} + \tilde{\mathfrak{G}}$  regulär und gleichartig beschränkt seien. Die Funktionen  $F(Z, \lambda) = f(h_1(Z, \lambda), h_2(Z, \lambda))$  seien gleichgradig stetig in  $\lambda$ . Dann bildet  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{G} + \tilde{\mathfrak{G}}$  eine normale Familie, und in den Punkten  $[z_1^{(0)}, z_2^{(0)}]$  auf  $\tilde{\mathfrak{G}}$  gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}) = f(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}) = \lim_{[z_1, z_2] \rightarrow [z_1^{(0)}, z_2^{(0)}]} f(z_1, z_2)$$

für jede konvergente Teilfolge  $f_m(z_1, z_2)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , aus  $\mathfrak{M}$ . *F. Sommer.*

**Bergman, Stefan:** Models in the theory of several complex variables. *Amer. math. Monthly* **53**, 495—501 (1946).

Es wird auf die Nützlichkeit bildlicher Darstellungen der geometrischen Sachverhalte im komplexen  $(z_1, z_2)$ -Raum hingewiesen und gezeigt, wie man z. B. durch Folgen dreidimensionaler Schnitte die Eigenschaften vierdimensionaler Gebilde wiedergeben kann. *F. Sommer.*

**Bochner, S.:** Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula. *Ann. of Math.*, II. Ser. **44**, 652—673 (1943).

$B_1, \dots, B_s$  seien orientierte, offene, punktfremde,  $m$ -dimensionale Simplexe,  $C_1, \dots, C_r$  ihre verschiedenen  $(m-1)$ -dimensionalen Randsimplexe, gleichfalls



in fester Orientierung vorliegend.  $\varepsilon_{pq} = 0, +1, -1$  seien die Inzidenzkoeffizienten, je nachdem  $C_p$  kein Randsimplex von  $B_q$ , ein Randsimplex mit der durch  $B_q$  induzierten Orientierung oder ein solches mit entgegengesetzter Orientierung ist. Zu jedem  $B_r$  sei eine Funktion  $q_r$  in einer Umgebung  $\tilde{B}_r$  von  $B_r$  gegeben. Dann heißt die Menge  $q = \{q_r\}$  dieser Funktionen eine Konglomeratfunktion der

Menge  $B = B_1 + \dots + B_s$  und  $\varphi^p = \sum_{q=1}^s \varepsilon_{pq} q_q$  der Saltus von  $\varphi$  auf  $C_p$ . Nun

liege  $B$  im euklidischen  $n$ -dimensionalen Raum  $E_n$  und sei  $(n-1)$ -dimensional. Es zerlege  $E_n$  in Gebiete  $D_1, \dots, D_t, D_\infty$ , von denen  $D_\infty$  allein unbeschränkt ist.  $f = \{f_q\}$  sei eine harmonische Konglomeratfunktion in einer Umgebung  $\tilde{B}$  von  $B$ . Dann gewinnt man mittels der Greenschen Integralformel aus  $f$  Funktionen  $F_r$  in den  $D_r$ . Diese  $F_r$  lassen sich analytisch in diejenigen  $B_q$  fortsetzen, die an  $D_r$  angrenzen, und es ist der Saltus von  $F_r$  auf  $B_q$  gleich  $f_q$ . Verschwindet der Saltus von  $f$  in einer Umgebung  $\tilde{C}$  von  $C$ , so kann  $F_r$  in eine Umgebung  $\tilde{D}_r$  von  $D_r$  analytisch fortgesetzt werden.  $\Delta f \equiv \sum_{r_1 + \dots + r_n \leq N} a_{r_1 \dots r_n} \partial^{r_1 + \dots + r_n} f / \partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}$

sei ein Differentialoperator. Er hat die Eindeutigkeitseigenschaft, wenn jede Funktion  $f$ , die im Komplement eines beschränkten Gebietes der Gleichung  $\Delta f = 0$  genügt und im Unendlichen verschwindet, identisch Null ist. Genügt eine harmonische Konglomeratfunktion  $f$  der Gleichung  $\Delta f = 0$  eines solchen Operators  $\Delta$  und verschwinden sie und ihre partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq N$  auf  $C$ , so kann  $f_q$  analytisch in alle  $D_r$  fortgesetzt werden, sofern  $B_q$  zu den Simplexten gehört, die die Gebiete  $D_\infty$  und  $D_r$  trennen. Die vorstehenden Ergebnisse sind von großer Tragweite. Ihre Anwendung auf die analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen liefert u. a. Integralformeln für reguläre Funktionen, den Satz von Hartogs über die analytische Fortsetzung jeder regulären Funktion vom Rande ins Innere bei beschränkten Gebieten mit zusammenhängendem Rand, die Sätze von Poincaré und Cousin über die Konstruktion regulärer bzw. meromorpher Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen bzw. Polen, Integrabilitätsbedingungen für Differentialgleichungen, usw.

*F. Sommer.*

Bochner, S.: Group invariance of Cauchy's formula in several variables. Ann. of Math., II. Ser. 45, 686—707 (1944).

Die Cauchysche Integralformel für  $k$  komplexe Veränderliche  $z = (z_1, \dots, z_k)$ ,  $z = x + i y$ ,  $z_v = x_v + i y_v$ , hat für den Polyzylinder  $|z_v| \leq 1$ ,  $v = 1, 2, \dots, k$ , die Gestalt  $f(z) = c \int_{\mathfrak{B}} K(\zeta - z) f(\zeta) dv_\zeta$ , wobei  $c = 1/(2\pi i)^k$ ,  $K(\zeta - z) =$

$1/[(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_k - z_k)]$ ,  $dv_\zeta = d\zeta_1 \dots d\zeta_k$ ,  $\mathfrak{B} = E(|\zeta_v| = 1, v = 1, \dots, k)$  ist. In dieser Formel hängt 1. der Kern  $K(\zeta - z)$  nur von den Koordinatendifferenzen  $\zeta_v - z_v$  ab, und 2. ist die Formel invariant gegenüber der Drehungsgruppe der Bestimmungsfläche  $\mathfrak{B}$ :  $\zeta_v^* = e^{i\alpha_v} \zeta_v$ ,  $v = 1, \dots, k$ . Unter Beibehaltung dieser beiden Gesichtspunkte wird die Formel auf quadratintegrierbare Funktionen in Tubengebieten:  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $-\infty < y_i < \infty$ , übertragen, deren Projektionen  $\mathfrak{A}$  konvex sind, den Nullpunkt nicht umfassen und mit einem Punkt  $x$  auch alle Punkte  $t x$ ,  $0 < t < \infty$ , enthalten.  $\mathfrak{B}$  ist dabei der Grat der Tube:  $x = 0$ ,  $-\infty < y_v < \infty$ . Weiter wird die Formel für Tubengebiete von symmetrischen und nicht-symmetrischen Matrixvariablen bewiesen, sodann auf verallgemeinerte Hyperkugeln im Raum der Matrixvariablen transformiert. Die Ergebnisse werden schließlich im abstrakten Fall formuliert und bewiesen.

*F. Sommer.*

Bochner, S.: Boundary values of analytic functions in several variables and of almost periodic functions. Ann. of Math., II. Ser. 45, 708—722 (1944).

Ist  $f(z)$  regulär für  $|z| < 1$  und  $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \gamma < \infty$  für  $0 < r < 1$ , so gibt es eine integrierbare Funktion  $f(e^{i\theta})$ , so daß  $\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| d\tau = 0$

ist. Dieser Satz von F. Riesz wird sinngemäß auf reguläre Funktionen  $f(z_1, \dots, z_k)$  im Polyzylinder  $|z_\nu| < 1$ ,  $\nu = 1, \dots, k$ , übertragen, wobei die Bestimmungsfläche  $|z_\nu| = 1$ ,  $\nu = 1, \dots, k$ , die Rolle des Einheitskreises spielt. Der Satz kann umgeschrieben werden auf Fourierreihen, und deren enger Zusammenhang mit den fastperiodischen Funktionen gestattet den Beweis unter Benutzung eines Satzes von Hardy und Littlewood. Die Beweismethode liefert weitere Ergebnisse für fastperiodische Funktionen, bei denen als Randverteilungen die Funktionen von Besicovitch auftreten. *F. Sommer.*

**Bers, Lipman:** On bounded analytic functions of two complex variables in certain domains with distinguished boundary surface. Amer. J. Math. 64, 514—530 (1942).

Für die Gebiete  $\mathfrak{G}$  in der Arbeit von Bergmann und Marcinkiewicz (s. dies Zbl. 60, 224) wird mittels der Greenschen Funktion einer Veränderlichen eine Funktion  $Q(z_1, z_2; \vartheta, \lambda)$  konstruiert, analog dem Kern des Poissonischen Integrals. Für die in  $\mathfrak{G}$  regulären und beschränkten Funktionen

$f(z_1, z_2)$  gilt dann  $f(z_1, z_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(z_1, z_2; \vartheta, \lambda) F(\vartheta, \lambda) d\vartheta d\lambda$ , wobei  $F(\vartheta, \lambda)$  der Grenzwert von  $f(z_1, z_2)$  für  $[z_1, z_2] \rightarrow [h(e^{i\vartheta}, \lambda), e^{i\vartheta}]$  ist, der für fast alle Punkte von  $\mathfrak{F}$  in jedem Winkelraum  $\mathfrak{w} = E[|z_2 - e^{i\vartheta}| < a(1 - |z_2|), |z_1 - h(z_2, \lambda)| < a|z_1 - h(z_2, \lambda')|, 0 \leq \lambda' \leq 2\pi, a > 1]$  existiert. Gibt es zu fast allen Punkten  $[h(e^{i\vartheta}, \lambda), e^{i\vartheta}]$  auf  $\mathfrak{F}$  je einen Winkelraum  $\mathfrak{w}$  und in ihm eine Folge  $[z_1^{(v)}, z_2^{(v)}] \rightarrow [h(e^{i\vartheta}, \lambda), e^{i\vartheta}]$ , so daß  $\lim_{v \rightarrow \infty} |f(z_1^{(v)}, z_2^{(v)})| \leq \Phi(\vartheta, \lambda)$  und  $\Phi(\vartheta, \lambda)$  eine meßbare Funktion ist, so folgt  $\log |f(z_1, z_2)| \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(z_1, z_2; \vartheta, \lambda) \log \Phi(\vartheta, \lambda) d\vartheta d\lambda$ . Besitzt

$f(z_1, z_2)$  für eine Teilmenge  $E \subset F$  mit positivem äußerem Maß in jedem Winkelraum  $\mathfrak{w}$  den Grenzwert Null, so ist  $f(z_1, z_2) \equiv 0$ . *F. Sommer.*

**Roure, Henri:** Sur une nouvelle classe de fonctions. I. II. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér. 6, 15—31 (1943); 7, 99—122 (1945).

Verallgemeinerung von Picards Untersuchungen über automorphe Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen auf Funktionen zu speziellen Gruppen von vier Veränderlichen. *F. Sommer.*

• **Tornehave, Hans:** Über reguläre periodische Funktionen von mehreren Veränderlichen. Diss. Univ. Kopenhagen 1944. 107 S. [Dänisch].

Die Konvergenzgebiete von Laurentreihen bei Funktionen mehrerer Veränderlichen  $(z_1, \dots, z_k)$  sind Gebiete, die durch die Transformationen  $u_\nu = \log z_\nu$ ,  $u_\nu = \xi_\nu + i v_\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, k$ , in Tubengebiete übergehen, deren Projektionen  $\mathfrak{F}$  im  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ -Raum konvex sind. Die Laurentreihen gehen dabei in  $k$ -fach periodische Funktionen  $g(u_1, \dots, u_k)$  mit den Perioden  $2\pi i$  über. Für diese Funktionen wird der Zusammenhang zwischen den Nullstellenmännigfaltigkeiten und der Jensenschen Funktion

$$p(\xi_1, \dots, \xi_k) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \log |g(\xi_1 + i v_1, \dots, \xi_k + i v_k)| dv_1 \dots dv_k$$

eingehend studiert. Unter anderem ergeben sich Verallgemeinerungen der Jensenschen Formel. *F. Sommer.*

**Martinelli, Enzo:** Sulla formula di Cauchy  $n$ -dimensionale e sopra un teorema di Hartogs nella teoria delle funzioni di  $n$  variabili complesse. Commentarii math. Helvet. 17, 201—208 (1945).

Martinelli, Enzo: Formula di Cauchy  $(n+1)$ -dimensionale per le funzioni analitiche di  $n$  variabili complesse. *Commentarii math. Helvet.* 18, 30—41 (1945).

Martinelli, Enzo: Formule integrali e topologia nella teoria delle funzioni di più variabili complesse. *Acta Pont. Acad. Sci.* 9, 235—250 (1945).

Da bei den verallgemeinerten Cauchyschen Integralformeln für  $n$  komplexe Veränderliche jeweils unter dem Integralzeichen totale Differentiale stehen, können die Integrationsflächen durch homologe Flächen ersetzt werden, sofern die jeweils berandeten Komplexe die Singularitäten des Integranden vermeiden. Auch lassen sich die Integrationsflächen so wählen, daß sie mit den Singularitätenflächen mehrfach verschlungen sind. So können zahlreiche Integralformeln hergeleitet werden, wobei auch die Dimension der Integrationsflächen jeden Wert zwischen  $n$  und  $2n-1$  annehmen kann. Mit Hilfe der Integralformeln für die Dimension  $n$  wird in der ersten Arbeit ein neuer Beweis für einen bekannten Satz von Hartogs gegeben. Ferner werden in der zweiten Arbeit Formeln für die Dimension  $n+1$  hergeleitet. Schließlich liefert die dritte Arbeit Formeln für sämtliche Dimensionen  $n$  bis  $2n-1$ .  
F. Sommer.

Aravijskaja, E. N.: Sur la théorie de la croissance des fonctions dont les variétés-zéro sont données. *Bull. (Izvestija) math. mech. Inst. Univ. Tomsk* 3, 61—71 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Ist  $f(z_1, z_2)$  in einem Gebiet  $\mathfrak{G}$  des  $(z_1, z_2)$ -Raumes meromorph, erhält man  $\mathfrak{G}'$  aus  $\mathfrak{G}$  dadurch, daß man aus  $\mathfrak{G}$  die Null- und Polstellenflächen herausnimmt, ist ferner  $H(z_1, z_2)$  die Kernfunktion der biharmonischen Funktionen in  $\mathfrak{G}'$ , so gilt die Ungleichung  $\log |f(z_1, z_2)|^2 \leq A \cdot H(z_1, z_2)$  mit  $A = \int_{\mathfrak{G}} |\log |f(z_1, z_2)|^2| d\omega$  (s. S. Bergman, dies. Zbl. S. 216). Für  $H(z_1, z_2)$  wird eine berechenbare Majorante angegeben.  
F. Sommer.

Isaacs, Rufus P.: The finite differences of polygenic functions. *Bull. Amer. math. Soc.* 47, 444—448 (1941).

(1) Fueter, R.: Über einen Hartogsschen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von  $n$  komplexen Variablen. *Commentarii math. Helvet.* 14, 394—400 (1942).

(2) Fueter, R.: Die Funktionentheorie der Diracschen Differentialgleichungen. *Commentarii math. Helvet.* 16, 19—28 (1944).

(3) Fueter, R.: Über die Quaternionenmultiplikation regulärer vierfachperiodischer Funktionen. *Experientia* 1, 57 (1945).

(4) Fueter, R.: Problèmes actuels de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables. *Atti Convegno mat. Roma* 1942, p. 169—177 (1945).

(5) Nef, Walter: Die unwesentlichen Singularitäten der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Commentarii math. Helvet.* 16, 284—304 (1944).

(6) Nef, Walter: Funktionentheorie einer Klasse von hyperbolischen und ultrahyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Commentarii math. Helvet.* 17, 83—107 (1945).

(7) Valeiras, A.: On monogenic functions of a special class of hypercomplex variables. *Publ. Circ. mat. Inst. nac. Profesorado Secund.* 5, 1—56 (1939) [Spanisch].

(8) Balseiro, José A.: Elemente der Theorie von Funktionen einer antoidalen trikomplexen Veränderlichen. *Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., Revista* Vol. 3, Nr. 4, 413—442 (1944) [Spanisch].

(9) Balseiro, José A.: Erklärung einer Auslassung. *Revista Un. mat. Argentina* 10, 173—174 (1945) [Spanisch].

(10) Häfeli, Hans: Quaternionengeometrie und das Abbildungsproblem der regulären Quaternionenfunktionen. *Commentarii math. Helvet.* 17, 135—164 (1945).



(11) Wuytack, F.: Über die Fundamentalgleichung der Funktionentheorie in einer speziellen komplexen Algebra. Wis- en Natuurk. Tijdschr. 12, 152—165 (1946) [Holländisch].

Fueter hatte gezeigt, daß sich aus seiner Theorie der (rechts- bzw. links-) regulären Quaternionenfunktionen (Q. F.) sofort der aus der Theorie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher bekannte Hartogssche Satz gewinnen läßt. In (1) skizziert er die Verallgemeinerung auf ein System von analytischen Funktionen von  $n$  komplexen Veränderlichen, indem er die Funktionentheorie (erster und zweiter Integralsatz) in einer Cliffordschen Algebra der Ordnung  $2n$  entwickelt. In (2) konstruiert er hyperkomplexe Funktionen  $f(z)$ , in denen die Diracschen Differentialgleichungen mit verschwindender Ruhmasse dieselbe Rolle spielen wie die Riemann-Cauchyschen Differentialgleichungen in der gewöhnlichen Funktionentheorie. Auch hier gelten die beiden Integralsätze.  $f(z)$  läßt sich aber nicht allein durch die Werte auf einer Hyperfläche darstellen, sondern es tritt noch ein Glied mit einem Integral über einen Hyperkegelmantel hinzu. In (3) weist er auf die Möglichkeit hin, auf Grund der Theorie der Q. F. die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen auf den Bereich der vierfach periodischen Funktionen zu übertragen. Wichtig ist dafür die von Fueter in (4) vermutete und von Nef in (5) bewiesene Darstellung einer Q. F. in der Umgebung eines unwesentlichen singulären Gebildes  $S$  als Summe einer auf  $S$  regulären Q. F. und einer Summe von über  $S$  erstreckten Stieltjesschen Integralen von gewissen Funktionen, die nur in einem Punkt eine unwesentliche Singularität haben. Schließlich stellt Nef alle Q. F. auf, die im Endlichen nur unwesentliche Singularitäten haben (meromorphe Funktionen). In Analogie zur oben erwähnten, von Fueter entwickelten Funktionentheorie der Diracschen Differentialgleichungen behandelt Nef (6) den Fall der hyperbolischen und ultrahyperbolischen Differentialgleichungen vom Typus  $\sum k_j \partial^2 u / \partial x_j^2 = 0$ ,  $k_j = \pm 1$ . Valeiras entwickelt die Funktionentheorie, die zur Humbertschen Gleichung

$$\partial^3 v / \partial x^3 + \partial^3 v / \partial y^3 + \partial^3 v / \partial z^3 - 3 \partial^3 v / \partial x \partial y \partial z = 0$$

gehört. Diese hyperkomplexen Funktionen sind später von Balseiro als Funktionen gewisser trikomplexer Zahlen wiedergefunden worden. Häfeli untersucht die durch Q. F. vermittelten Abbildungen des  $R_4$ . Diese sind nur für ganz lineare Q. F. im ganzen Gebiet konform. Eine konforme Abbildung eines infinitesimalen Gebietes ist eine uneigentliche Drehstreckung. Jede in einem infinitesimalen Gebiet reguläre Funktion läßt sich als Summe dreier regulärer Funktionen darstellen, von denen jede eine konforme Abbildung des Gebietes vermittelt. Wuytack leitet die den Cauchy-Riemannschen Gleichungen entsprechenden Gleichungen für die Funktionen  $f(z)$ ,  $z = \alpha j + \beta k$  ( $j^2 = k^2$ ,  $jk = -kj$ ) her unter Annahme der Gültigkeit des ersten Cauchyschen Satzes. E. Trost.

Sugawara, Masao: On the general Schwarzian lemma. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 483—488 (1941).

Morita, Kiiti: Analytical characterization of displacements in general Poincaré space. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 489—494 (1941).

Morita, Kiiti: Schwarz's lemma in a homogeneous space of higher dimensions. Japanese J. Math. 19, 45—56 (1944).

Für die regulären Funktionen  $f(Z)$ , wo  $Z$  eine komplexe rechteckige Matrix mit  $|Z| \leq 1$  bzw.  $|Z| < 1$  ist, werden verschiedene Verallgemeinerungen des Schwarzschen Lemmas angegeben. E. Trost.

Krasner, Marc: Essai d'une théorie des fonctions analytiques dans les corps valués complets; séries de Taylor et de Laurent issues de ces corps. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 37—40 (1946).

Krasner, Marc: Essai d'une théorie des fonctions analytiques dans les corps valués complets; fonctions holomorphes et méromorphes. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 165—167 (1946).

Krasner, Marc: Essai d'une théorie des fonctions analytiques dans les corps valués complets; théorèmes de Nevanlinna; transformations holomorphes. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 363—365 (1946).

Krasner, Marc: Essai d'une théorie des fonctions analytiques dans les corps valués complets; transformations holomorphes et leurs applications algébriques; fonctions holomorphes de plusieurs variables et fonctions implicites; familles normales; prolongement analytique. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 581—583 (1946).

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Parodi, Maurice: Sur une propriété d'équations intégrales et intégral-différentielles du type de Volterra. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 523—525 (1943).

Ist eine Lösung  $f_1(x)$  von  $L(f) \equiv a_n f^{(n)}(x) + \dots + a_0 f(x) + \int_0^x f(\lambda) K(x - \lambda) d\lambda = 1$  mit  $f_1(0) = \dots = f_1^{(n-1)}(0) = 0$  bekannt, so ist eine Lösung  $f(x)$  von  $L(f) = g(x)$  mit denselben Bedingungen für  $x=0$  gegeben durch  $f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f_1(\lambda) g(x - \lambda) d\lambda$ .

H. Hornich.

Dobrovsky, W.: Sur certaines équations intégrales nonlinéaires. Moskovsk. gosudarst. Univ. učenye Zapiski. Mat. 30, 49—60 (1939) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Ingram, W. H.: On the integral equations of continuous dynamical systems. Philos. Mag., VII. Ser. 30, 16—38 (1940).

Bateman, H.: Some integral equations of potential theory. J. appl. Phys. 17, 91—102 (1946).

Überblick über die Behandlung von Potentialproblemen mit Integralgleichungen. Beschreibung einzelner Vorgehensweisen. Interpolation von Laplace-Integralen  $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{y F(u) du}{(x+u)^2 + y^2}$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ , bzw.  $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \sin(yt) G(t) dt$ ,  $G(t) = \int_0^\infty e^{-ut} F(u) du$ , Bereitstellung der Werte  $P_n(1 - 2e^{-t})$  für  $n = 0(1)10$ ,  $t = 1(1)20$  mit 15 Dezimalen zur Auswertung von  $\frac{1}{\pi} \sin(yt) G(t) = \sum_{n=0}^\infty c_n P_n(1 - 2e^{-t})$ . Berichtigung der tabellierten Funktionswerte in der nachstehend angezeigten Arbeit.

H. Unger.

Olver, F. W. J.: Note on a paper of H. Batemann. J. appl. Phys. 17, 1127 (1946).

● Doetsch, Gustav: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. New York: Dover Publications 1943. XIII, 439 p. \$3,75.

Nachdruck des 1937 bei J. Springer (dies. Zbl. 18, 129) erschienenen Werkes.  
G. Doetsch.

Lévy, Paul: Le calcul symbolique et ses principales applications. Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math. phys., n. Sér. 21, 41—56 (1946).

Überblick zu didaktischen Zwecken über folgende Gebiete: Allgemeine permutable Operationen, speziell Integration mit variablen und festen Grenzen und Differentiation; Erweiterung der Differentiation und Integration auf nichtganze Ordnung; Abbildung der Differentiation durch die Laplace-Transformation auf Multiplikation mit einer Variablen; Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

gen durch diese Abbildung; symbolischer Kalkül von Volterra und die Faltungs-  
sätze für die verschiedenen Faltungsarten. *G. Doetsch.*

Widder, D. V.: What is the Laplace transform? Amer. math. Monthly 52,  
419—425 (1945).

Kurzer Überblick über einige Eigenschaften und Anwendungen der Laplace-  
Transformation ohne Beweise. *G. Doetsch.*

Fan, Ky: Exposé sur le calcul symbolique de Heaviside. Revue sci. 80, 147—  
163 (1942).

Kurze Einführung in den Gebrauch der Laplace-Transformation zur Lösung  
von Differential- und Integralgleichungen. Berechnung von bestimmten Inte-  
gralen, Ableitung von Funktionalgleichungen. *G. Doetsch.*

Saxer, Walter: Über die Laplace-Transformation und ihre Anwendungen.  
Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 45, 19—29 (1945).

Überblick über die Laplace-Transformation, insbesondere ihre Anwendung  
bei der Integralgleichung der Erneuerungstheorie. *G. Doetsch.*

Blanc, C.: Transformation de Laplace et équations différentielles. Bull. techn.  
Suisse Romande 69, 25—30 (1943).

● Potier, Robert et Jacques Laplume: Le calcul symbolique et quelques appli-  
cations à la physique et à l'électricité. Actualités sci. ind., Nr. 947. Paris: Hermann  
et Cie. 1943. 148 p.

Einführung in den Gebrauch der Laplace-Transformation zur Lösung von  
Differentialgleichungen. *G. Doetsch.*

● Churchill, Ruel V.: Modern operational mathematics in engineering. New  
York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1944. X, 306 p. \$ 3,50.

● Carslaw, H. S. and J. C. Jaeger: Operational methods in applied mathe-  
matics. New York: Oxford University Press 1941. XVI, 264 p. \$ 5,00.

Blanc, Ch.: Les méthodes du calcul symbolique. Bull. techn. Suisse Romande  
69, 1—5 (1943).

● Herreng, Pierre: Les applications du calcul opérationnel. [École norm. sup.  
Publ. Laboratoires Physique, Nr. 6.] Paris: Masson et Cie. 1944. 91 p.

Cromwell, Paul C.: A construction theorem for evaluating operational expres-  
sions having a finite number of different roots. Trans. Amer. Inst. electr. Engin.  
60, 273—276 (1941).

● Gardner, Murray F. and John L. Barnes: Transients in linear systems.  
New York: John Wiley and Sons, Inc. 1942. VIII, 389 p. \$ 5,00.

Parodi, Maurice: Sur les propriétés de deux équations intégrales. C. r. Acad.  
Sci., Paris 220, 76—77 (1945).

Parodi, Maurice: Application d'une séquence symbolique à la résolution  
d'équations intégrales. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1426—1427 (1946).

Parodi, Maurice: Application d'une séquence symbolique à la résolution  
d'équations intégrales. Bull. Sci. math., II. Sér. 70, 122—127 (1946).

Lösung spezieller Integralgleichungen mit Laplace-Transformation.

*G. Doetsch.*

Bateman, H.: Some integral relations. Bull. Amer. math. Soc. 50, 745—749  
(1944).

Es wird die Lösung der Integralgleichung  $u(r) = \int_0^{\pi/2} \cos(kr \sin a) U(r \cos a) da$   
angegeben und gezeigt, daß sie eindeutig ist. Ferner wird die Funktion  
 $F(x) = \int_0^\infty e^{-(1+i)m} \cos mx \, dm$  betrachtet und darauf hingewiesen, daß sich deren  
asymptotische Entwicklung für  $t \rightarrow \infty$  nach der Methode von Haar bestimmen



läßt, wenn man beachtet, daß die Laplace-Transformierte von  $F(t^{1/4}) t^{-1/4}$  die Funktion  $\frac{1}{2} \pi z^{-3/4} \exp(-\frac{1}{4} z^{-1/2})$  ist. Deren Verhalten an der singulären Stelle  $z = 0$  bestimmt das asymptotische Verhalten von  $F$ , doch wird diese Methode nicht durchgeführt.

*G. Doetsch.*

Pérès, Joseph: Calcul symbolique d'Heaviside et calcul de composition de Vito Volterra. C. r. Acad. Sci., Paris **217**, 517—520 (1943).

Pérès, Joseph: Quelques applications du calcul de composition de Volterra. C. r. Acad. Sci., Paris **217**, 585—588 (1943).

Verf. versucht zu zeigen, daß der Heavisidekalkül in der Volterraschen Kompositionstheorie enthalten sei.

*G. Doetsch.*

Oliveira Castro, F. M. de: The operational calculus in the complex domain. Anais Acad. Brasil. Ci. **16**, 59—72 (1944).

Ausdehnung einiger Gesetze des Operatorenkalküls auf das komplexe Gebiet.

*G. Doetsch.*

Gilly, Jean: Sur une extension de la théorie de la composition de première espèce. C. r. Acad. Sci., Paris **218**, 100—102 (1944).

Gilly, Jean: Comparaison entre la théorie de la composition et la transformation de Laplace-Carson. C. r. Acad. Sci., Paris **218**, 382—384 (1944).

Gilly, Jean: Étude analytique des produits de composition. C. r. Acad. Sci., Paris **219**, 383—385 (1944).

Gilly, Jean: Les parties finies d'intégrales et la transformation de Laplace-Carson. Revue sci. **83**, 259—270 (1945).

Definition der Komposition erster Art für Funktionen, bei denen das Integral nicht existiert, durch Verwendung des Hadamardschen „endlichen Teils“; Beziehungen zwischen der Laplace-Transformation und dem formal gliedweise gebildeten operatorischen Abbild einer Potenzreihe: Definition der Faltung im Komplexen für Funktionen, die sich bei Umlauf um eine Singularität mit einem Exponentialfaktor multiplizieren.

*G. Doetsch.*

Grünberg, G. A.: Relation between operational expressions of two arbitrary functions and the operational representation of their product. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **40**, 141—143 (1943).

Komplexer Faltungssatz: Dem Produkt zweier Funktionen entspricht die komplexe Faltung ihrer Laplace-Transformierten (bekannt).

*G. Doetsch.*

Amerio, Luigi: Su alcune questioni relative alla trasformazione di Laplace. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. mat. natur. **76** (III. Ser. **7**), 26 p. (1943) = Ist. Naz. Appl. Calcolo, II. Ser. Nr. **154**.

I. Angabe einer hinreichenden Bedingung dafür, daß aus  $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(s)$ ,  $f_n(s) = \mathcal{L}\{F_n\}$ , auf  $\mathcal{L}\{\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(s)$  geschlossen werden kann, aus der folgt:

Wenn  $q(z_1, \dots, z_k)$  in  $z_1 = \dots = z_k = 0$  analytisch und gleich 0 ist, und wenn die  $\mathcal{L}\{F_i\} = f_i(s)$ :  $i = 1, \dots, k$ , absolut konvergieren, so ist  $q(f_1(s), \dots, f_k(s))$  eine  $\mathcal{L}$ -Transformierte. II. Es wird eine Verallgemeinerung des Heavisideschen Entwicklungssatzes angegeben für den Fall, daß  $f(s) = \mathcal{L}\{F\}$  in der ganzen Ebene mit Ausnahme von abzählbar vielen abgeschlossenen, beschränkten Gebieten analytisch ist. III. Herleitung einer asymptotischen Entwicklung von

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} f(p) dp \quad (\alpha > 0),$$
 wenn  $f(p)$  auf  $\Re p = 0$  in höchstens abzählbar

vielen Punkten singulär und in einen Streifen  $-\rho < \Re p < 0$  fortsetzbar ist, wobei noch einige weitere Voraussetzungen über die Potenzreihen zu machen sind, durch die  $f(p)$  in der Umgebung der singulären Stellen darstellbar sein soll.

*G. Doetsch.*

**Rey Pastor, J.:** Die Riemannsche Formel in der Laplace-Transformation. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 2, 217—243 (1941) [Spanisch].

I. Verf. will beweisen, daß jede Laplace-Transformierte  $f(z) = \int_0^{\infty} e^{-tz} \alpha(t) dt$  durch das Cauchysche Integral  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(u)}{z-u} du$  darstellbar ist, setzt dabei

aber voraus, daß  $f(x+iy) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $y$  ist, was nicht allgemein zutrifft, da es sogar  $\mathcal{L}$ -Transformierte gibt, die in keiner Halbebene beschränkt sind. Dadurch wird der Beweis hinfällig. [Daß die Behauptung trotzdem richtig ist, ist in Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation I (dies. Zbl. 40, 59), insbes. S. 235, bewiesen.] II. In dem bekannten Satz über das komplexe Umkehrintegral der Laplace-Transformation kann die Voraussetzung der absoluten Konvergenz von  $\mathcal{L}\{\alpha(t)\}$  durch die der gleichmäßigen Konvergenz ersetzt werden. — Der weitere Beweis, daß die komplexe Umkehrformel auch gilt, wenn  $\alpha(t)$  in  $(0, \infty)$  von beschränkter Variation ist, erbringt nichts Neues, da dann  $\alpha(t)$  die Differenz zweier beschränkter, monotoner Funktionen ist, deren  $\mathcal{L}$ -Integral absolut konvergiert. III. Betrachtungen über das komplexe Umkehrintegral mit winkelförmigem Weg  $|\arg(z-h)| = \omega < \pi/2$  und über das Laplace-Stieltjes-Integral. Verf. erinnert daran, daß er die Post-Widdersche Umkehrformel bereits in seinem Buch „Series e integrales  $D''$ “ (Madrid 1920) aufgestellt hat.

G. Doetsch.

**Royall jr., N. N.:** Bounded Laplace transforms. Amer. math. Monthly 49, 600—604 (1942).

$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \alpha(t) dt$  konvergiere absolut für  $\Re s > 0$ . Damit  $f(s)$  für  $\Re s > 0$  beschränkt ist, ist notwendig und hinreichend, daß das Mittel  $\int_0^R (1-t/R) e^{-st} \alpha(t) dt$  für  $\Re s > 0$  und  $R \geq 0$  beschränkt ist.

G. Doetsch.

**Vignaux, J. C.:** Über die asymptotische Darstellung von Funktionen durch Integrale. An. Soc. ci. Argentina 138, 27—39, 97—119, 249—260 (1944) [Spanisch].

**Vignaux, J. C.:** Asymptotische Reihen und Integrale. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., Revista Vol. 3, Nr. 180, 401—412 (1944) [Spanisch].

**Vignaux, J. C. and M. Cotlar:** Asymptotische Laplace-Stieltjes-Integrale. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., Revista Vol. 3, Nr. 180, 345—400 (1944) [Spanisch mit französ. Zusammenfassg.].

In Analogie zur Definition der asymptotischen Potenzreihe heißt eine Funktion  $f(z)$  durch ein Laplace-Integral  $\int_0^{\infty} e^{-zt} q(t) dt$  asymptotisch dargestellt, wenn  $e^{az}(f(z) - \int_0^a e^{-zt} q(t) dt) \rightarrow 0$  für  $\Re z \rightarrow \infty$  bei jedem  $a \geq 0$ . Für diesen Begriff werden die analogen Eigenschaften wie für das klassische Laplace-Integral nachgewiesen.

G. Doetsch.

**Parodi, Maurice:** Sur deux applications de la correspondance symbolique

$$\mathfrak{L}[f(x^2)] = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2 \lambda^2}{4}} \varphi\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) d\lambda. \quad \text{Revue sci. 84, 162—163 (1946).}$$

Die genannte Formel wird zur Ableitung zweier bekannten Eigenschaften der Gammafunktion benutzt.

G. Doetsch.

**Pollard, Harry:** The representation of  $e^{-x^\lambda}$  as a Laplace integral. Bull. Amer. math. Soc. 52, 908—910 (1946).

Bekanntlich ist  $e^{-x^\lambda}$  für  $0 < \lambda < 1$  durch ein Laplace-Integral  $\int_0^{\infty} e^{-xt} q_\lambda(t) dt$

darstellbar, für  $\lambda \geq 1$  aber nicht. Es wird gezeigt, daß  $q_\lambda(t) \rightarrow 0$  und  $\int_0^\infty q_\lambda(t) dt = \infty$ . Durch Auswertung des komplexen Umkehrintegrals ergibt sich:

$$q_\lambda(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Gamma(\lambda k + 1) \frac{\sin \pi \lambda k}{k! t^{\lambda k+1}}.$$

*G. Doetsch.*

Korevaar, J.: Einige ganze Funktionen, die sich in einer Halbebene durch Laplace-Integrale darstellen lassen. *Mathematica*, Zutphen, B 12, 107—114 (1944) [Holländisch].

Das einseitige Laplace-Integral wird in der Form  $g(s) = \int_1^\infty G(x) x^{-s-1} dx$  geschrieben. Wenn  $G$  periodisch mit dem Mittelwert  $\gamma$  ist, so ist die Konvergenzabszisse 0 oder 1, aber die analytische Fortsetzung von  $g(s) = \gamma s^{-1}$  ist eine ganze Funktion. Weitere Sätze ähnlicher Art.

*G. Doetsch.*

Bayard, Marcel: Sur une utile extension de la transformation de Laplace. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 217, 471—472 (1943).

Bekannte Bemerkung über das Verhältnis von ein- und zweiseitiger Laplace-Transformation.

*G. Doetsch.*

Widder, D. V.: The iterates of the Laplace kernel. *Duke math. J.* 11, 231—250 (1944).

Für ungerades  $n$  sind die iterierten Kerne  $G_n(x, y) = \int_0^\infty G_0(x, t) G_{n-1}(t, y) dt$ ,  $G_0(x, y) = e^{-xy}$  vom Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 18, 131) berechnet worden. Es wird gezeigt, daß  $G_n(x, y)$  für gerades  $n$  durch die Laplace-Transformierten von  $(\log t)^n (1-t)$  bzw.  $(\log t)^n (t-1)$  ausgedrückt werden kann. Das Verhalten von  $G_n(x, y)$  wird für  $x \rightarrow \infty$  durch eine asymptotische, für  $x \rightarrow 0$  durch eine konvergente Reihe beschrieben.

*G. Doetsch.*

Vignaux, J. C.: Differentiation and Integration der Laplace-Transformierten. *An. Soc. ci. Argentina* 129, 26—31 (1940) [Spanisch].

Richmond, D. E.: Elementary evaluation of Laplace transforms. *Amer. math. Monthly* 52, 481—487 (1945).

Es wird gezeigt, wie man eine große Anzahl von speziellen Laplace-Transformierten berechnen kann unter alleiniger Anwendung der beiden Differentiationsgesetze, des Dämpfungssatzes und der beiden Abelschen Sätze, daß aus  $F(t) \sim t^\alpha$  ( $t \rightarrow 0$  bzw.  $t \rightarrow \infty$ ) folgt  $\mathfrak{L}\{F\} \sim \Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1}$  ( $s \rightarrow \infty$  bzw.  $s \rightarrow 0$ ) bei  $\alpha > -1$ .

*G. Doetsch.*

Shastri, N. A.: Some theorems in operational calculus. *Proc. Indian Acad. Sci.*, Sect. A 20, 211—223 (1944).

Humbert, Pierre: Une nouvelle correspondance symbolique. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 218, 99—100 (1944).

Humbert, Pierre: Sur les formules opératoires du calcul symbolique. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 221, 398—399 (1945).

Poli, L.: Sur deux règles du calcul symbolique. *Ann. Univ. Lyon*, III. Sér., Sect. A 7, 21—29 (1944).

Tewari, N. D.: A theorem in operational calculus. *Proc. Benares math. Soc.*, n. Ser. 5, 33—36 (1943).

Humbert, Pierre et Louis Poli: Sur certaines transcendentes liées au calcul symbolique. *Bull. Sci. math.*, II. Sér. 68, 204—214 (1944).

Humbert, Pierre: Nouvelles correspondances symboliques. *Bull. Sci. math.*, II. Sér. 69, 121—129 (1945).

McLachlan, N. W.: A general theorem in Laplace transforms. *Math. Gaz.* 30, 85—87 (1946).



Abbildung von Operationen an Funktionen durch die Laplace-Transformation und Ausrechnung spezieller Laplace-Transformierter. *G. Doetsch.*

Shastri, N. A.: Some theorems in operational calculus. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 7, 3—9 (1945).

Ausrechnung von Laplace-Transformierten mittels Whittakerscher Funktionen. *G. Doetsch.*

Blanc, Charles: Sur le calcul des transformées de Laplace de certaines fonctions. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, 105—110. Zürich: Füssli 1945.

Auswertung von Laplace-Integralen  $\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ , wenn  $F(t)$  eine Treppenfunktion ist, mit Anwendung auf Differentialgleichungen, deren Lösung in gewissen Punkten eine unstetige Ableitung besitzt. *G. Doetsch.*

Parodi, Maurice: Sur la transformée de Laplace de la fonction  $\delta(t)$  de Dirac. Revue sci. 82, 105 (1944).

Verf. weist auf gewisse Schwierigkeiten hin, die bei der Integration der Diracschen Funktion auftreten. *G. Doetsch.*

Erdélyi, A.: Inversion formulae for the Laplace transformation. Philos. Mag., VII. Ser. 34, 533—537 (1943).

Es wird (ohne Beweise) eine Methode zur Gewinnung von Umkehrformeln für die Laplace-Transformation  $g(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  angegeben. Es wird z. B.  $1 - 2e^{-t} = x$ ,  $P_n(x) = \sum_{m=0}^n d_m e^{-mt}$  (Legendresches Polynom),  $b_n = (2n+1) \cdot \sum_{m=0}^n d_m g(b+m)$  gesetzt. Dann ist  $f(t) = e^{(b-1)t} \sum_{n=0}^\infty b_n P_n(x)$ . Die Koeffizienten  $b_n$  hängen nur von den Werten von  $g$  in einer arithmetischen Progression ab.

*G. Doetsch.*

Erdélyi, A.: Note on an inversion formula for the Laplace transformation. J. London math. Soc. 18, 72—77 (1943).

Es sei (1)  $g(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ . Um eine Umkehrformel abzuleiten, die nur die Werte von  $g(s)$  in einer abzählbaren Punktmenge benutzt, werde die Folge von verschiedenen komplexen Zahlen  $\lambda_n$  mit  $\Re \lambda_n \rightarrow 0$  so gewählt, daß  $\sum \Re \lambda_n / (1 + |\lambda_n|^2)$  divergiert. Dann ist die Folge  $\{e^{-\lambda_n t}\}$  vollständig und abgeschlossen in  $L^2(0, \infty)$ . Man kann aus ihr eine orthonormale Folge  $q_n = \sum_{m=0}^n c_{mn} e^{-\lambda_m t}$  bilden. In bezug auf sie hat  $f(t)$  formal die Fourier-Entwicklung

$$(2) \quad f(t) = \sum_{n=0}^\infty q_n(t) \int_0^\infty f(t) \bar{q}_n(t) dt = \sum_{n=0}^\infty q_n(t) \sum_{m=0}^n c_{mn} \int_0^\infty f(t) e^{-\lambda_m t} dt = \sum_{n=0}^\infty q_n(t) \sum_{m=0}^n c_{mn} g(\lambda_m).$$

Dies ist eine Umkehrformel, die nur die Werte von  $g$  an den Stellen  $\lambda_m$  benutzt. Setzt man (2) in (1) ein, so ergibt sich:

$$(3) \quad g(s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-st} q_n(t) dt \sum_{m=0}^n c_{mn} g(\lambda_m) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^n \frac{c_{mn}}{s + \lambda_m} \sum_{m=0}^n c_{mn} g(\lambda_m),$$

was eine Interpolationsformel für  $g(s)$  darstellt. Beschränkt man sich auf Funktionen  $f(t)$  aus  $L^2(0, \infty)$  und demgemäß auf Funktionen  $g(s)$ , deren Quadratintegral auf den Vertikalen der rechten Halbebene beschränkt ist, so läßt sich diesen formalen Entwicklungen eine effektive Bedeutung geben in dem Sinn, daß die Partialsummen von (2) im quadratischen Mittel über  $(0, \infty)$  gegen  $f(t)$  konvergieren und daß (3) für  $\Re s > 0$  gegen  $g(s)$  konvergiert. *G. Doetsch.*

**Possenti, Renzo:** Sulle relazioni fra le parti reali e le parti immaginarie degli operatori funzionali. Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 4, 454—459 (1943).

Die in die Sprache der Elektrotechnik und des symbolischen Kalküls eingekleideten Erörterungen laufen mathematisch darauf hinaus, daß in der komplexen Umkehrformel der Laplace-Transformation  $G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \dot{f}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda$  als Integrationsweg die imaginäre Achse genommen wird, wobei eventuell die Singularitäten durch Ausbuchtungen umgangen werden müssen. Bei Vorliegen besonderer Verhältnisse läßt sich  $G(t)$  durch den Realteil  $U_0(\omega)$  von  $f(i\omega)$  oder durch den Imaginärteil  $V_0(\omega)$  allein ausdrücken, und es bestehen Beziehungen zwischen  $U_0$  und  $V_0$ . Diese Zusammenhänge sind in der elektrotechnischen Literatur schon oft behandelt worden.

G. Doetsch.

**Gross, Bernhard and Beppo Levi:** Über die Berechnung der inversen Laplace-Transformation. Math. Notae 6, 213—224 (1946) [Spanisch].

Wenn zugleich  $f(s) = \int_0^\infty \frac{d\lambda(t)}{s-t}$  und  $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} q(t) dt$  ist, so ist  $q(t) = \int_0^\infty e^{-t\alpha} d\alpha(x)$ .

G. Doetsch.

**Caton, W. B. and E. Hille:** Laguerre polynomials and Laplace integrals. Duke math. J. 12, 217—242 (1945).

Der Inhalt der Arbeit sei charakterisiert durch folgende Teilergebnisse: I. Für ein  $\alpha > -1$  sei  $u^\alpha F(u)$  in  $[0, \varepsilon]$  und  $F(u)$  in  $[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$  integabel, und  $c = \lim_{u \rightarrow \infty} u^{-1} \log \int_0^u t^\alpha F(t) < 1$ . Die Fourier-Reihe von  $F(u)$  nach verallgemeinerten Laguerreschen Polynomen  $L_n^\alpha(u)$  ist dann für  $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$  fast überall Abel-summabel. II. Bekanntlich bilden die Funktionen  $\omega_n(y) = (2\pi)^{1/2} (-\frac{1}{2} + iy)^n (\frac{1}{2} + iy)^{-n-1}$  [die Laplace-Transformierten von  $L_n(t)$  auf  $\Re s = \frac{1}{2}$ ] ein vollständiges orthogonales System in  $L_p(-\infty, \infty)$ ,  $p > 1$ . Wenn  $g(y) \in L_p(-\infty, \infty)$ ,  $p > 1$ , so konvergiert die Fourier-Reihe von  $g(y)$  hinsichtlich der  $\omega_n(y)$  im Mittel der Ordnung  $p$  gegen  $g(y)$ . III.  $f(z)$  sei in einer Halbebene in der Form  $f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^\alpha + 1 A(t) dt$  darstellbar, wo  $A$  gewissen Wachstumsbeschränkungen für  $t \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow \infty$  unterliegt. Dann läßt sich der  $n$ -te Fourier-Laguerre-Koeffizient von  $A(t)$  linear durch die Werte  $f^{(k)}(1)$ ,  $k = 0, \dots, n$ , ausdrücken und umgekehrt. V. Wenn  $f(z)$  in  $\Re z > \frac{1}{2}$  analytisch und  $f(x + iy) \leq M_1 + M_2 |y|^\gamma$  ( $\gamma \geq 0$ ) ist, so hat  $f(z)$  die Gestalt  $z^\alpha \int_0^\infty e^{-zu} F(u) du$  mit  $\alpha > \gamma + \frac{1}{2}$ ,  $e^{-u/2} F(u) \in L_2(0, \infty)$ .

G. Doetsch.

**Andersson, Walter:** Short notes on Charlier's method for expansion of frequency functions in series. Skand. Aktuarietidskr. 27, 16—31 (1944).

Die Koeffizienten der Entwicklung  $f(x) = \sum_k a_k q^{(k)}(x)$  bei vorgegebener fester Funktion  $q(x)$  werden durch Anwendung der zweiseitigen Laplace-Transformation bestimmt. Analog werden die Koeffizienten von  $f(x) = \sum_k a_k t^k \chi(x)$  (Variable  $x$  ganzzahlig) mittels der Transformation  $\sum_{x=-\infty}^\infty (1+t)^x f(x)$  berechnet.

G. Doetsch.

**González Domínguez, A.:** Über gewisse Umkehrungsformeln. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. 6, 207—214 (1946) [Spanisch].

Darstellung der Koeffizienten  $c_n$  der Reihe  $\sum_{n=1}^\infty c_n \frac{z}{z^2 + n^2} = f(z)$  durch  $f(z)$ . Verf. geht davon aus, daß  $\frac{z}{z^2 + n^2}$  die Laplace-Transformierte von  $\cos n t$  ist.

G. Doetsch.

**Pollard, Harry:** On Stieltjes' integral equation. Ann. of Math., II. Ser. **46**, 83—87 (1945).

Aus der Konvergenz der Stieltjes-Transformation (1)  $f(x) = \int_0^\infty \frac{d\alpha(t)}{x+t}$  folgt die der iterierten Laplace-Transformation (2)  $f(x) = \int_0^\infty e^{-xu} du \int_0^\infty e^{-tu} d\alpha(t)$  und (3)  $\alpha(t) = o(t)$  für  $t \rightarrow \infty$ . Es wird gezeigt, daß auch umgekehrt (1) aus (2) und (3) folgt. Darstellungstheorie auf Grund der Widderschen Umkehrformel für die Stieltjes-Transformation. *G. Doetsch.*

**Pollard, Harry:** An inversion formula for the Stieltjes transform. Duke math. J. **11**, 301—318 (1944).

Umkehrung der Stieltjes-Transformation  $f(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t) dt}{x+t}$  durch

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k (2k-1) x^{k-1}}{k! (k-2)!} \int_0^\infty u^k f(u) \frac{\partial^{2k-1}}{\partial u^{2k-1}} \left\{ \frac{u^{2k-1}}{(u-x)^{2k}} \right\} du.$$

Darstellungstheorie auf Grund dieser Umkehrformel für verschiedene Klassen

von Funktionen  $\varphi$ . Entsprechende Sätze für  $f(x) = \int_0^\infty \frac{d\alpha(t)}{x+t}$ . *G. Doetsch.*

**Pollard, Harry:** The Bernstein-Widder theorem on completely monotonic functions. Duke math. J. **11**, 427—430 (1944).

Ein von allgemeinen Theorien unabhängiger Beweis des Satzes, daß eine in  $(0, \infty)$  vollmonotone Funktion durch ein Laplace-Stieltjes-Integral mit monotoner Belegungsfunktion darstellbar ist. An tieferen Hilfsmitteln wird nur der Hellysche Auswahlssatz benutzt. *G. Doetsch.*

**Hirschman jr., I. I.:** Two power series theorems extended to the Laplace transform. Duke math. J. **11**, 793—797 (1944).

$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$  habe die Konvergenzabszisse 1. I. Wenn  $\alpha(t)$  in  $p_k \leq t \leq q_k$  mit  $q_k \geq (1 + \theta) p_k$  ( $\theta > 0$ ) konstant ist, dann ist die Folge von Partialintegralen  $\int_0^{p_k} e^{-st} d\alpha(t)$  in einem Gebiet konvergent, das jeden regulären Punkt von  $f(s)$  auf  $\Re s = 1$  als inneren Punkt enthält. (Analogon zum Satz von Ostrowski für Potenzreihen.) II. Jeder Punkt mit  $\Re s = 1$  ist Häufungspunkt von Nullstellen

der Partialintegrale  $\int_0^p e^{-st} d\alpha(t)$ . (Analogon zum Satz von Jentzsch über Potenzreihen.) *G. Doetsch.*

**Ferrari, María Angélica:** Eigenschaften der  $D_\lambda$ -Transformation. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. **6**, 321—327 (1946) [Spanisch].

**Repetto, Celina:** Uniforme Konvergenz und Umkehrung von  $D$ -Integralen im elliptischen und parabolischen komplexen Bereich. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. **6**, 315—320 (1946) [Spanisch].

Studium des verallgemeinerten Laplace-Integrals  $f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(t)} dA(t)$  mit nichtabnehmendem  $\lambda(t)$ . Angabe von hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Funktion in dieser Gestalt darstellbar ist, daß das Integral gleichmäßig konvergiert usw. *G. Doetsch.*

● **Ríos, Sixto:** Die analytische Fortsetzung des Integrals von Dirichlet-Stieltjes. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas 1944. 93 p. [Spanisch].



Unter dem Dirichlet-Stieltjes-Integral versteht Verf. ein verallgemeinertes Laplace-Integral der Gestalt  $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(t)s} d\alpha(t)$ , wo  $\alpha(t)$  in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation und  $\lambda(t)$  monoton nichtabnehmend, aber nicht notwendig differenzierbar ist, so daß sich  $f(s)$  nicht immer auf ein gewöhnliches Laplace-Integral reduzieren läßt. Es werden behandelt: I. Konvergenzeigenschaften. II. Singularitäten (Analogon zum Vivantischen Satz; Integrale ohne singuläre Stelle auf der Konvergenzgeraden usw.). III. Integrale, deren Konvergenzgerade natürliche Grenze ist. Wird dem Raum aller  $f(s)$  dadurch eine Metrik aufgebracht, daß als Distanz zweier Integrale  $f(s)$  und  $g(s)$  mit demselben  $\lambda$ , aber verschiedenen  $\alpha$  die Größe  $D = e^C$  definiert wird, wo  $C$  die Konvergenzabszisse von  $f(s) - g(s)$  ist, so ist dieser Raum vollständig, aber nicht kompakt und nicht separabel. (Zwei Integrale, für die  $D = 0$ , also  $C = -\infty$  ist, werden dabei als gleich angesehen.) In diesem Raum bilden sowohl die fortsetzbaren als auch die nichtfortsetzbaren Integrale Mengen aus lauter inneren Punkten, deren einziger Grenzpunkt das Null-Element ist. IV. Hyperkonvergenz. Diese hängt, anders als bei Potenzreihen, nicht notwendig mit dem Auftreten von „Lücken“ zusammen. Es werden hinreichende Bedingungen für das Auftreten von Hyperkonvergenz gegeben. V. Analytische Fortsetzung durch „Umordnung“ in ein Integral  $\int_0^{\infty} e^{-e^t s} d\beta(t)$ , d. h. jedem  $t$  entspricht eineindeutig ein  $t_1$ , so daß  $\lambda(t) = \mu(t_1)$ ,  $\alpha(t) = \beta(t_1)$ . VI. Anwendung der Ergebnisse auf die Hyperkonvergenz Dirichletscher Reihen. *G. Doetsch.*

Bayard, Marcel: Correspondance des fonctions de fonctions dans des transformations fonctionnelles définies par généralisation de la transformation de Laplace. C. r. Acad. Sci., Paris **218**, 27—29 (1944).

Verallgemeinerungen der Laplace-Transformation, die von van der Pol (dies. Zbl. 9, 141) und J. P. Schouten (dies. Zbl. 11, 91) eingeführt wurden. *G. Doetsch.*

Tewari, N. D.: A theorem on the generalized Laplace's transform. Proc. Benares math. Soc. **7**, 51—58 (1945).

Verallgemeinerung der Laplace-Transformation durch ein Integral mit einer Whittakerschen Funktion als Kern. Ausrechnung spezieller Paare von korrespondierenden Funktionen. *G. Doetsch.*

Schekunoff, S. A.: Proposed symbols for the modified cosine and exponential integrals. Quart. appl. Math. **2**, 90 (1944).

Cameron, Robert H.: Some introductory exercises in the manipulation of Fourier transforms. Nat. math. Mag. **15**, 331—356 (1941).

● Carleman, T.: L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent. [Publ. Sci. Inst. Mittag-Leffler, **1**.] Uppsala: 1944. 119 p.

I. Klassische und Plancherelsche Theorie der Fourier-Transformation. II. s. Carleman (dies. Zbl. **39**, 331). III. Äquivalenz von Abgeschlossenheit und Vollständigkeit von Funktionenfolgen im Intervall  $(-\infty, \infty)$ . IV. Wenn  $g(x)$  die Fourier-Transformierte einer Funktion aus  $L^1$  und  $\phi(z)$  eine für den Wertbereich von  $g(x)$  in  $\beta: \alpha: \gamma$  analytische Funktion ist, so stimmt  $\phi(g(x))$  in  $\beta: \alpha: \gamma$  mit der Fourier-Transformierten einer Funktion aus  $L^1$  überein (N. Wiener - P. Lévy). V. Der Wiener'sche Tauber-Satz und ähnliche Sätze. VI. Die Spektralfunktion einer Funktion  $f(x) = \sum_{v=1}^n A_v e^{i\lambda_v x}$  ( $-\infty < x < \infty$ ), d. h.  $\sigma(\lambda) = \sum_{\lambda_v = \lambda} |A_v|^2$  mit  $A_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-i\lambda_v x} dx$ , mit Anwendungen auf die fastperiodischen Funktionen. *G. Doetsch.*

**Kober, H.:** A note on Fourier transforms. J. London math. Soc. 19, 144—152 (1944).

Der Kern  $e^{-ixt}$  der Fourier-Transformation wird durch den durch  $e^x = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + x/k)^k$  nahegelegten Kern  $(1 + itx)^{-k-1}$  ersetzt und der Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  gemacht, wodurch neue Formeln für die Fourier-Transformation entstehen. *G. Doetsch.*

**Boas jr., R. P. and M. Kac:** Inequalities for Fourier transforms of positive functions. Duke math. J. 12, 189—206 (1945).

Sei  $\varphi(t) \geq 0$ ,  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \varphi(t) dt$ . Wenn  $f(x) = 0$  für  $|x| \geq 1$ , so ist  $|f(\frac{1}{n})| \leq f(0) \cos \frac{\pi}{n+1}$ ,  $n=2, 3, \dots$ , und allgemeiner  $|f(x)| \leq f(0) \cos \frac{\pi}{[1/|x|]+1}$ . Diese Abschätzungen sind die bestmöglichen. — Ferner gilt: Es sei  $\varphi(t) \geq 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \varphi(t) dt$ ,  $f(x) = 0$  für  $|x| > A$ . Dann ist  $\int_{-A}^A |f(x)| dx \leq A f(0)$ . *G. Doetsch.*

**Yosida, Kôzaku:** On the representation of functions by Fourier integrals. Proc. imp. Acad., Tokyo 20, 655—660 (1944).

Aussagen über die beschränkte stetige Funktion  $f(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) an Hand von  $\varphi_n(\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin^2(t/n) (t/n)^{-2} e^{-i\lambda t} dt$ , z. B.  $f(t)$  ist dann und nur dann positiv definit, wenn  $\varphi_n(\lambda) \geq 0$  ( $n=1, 2, \dots$ ). *G. Doetsch.*

**Guinand, A. P.:** Simple Fourier transformations. Quart. J. Math., Oxford Ser. 13, 153—158 (1942).

Das Quadrat der Transformation

$$Tf = x^{-1} f(x^{-1}) + \sum_{r=1}^n (-1)^{2r} A_r x^{-\alpha_r} (\beta_r!)^{-1} \int_0^{x^{-1}} t^{-\alpha_r} (-\log xt)^{\beta_r} f(t) dt$$

ist unter gewissen Voraussetzungen über die vorkommenden Konstanten die Identität. *G. Doetsch.*

**Shanker, Hari:** On functions which are Fourier sine or cosine-transforms of each other. Proc. nat. Acad. Sci. India, Sect. A 11, 73—77 (1941).

**Duffin, R. J.:** Representation of Fourier integrals as sums. I. Bull. Amer. math. Soc. 51, 447—455 (1945).

Es werden Bedingungen angegeben, unter denen die für beliebiges  $q$  definierten Funktionen  $F[(\pi/2)^{1/2} x] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q[x!(2n+1)](2n+1)$ ,  $G[(\pi/2)^{1/2} x] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q[(2n+1)!/x]$  im Verhältnis von sinus-Transformierten zueinander stehen:  $G(x) = (\pi/2)^{1/2} \int_0^{\infty} F(t) \sin xt dt$ . *G. Doetsch.*

**Borgen, S.:** Note on Poisson's formula. J. London math. Soc. 19, 213—219 (1944).

**Borgen, S.:** Note on the summability of Poisson's formula. J. London math. Soc. 19, 100—105 (1944).

Gültigkeitsbedingungen für die klassische Poissonsche Formel

$$(2\pi)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) e^{2\pi n t i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(t+n)$$

mit  $F(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt$ , bzw. für die Verallgemeinerung

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta^{1/2} \{ \frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n\beta) \varphi(\delta n \beta) \} = \alpha^{1/2} \{ f(+0) + \chi(+0) + \chi(-0) \}$$

mit  $\alpha\beta = 2\pi$ ,  $F(x) = (2/\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos x t dt$ ,  $\chi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t + n\alpha)$ ,  $\varphi(u)$  eine gewisse Funktion, z. B.  $e^{-u}$ ,  $e^{-u^2}$ . G. Doetsch.

Cooper, J. L. B.: The uniqueness of trigonometrical integrals. Proc. London math. Soc., II. Ser. **48**, 292—309 (1944).

Macphail und Titchmarsh (dies. Zbl. **16**, 29) zeigten: Wenn (1)  $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iut} du$  gleichmäßig summabel  $(C, n)$  ist, so gilt die Umkehrung (2)  $f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iut} dt$  im Sinne der Summabilität  $(C, n+1)$ . Verf. ersetzt gleichmäßige Konvergenz durch Konvergenz im Mittel der Ordnung 1. Wenn die  $(C, n)$ -Partialintegrale von (1) über jedes endliche Intervall im Mittel konvergieren, so ist (2) fast überall  $(C, n+3)$ -summabel. G. Doetsch.

Bellman, Richard: Fourier integrals. Duke Math. J. **10**, 247—248 (1943).

Für eine Funktion  $f(x) \in L^p(0, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , sei die Fourier-Transformierte  $F(t)$  in üblicher Weise als Mittelwertes in  $L^p$  von  $s_n(t) = \int_0^n f(x) e^{ixt} dx$  definiert. Wenn die Folge  $n_k$  die Lückenbedingung  $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$  erfüllt, so ist  $F(t)$  auch der gewöhnliche punktweise Limes von  $s_{n_k}(t)$ . G. Doetsch.

Cossar, J.: The Cesàro summability of Fourier integrals. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **7**, 84—92 (1945).

Wenn  $g(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut dt$  beschränkt  $(C, r)$ -summabel in jedem endlichen Intervall ist ( $r \geq 0$ ), so ist  $f(x) = \int_0^{\infty} g(u) \sin xu du$  für fast alle  $x$   $(C, r+1)$ -summabel. G. Doetsch.

Kendall, D. G.: A summation formula associated with finite trigonometric integrals. Quart. J. Math., Oxford Ser. **13**, 172—184 (1942).

Wenn  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$  und  $f, f'$  von beschränkter Variation in  $(0, \infty)$ , dann ist  $\frac{1}{2} \lambda f(0) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f(n\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) dx$  für  $0 < \lambda < \lambda_1$  dann und nur dann, wenn  $F_\epsilon(t) = (2/\pi)^{-1/2} \int_0^t f(x) \cos tx dx$  für  $t > 2\pi/\lambda_1$  verschwindet. G. Doetsch.

Lozinski, S. M.: On a theorem of N. Wiener. II. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **53**, 687—690 (1946).

Teil I in C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **49**, 542—545 (1945). Der Satz von N. Wiener über den Zusammenhang zwischen den Fourier-Koeffizienten einer Funktion von beschränkter Variation und ihren Sprunghöhen wird auf Fourier-Integrale übertragen:  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u)^2 \sin^2(u/\lambda) du = \sum_k [f(\xi_k + 0) - f(\xi_k - 0)]^2$ , wo  $F(u) = (2/\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$ ,  $\xi_k$  die Sprungstellen von  $f$ . G. Doetsch.

Kober, H.: On components of a function and on Fourier transforms. Amer. J. Math. **68**, 398—416 (1946).

Für  $F(x) \in L^2(-\infty, \infty)$  gilt bekanntlich  $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ , wo  $F_1(x)$  und  $F_2(x)$  die Grenzwerte für  $|y| \rightarrow 0$  von Funktionen  $F_1(x + iy)$  und  $F_2(x + iy)$  sind, die in  $y > 0$  bzw.  $y < 0$  analytisch sind. Verf. behandelt analog Funktionen mit konvergentem  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|(1+x^2)^{-1} dx$ . G. Doetsch.



Kravtchenko, Julien: Sur l'extension d'un théorème de Fatou et Privaloff. C. r. Acad. Sci., Paris **219**, 47—49 (1944).

Verallgemeinerung des Satzes von Privaloff: Wenn  $f(x)$  die Periode  $2\pi$  hat und zur Klasse  $\text{Lip } \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) gehört, so gehört die konjugierte Funktion

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \text{ auch zu } \text{Lip } \alpha. \quad G. Doetsch.$$

Rao, D. V. B.: Two inversion formulae. Bull. Calcutta math. Soc. **34**, 79—85 (1942).

Formeln vom Typus der Fourierschen Integralformel mit Bessel-Funktionen als Kernen. G. Doetsch.

Pollard, Harry: Integral transforms. Duke math. J. **13**, 307—330 (1946).

I. Allgemeine Theorie der Transformation  $f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s-t) q(t) dt \equiv T q$  unter den Voraussetzungen:  $(H_1)$   $H(s)$  reell, meßbar, gerade;  $(H_2)$   $H(s) \in L(-\infty, \infty)$ .  $\int_{-\infty}^{\infty} |H(s)| ds \leq 1$ ;  $(H_3)$   $H(s) \in L^2(-\infty, \infty)$ . Durch die Fourier-Transformation wird  $T$  vermöge des Faltungssatzes „algebraisiert“, so daß sich das Punktspektrum, die Resolventenmenge und das kontinuierliche Spektrum an Hand von  $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} H(s) ds$  bestimmen lassen. [Beispiel:  $\lambda$  gehört dann und nur dann zum Punktspektrum, d. h.  $\lambda \varphi = T q$  durch  $\varphi \in L^2$  lösbar, wenn  $h(x) = \lambda$  auf einer Menge von positivem Maß.] Ebenso läßt sich die Resolvente und die Inverse von  $T$  durch  $h(x)$  ausdrücken. Die kanonische Spektralzerlegung wird nach den allgemeinen Methoden der linearen Transformationen im Hilbertschen Raum durchgeführt, ebenso die operatorische Deutung der Umkehrformel. Ferner werden die Kerne der iterierten Transformationen berechnet. II. Anwendung dieser Theorie auf den Spezialfall der Stieltjes-Transformation in der Gestalt

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) / \cosh \frac{1}{2}(s-t) dt. \text{ III. Anwendung auf andere Transformationen:}$$

$$H(s) = \pi^{-1/2} e^{-s^2} \text{ (Weierstraß)}, H(s) = \frac{1}{2} e^{-s} \text{ (Picard)}, H(s) = [\pi(1+s^2)]^{-1} \text{ (Poisson)},$$

$$H(s) = (\pi s)^{-1} \sin s \text{ (Dirichlet)}, H(s) = (\pi s^2)^{-1} \sin^2 s \text{ (Fejér)}. \text{ IV. Allgemeine}$$

Theorie der Transformation  $f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s+t) q(t) dt$ , in ähnlicher Weise durchgeführt wie I. Anwendung auf den Spezialfall der Laplace-Transformation in der

$$\text{Gestalt } f(s) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-e^{s+t} + \frac{s+t}{2}\right) q(t) dt. \text{ Diese hat kein Punktspektrum}$$

und das kontinuierliche Spektrum  $(-1, 1)$ . Die kanonische Spektralzerlegung ist komplizierter als die ihrer Iterierten, der Stieltjes-Transformation. — Die sich mit der vorliegenden Arbeit eng berührende Arbeit des Ref. (dies. Zbl. **21**, 407) scheint dem Verf. unbekannt geblieben zu sein. G. Doetsch.

Trejo, César A.: Über Funktionen mit fastperiodischem lokalen Mittelwert. An. Soc. ci. Argentina **132**, 137—138 (1941) [Spanisch].

Kharsiladze, F. L.: Über die starke Darstellung einer Funktion mittels eines singulären Integrals. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski, Ser. mat. Nauk **6**, 108—114 (1939) [Russisch].

(1) Garabedian, H. L.: The analogue of Bromwich's theorem for integral transformations. Ann. of Math., II. Ser. **45**, 740—746 (1944).

(2) Zahorski, Zygmunt: Sur les intégrales singulières. C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 399—401 (1946).

(3) Natanson, I. P.: On some estimations connected with singular integrals of C. de la Vallée-Poussin. C. r. Acad. Sci. URSS., n. Sér. 45, 274–277 (1944).

(4) Natanson, I. Quelques applications de l'intégrale de Vallée-Poussin à la théorie des séries de Fourier. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 49, 393–395 (1945).

Untersuchungen über allgemeine singuläre Integrale der Form  $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^b K(s, t) f(x \pm t) dt$  [(1), (2)] und über das spezielle singuläre Integral von de la Vallée-Poussin  $V_n(x) = \frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos^{2n} \frac{1}{2}(t-x) dt$  [(3), (4)]. Es ist  $n[V_n(x) - f(x)] \rightarrow f''(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls  $f''$  existiert, und  $|V_n(x) - f(x)| \leq 3\omega(1/n)$  für stetiges  $f$  mit dem Stetigkeitsmodul  $\omega$ . Die auf die  $V_n$ -Mittel gegründete Summationsmethode ist stärker als die  $(C, 2)$ -Summation. G. Doetsch.

Garabedian, H. L.: Hausdorff integral transformations. Ann. of Math., II. Ser. 43, 501–509 (1942).

Die Bedingungen:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(x)$  von beschränkter Variation in  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\varphi(x)$  stetig in  $x = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$  sind notwendig und hinreichend für die Regularität der Hausdorffschen Integraltransformation  $r(x) = \int_0^x u(y) d\varphi(y/x) = (H, \varphi(x))$  auf der Klasse der beschränkten stetigen Funktionen. Wenn  $(H, \varphi_c(x))$  das Produkt der Transformationen  $(H, \varphi_a(x))$  und  $(H, \varphi_b(x))$  ist, so ist  $\varphi_c(x) = \int_0^1 \varphi_a(x/t) d\varphi_b(t)$ . G. Doetsch.

Fraser, W. C. G.: Inversion formulae for the factorial transform. Duke math. J. 13, 239–246 (1946).

Unter Fakultät-Transformation versteht der Verf.  $f(s) = \int_0^\infty B(s, t+1) d\alpha(t)$ , wo  $B$  die Eulersche Betafunktion ist. Er stellt  $f(s)$  als Laplace-Integral dar und wendet die Phragmén'sche Umkehrformel an, wodurch er zwei Umkehrformeln erhält. Die eine benutzt die sämtlichen Differenzen von  $f(s)$  im Punkt  $s = 1$ , die andere die Werte von  $f(s)$  an äquidistanten Stellen. G. Doetsch.

Akhiezer, N.: On some inversion formulae for singular integrals. Izvestija Akad. Nauk SSSR. Ser. math. 9, 275–290 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Es werden Funktionen  $p(x)$  einer Klasse  $A$  betrachtet, für die  $\frac{1}{\pi} \int_E (x-t)^{-1} p(t) dt = \alpha + \mu x - \sum_k (x - \alpha_k)^{-1} \mu_k$  ist, wobei  $E$  eine offene Menge bedeutet,  $\mu \geq 0$ ,  $\mu_k > 0$  ist, die  $\alpha$  zum Komplement von  $E$  gehören und jedes zu  $E$  komplementäre Intervall nur eine endliche Anzahl von  $\alpha$ -Werten enthält. Es wird gezeigt: Wenn  $p(x)$  und  $q(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$  beide zu  $A$  gehören und für  $q(x)$  in der obigen Darstellung statt der  $\alpha_k$  die Zahlenwerte  $\beta_k$  auftreten, so haben die Folgen  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  keinen Punkt gemein. Ferner werden Bedingungen dafür angegeben, daß die Transformation  $f \rightarrow g$ , definiert durch  $g(x) = \pi^{-1} \int_E (x-t)^{-1} f(t) p(t) dt$ , durch dieselbe Formel umgekehrt wird. G. Doetsch.

Delange, Hubert: Une nouvelle démonstration de certains théorèmes taubériens. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 309–311 (1943).

$K$  und  $\varphi$  seien wachsende Funktionen,  $\varphi(0) = 0$  und  $\int_0^\infty K(t/x) d\varphi(t)$  für  $x > 0$  vorhanden; es sei  $x \varphi'(x) \log x \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow 0$ ). Es werden Bedingungen angegeben, unter denen die Relation  $\int_0^\infty K(t/x) d\varphi(t) \sim x^{\rho(x)}$  für

$x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow 0$ ) mit der Relation  $\psi(t) \sim t^{e(t)}/c[\varrho(t)]$  für  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow 0$ ) äquivalent ist, wo  $c(\lambda) = \int_0^\infty K(u) d(u^\lambda)$ . G. Doetsch.

**Guinand, A. P.:** Summation formulae and self-reciprocal functions. III. Quart. J. Math., Oxford Ser. 13, 30—39 (1942).

Fortsetzung der Arbeiten: dies. Zbl. 18, 363; 21, 409. Es wird gezeigt, daß eine gewisse von der zahlentheoretischen Funktion  $A(n)$  abhängige Funktion  $F(x)$  der Relation  $F(x) = x^{-1} F(x^{-1}) + x^{-1} \int_{x^{-1}}^\infty F(t) t^{-1} dt$  genügt. Weitere Verallgemeinerung durch Einführung eines Parameters  $\alpha$ . G. Doetsch.

**Mital, P. C.:** On self-reciprocal functions. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 4, 41—43 (1943).

**Mital, P. C.:** Operational images of self-reciprocal functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 6, 25—32 (1942).

Läßt sich eine Funktion  $f(x)$  als Mellin-Transformierte mit dem Kern  $x^\lambda$  darstellen, was z. B. zutrifft, wenn  $f(x)$  selbstreziprok in der Hankel-Transformation ist, so bewirkt die Laplace-Transformation bei Vertauschung der Integrale formal einen Ersatz von  $x^{-s}$  durch  $p \int_0^\infty e^{-px} x^{-s} dx = p^s \Gamma(1-s)$ . G. Doetsch.

**Fortet, Robert:** Calcul des moments d'une fonction de répartition à partir de sa caractéristique. Bull. Sci. math., II. Sér. 68, 117—131 (1944).

Zu einer Verteilungsfunktion  $F(x)$  gehören die charakteristische Funktion  $\varphi(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} dF(x)$  und die Momente  $M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x)$ . Es wird untersucht, wie man aus  $\varphi(v)$  Existenz und Wert von  $M_n$  entnehmen kann. Wenn in einer Umgebung von  $v=0$  gilt:  $\varphi(v) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (iv)^k + o_n(v)$  mit  $\lim_{v \rightarrow 0} o_n(v) = 0$ , so existiert  $M_k$  und ist gleich  $a_k$  für  $k=1, \dots, n$  bei geradem  $n$ , und für  $k=1, \dots, n-1$  bei ungeradem  $n$ . G. Doetsch.

**Bang, Thøger:** Ein Momentenproblem. Mat. Tidsskr. B 1946, 77—82 (1946) [Dänisch].

Es werden Bedingungen dafür angegeben, daß es eine Funktion  $f$  mit  $-\infty < x < +\infty$  gibt, so daß die Gleichungen  $f^{(j_r)}(x_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_r(x) f^{(n)}(x) dx$ ,  $r=1, \dots, m$ , gelten. Dabei sind  $m, n, j_r$  mit  $0 \leq j_r < n$ ,  $x_r$  und  $K_r$  auf  $[-\infty < x < +\infty]$ ,  $r=1, \dots, m$ , vorgegeben. G. Aumann.

**Kjellberg, Bo:** Ein Momentenproblem. Ark. Mat. Astr. Fysik 29A, Nr. 2, 33 S. (1943).

In Verallgemeinerung der Ungleichung  $(\int |f| dx)^4 \leq (2\pi)^2 \int |f|^2 dx \int x^2 |f|^2 dx$  von Carlson [Ark. Mat. Astr. Fysik 25 B, Nr. 1 (1934); dies. Zbl. 9, 342] auf höhere Dimensionen werden Abschätzungen von  $\int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n$  durch Produkte

von Integralen der Form  $\int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n} f^2(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$  oder Potenzen davon bewiesen. G. Aumann.

**Geronimus, J.:** On the character of the solution of the moment-problem in the case of the periodic in the limit associated fraction. Izvestija Akad. Nauk SSSR. Ser. mat. 5, 203—210 (1941) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

**Achiezer, N. I.:** Unendliche Jacobische Matrizen und das Momentenproblem. Uspechi mat. Nauk 9, 126—156 (1941) [Russisch].



# Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

(1) Wassilkoff, D.: Partially ordered linear systems, Banach spaces and systems of functions. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **35**, 135–137 (1942).

(2) Wassilkoff, D.: Orderings of abstract sets and linear systems. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **7**, 203–236 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(3) Wassilkoff, Dimitry: On the theory of partially ordered linear systems and linear spaces. Ann. of Math., II. Ser. **44**, 580–609 (1943).

(1) announces without proofs the results of (2) and (3) overlapping partially. M. H. Stone has pointed out [s. his review of paper (3) in Math. Reviews **5**, 186 (1944)] that some results of (3) are incorrect, the same holds for (2). The papers deal with partial orderings of linear spaces, the lattice properties of the set of all orderings, special orderings (Archimedean, axial), positive linear functionals, and orderings of the adjoint space. *A. Alexiewicz.*

Gossiaux, Anne-Marie et Georges Papy: Un théorème sur les espaces du type  $F$ . Bull. Soc. roy. Sci. Liège **13**, 146–150 (1944).

Ein von Schauder [Studia Math. **2**, 1–6 (1930)] für normierte lineare Räume bewiesener Darstellungssatz wird auf neuem Wege allgemeiner für vollständige metrische lineare Räume ( $F$ -Räume) bewiesen: Es sei  $R$  eine in der offenen Kugel  $S$  dichte Menge. Jedes Element  $e$  aus  $S$  läßt sich dann in der Form  $e = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i r_i$  darstellen, wobei die  $\gamma_i$  positive reelle Zahlen mit  $\sum \gamma_i = 1$  und die  $r_i$  Elemente von  $R$  sind. *H.-J. Kowalsky.*

Siddiqi, Raziuddin: Sur les espaces hilbertiens hypercomplexes. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 1469–1470 (1946).

Einfache Übertragung bekannter Ergebnisse aus der Theorie der Hilbertschen Räume auf den Fall allgemeinerer Hilbertscher Räume über normierten hyperkomplexen Systemen. Die gedrängten Angaben lassen die Voraussetzungen nicht klar hervortreten. Da es sich aber bei den Operatorbereichen anscheinend um normierte Schiefkörper handelt, dürfte der Umfang dieser Verallgemeinerung durch den Satz von Frobenius stark eingeschränkt sein. *H.-J. Kowalsky.*

Braconnier, Jean: Sur les espaces vectoriels localement compacts. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 777–778 (1946).

Struktursätze über lokalkompakte Vektorräume über lokalkompakten, nicht diskreten und nicht notwendig kommutativen Körpern. Als Folgerung ergibt sich: Ein kompletter Vektorraum über einem Körper der oben bezeichneten Art ist genau dann lokalkompakt, wenn er endliche Dimension besitzt. Als Hilfsmittel werden Sätze über Moduln hinsichtlich der ganzen Elemente des Körpers bewiesen. *H.-J. Kowalsky.*

La Salle, J. P.: Application of the pseudo-norm to the study of linear topological spaces. Revista Ci. **47**, 545–563 (1945).

Im Anschluß an Hyers (dies. Zbl. **21**, 411) gibt Verf. eine neue Definition der Pseudo-Norm in linearen Räumen an, die mit der durch Hyers eingeführten äquivalent ist, die aber für die Definitionen und Beweise gewisse Vereinfachungen mit sich bringt. Während bei Hyers die Werte einer Pseudo-Norm in einem gerichteten System  $D$  liegen, benutzt Verf. als Wertebereich die Menge aller Paare  $(d, \alpha)$ , wobei  $d$  die Elemente von  $D$  und  $\alpha$  die positiven reellen Zahlen durchläuft. Diese anfängliche Komplikation ermöglicht es, die Axiome für die Pseudo-Norm in einer bequemer Form anzugeben, als es bei Hyers der Fall ist: An Stelle der von Hyers geforderten Stetigkeitseigenschaft tritt wieder eine Dreiecksungleichung. Die pseudo-normierten linearen Räume fallen mit den linearen topologischen

Räumen zusammen (Hyers). Verf. zeigt ausführlich, in welcher Weise die topologischen Begriffe und Sätze unter Verwendung der Pseudo-Norm entwickelt werden können. Hierbei werden besonders die linearen Funktionale berücksichtigt. Abschließend wird der Begriff des Differentials einer Abbildung mit Hilfe der Pseudo-Normen diskutiert.

*H.-J. Kowalsky.*

**James, R. C.: Linearly arc-wise connected topological Abelian groups.** Ann. of Math., II. Ser. 44, 93—102 (1943).

Kennzeichnung reeller linearer topologischer Räume durch topologische Eigenschaften ihrer additiven Gruppe. Als wesentliche Eigenschaft wird dabei der Zusammenhang durch Bogen benutzt. In einer additiven Gruppe wird ein linearer, den Punkt  $x$  mit 0 verbindender Bogen durch eine stetige Abbildung  $f$  der reellen Zahlen in die Gruppe gegeben, die folgende Eigenschaften besitzt:  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = x$ ,  $f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$ . Das wesentliche Ergebnis lautet: Eine additive topologische Gruppe ist genau dann ein linearer topologischer Raum, wenn sie zusammenhängend durch eindeutige lineare Bogen und lokal zusammenhängend durch lineare Bogen ist. Die Eindeutigkeitsforderung besagt dabei, daß es zu jedem Punkt  $x$  der Gruppe genau einen linearen Bogen gibt, der 0 und  $x$  verbindet. — Eine topologische Gruppe heißt konvex, wenn es zu jeder Umgebung  $U$  der Identität eine Umgebung  $V \subseteq U$  gibt, für die aus  $n x \in V$  stets  $x \in V$  folgt für alle natürlichen Zahlen  $n$ . Es gilt dann: Eine topologische abelsche Gruppe ist genau dann ein lokalkonvexer linearer Raum, wenn sie konvex und zusammenhängend durch lineare Bogen ist. — In ähnlicher Weise wird in einer topologischen Gruppe der Begriff der beschränkten Menge und der Norm eingeführt. Verf. zeigt dann schließlich: Eine durch lineare Bogen zusammenhängende topologische abelsche Gruppe ist genau dann normierbar, wenn sie konvex und lokalbeschränkt ist.

*H.-J. Kowalsky.*

**James, R. C.: Orthogonality in normed linear spaces.** Duke math. J. 12, 291—302 (1945).

In normierten linearen Räumen wurde von Roberts (dies. Zbl. 9, 169) eine Orthogonalitätsrelation vermöge folgender Definition eingeführt:  $x \perp y$  genau dann, wenn  $\|x + ky\| = \|x - ky\|$  für jede reelle Zahl  $k$ . Verf. zeigt an Hand eines Beispiels, daß es zweidimensionale normierte Räume gibt, in denen aus der Orthogonalität zweier Elemente  $x$ ,  $y$  folgt, daß  $x = 0$  oder  $y = 0$ . Derartige Trivialfälle werden bei den beiden nachstehenden, vom Verf. angegebenen Orthogonalitätsdefinitionen vermieden: (1)  $x \perp y$  genau dann, wenn  $\|x + y\| = \|x - y\|$  (isosceles orthogonality); (2)  $x \perp y$  genau dann, wenn  $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2$  (Pythagorean orthogonality). Die Eigenschaften dieser Orthogonalitätsbegriffe werden näher untersucht. Insbesondere ergibt sich: Die Orthogonalitätsrelationen (1), (2) und die Robertssche Orthogonalität sind im allgemeinen paarweise verschieden. In Euklidischen Räumen fallen sie alle drei zusammen. Besitzt (1) oder (2) zusätzlich noch die Eigenschaft der Homogenität oder der Additivität, so ist der Raum ein Euklidischer Raum, und die Norm kann durch ein skalares Produkt erzeugt werden. Vergl. hierzu auch Ohira (dies. Zbl. 48, 347).

*H.-J. Kowalsky.*

**Ficken, Frederick A.: Note on the existence of scalar products in normed linear spaces.** Ann. of Math., II. Ser. 45, 362—366 (1944).

Neben die bekannte Parallelogrammgleichung stellt Verf. eine zweite notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Norm eines (reellen oder komplexen) normierten linearen Raumes aus einem Skalarprodukt gewonnen werden kann. Diese Bedingung lautet: Ist  $\|P\| = \|Q\|$ , so soll für beliebige reelle Skalare  $a, b$  stets gelten  $\|aP + bQ\| = \|bP + aQ\|$ . Der Beweis erfolgt durch Zurückführung auf die Parallelogrammgleichung.

*H.-J. Kowalsky.*



Lorch, Edgar R.: The Cauchy-Schwarz inequality and self-adjoint spaces. Ann. of Math., II. Ser. 46, 468—473 (1945).

Sei ein reeller oder komplexer Banachraum,  $\mathfrak{B}^*$  der zugehörige konjugierte Raum. Für  $f \in \mathfrak{B}$ ,  $g^* \in \mathfrak{B}^*$  bezeichne  $(f, g^*)$  den Wert des Funktionals  $g^*$  an der Stelle  $f$ . Gibt es dann einen Isomorphismus  $T$  zwischen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}^*$  mit  $\|T\| = 1$  und  $(f, T f) = \|f\| \|T f\|$ , so gilt  $\|f\| = \|T f\|$ .  $(f, g) = (f, T g)$  ist dann ein skalares Produkt in  $\mathfrak{B}$ . Bei den Beweisen wird eine Verallgemeinerung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung benutzt.

H.-J. Kowalsky.

Goffman, Casper: On linear spaces which may be rendered complete normed metric spaces. Bull. Amer. math. Soc. 49, 611—614 (1943).

$S$  sei ein linearer Raum der Dimension  $d$  (beliebige Kardinalzahl). Verf. zeigt:  $S$  kann dann und nur dann durch Einführung einer geeigneten Norm zu einem vollständigen linearen Raum gemacht werden, wenn  $d$  nicht Limes einer abzählbaren Folge von vorangehenden Kardinalzahlen ist. Zum Beweis wird die allgemeine Kontinuumshypothese herangezogen.

H.-J. Kowalsky.

Schoenberg, I. J.: On local convexity in Hilbert space. Bull. Amer. math. Soc. 48, 432—436 (1942).

Eine Teilmenge  $M$  eines normierten Vektorraumes heißt lokalkonvex im Punkte  $p \in M$ , wenn es eine (offene) Kugelumgebung von  $p$  gibt, deren Durchschnitt mit  $M$  im gewöhnlichen Sinne konvex ist.  $M$  heißt schlechthin lokalkonvex, wenn es in jedem seiner Punkte lokalkonvex ist. Verf. verallgemeinert den folgenden Satz von Tietze auf den Fall, daß  $R$  der (reelle) Hilbertsche Raum ist: Eine abgeschlossene, zusammenhängende und lokalkonvexe Teilmenge des  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes ist auch im gewöhnlichen Sinne konvex. Der vom Verf. angegebene Beweis liefert auch für den endlich-dimensionalen Fall eine wesentliche Vereinfachung.

H.-J. Kowalsky.

Kakutani, Shizuo and George W. Mackey: Two characterizations of real Hilbert space. Ann. of Math., II. Ser. 45, 50—58 (1944).

Kakutani, Shizuo and George W. Mackey: Ring and lattice characterizations of complex Hilbert space. Bull. Amer. math. Soc. 52, 727—733 (1946).

Charakterisierung mit Hilfe des Verbandes der abgeschlossenen linearen Teilräume einerseits und andererseits mittels des Ringes aller stetigen linearen Abbildungen des Raumes in sich. Die beiden wesentlichen Ergebnisse lauten: (I) Ein vollständiger reeller Banachraum  $X$  ist genau dann zu einem allgemeinen reellen Hilbertraum isomorph, wenn der Verband  $L$  aller abgeschlossenen linearen Teilräume von  $X$  folgende Eigenschaft besitzt: Es existiert eine Abbildung  $M \rightarrow M'$  von  $L$  in sich, derart, daß (1) aus  $M_1 \perp M_2$  folgt  $M'_1 \perp M'_2$ , (2)  $M'' = M$  und (3)  $M' \perp M = 0$  für alle  $M \in L$  gilt. (II) Notwendig und hinreichend ist ebenso die folgende Eigenschaft des Ringes  $R$  aller stetigen linearen Abbildungen von  $X$  in sich: Es gibt eine Abbildung  $T \rightarrow T'$  von  $R$  in sich, die folgenden Forderungen genügt: (1)  $(T_1 + T_2)' = T'_1 + T'_2$ ,  $(T_1 T_2)' = T'_2 T'_1$ , (2)  $T'' = T$  und (3) aus  $T' T = 0$  folgt  $T = 0$ . — In der zweiten Arbeit wird bewiesen, daß diese Sätze eine genaue Übertragung auf den Fall unendlich-dimensionaler komplexer Banachräume gestatten. An Beispielen wird gezeigt, daß im endlich-dimensionalen Fall dies nicht möglich ist.

H.-J. Kowalsky.

Diendonné, Jean: Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym. II. Bull. Soc. math. France 72, 193—239 (1944).

Teil I der Arbeit s. dies. Zbl. 27, 112. Ein Rieszscher Raum ist ein reeller linearer halbgeordneter Raum  $E$ , in dem aus  $x \leq y$  stets  $x + z \leq y + z$  folgt und aus  $x \geq 0$ ,  $\lambda \geq 0$  stets  $\lambda x \geq 0$ . Ein Rieszscher Ring enthält noch eine zusätzliche kommutative Multiplikation mit  $\lambda(xy) = (\lambda x)y$  und  $\sup(xy, xz) = x \sup(y, z)$  für  $x \geq 0$ . Es gebe auf dem Rieszschen Ring  $E$  außerdem eine positive Linear-



form  $U$ , so daß aus  $U(x^2) = 0$  stets  $x = 0$  folgt. Notwendig und hinreichend für das Theorem von Lebesgue-Nikodym in  $E$  bezüglich  $U$  (jede positive Linearfunktion auf  $E$  kann in einen bezüglich  $U$  absolutstetigen und einen singulären Teil aufgespalten werden) ist a) die Bedingung (VIIa): Für jedes  $x \in E_+$  gilt  $U(x) = \sup_{y \in S} U(yx)$ ,

wobei  $S$  die Menge aller  $y \in E_+$  mit  $yx \leq x$  für alle  $x \in E_+$  ist; notwendig und hinreichend ist ferner b)  $E$  ist isomorph (als Rieszscher Ring) einem Rieszschen Ring aus Klassensummierbarer Funktionen auf einer Menge  $\Omega$  für ein Maß  $\mu$ , wobei für  $x \leftrightarrow X(\xi)$  gilt  $U(x) = \int_{\Omega} X(\xi) d\mu$ . Damit ist eine abstrakte Charakterisierung der Rieszschen

Ringe aus Funktionenklassen erreicht. Auch für den Fall, daß (VIIa) nicht gilt, wird ein Ersatz für das Theorem von Lebesgue-Nikodym gefunden und unter allgemeinen Voraussetzungen die Darstellung von  $E$  durch Rieszsche Ringe aus Funktionenklassen gegeben. G. Köthe.

**Bourgin, D. G.:** Some properties of Banach spaces. Amer. J. Math. 64, 597—612 (1942).

**Bourgin, D. G.:** Some properties of real linear topological spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 539—544 (1941).

**Bourgin, D. G.:** Linear topological spaces. Amer. J. Math. 65, 637—659 (1943).

Eine Menge  $M$  heißt  $s_z$ -kompakt, wenn sie die bekannte Durchschnittsbedingung für die Klassen von höchstens  $s_z$  abgeschlossenen Teilmengen erfüllt. Aus der schwachen  $s_z$ -Kompaktheit einer Teilmenge eines Banachraumes folgt die schwache  $s_z$ -Vollständigkeit, d. h. Vollständigkeit bezüglich gerichteter Cauchysysteme mit höchsten  $s_z$  Elementen. Die Beziehungen dieser Begriffe mit einer verallgemeinerten Helly-Eigenschaft werden untersucht und neue Kriterien für die Reflexivität eines Banachraumes daraus gewonnen. Diese Untersuchungen werden fortgesetzt bei R. S. Phillips [Amer. J. math. 65, 108—136 (1943)]. Die folgende Note ist die Vorankündigung der nächsten Arbeit, in der einige der Grundtatsachen der linearen topologischen Räume zum erstenmal allgemein formuliert werden, so z. B. daß die vollständige Hülle eines lokalkonvexen Raumes existiert und wieder ein lokalkonvexer Raum ist, daß jede abgeschlossene konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes  $L$  schwach abgeschlossen ist, die Bipolarität der konvexen Körper. Ergebnisse über die Metrisierbarkeit von  $L$  und des konjugierten Raumes  $L^*$ , schließlich ein Ausbau der von Hyers begonnenen Theorie der lokalbeschränkten topologischen Räume, in deren dualen Raum ebenfalls die Einheitskugel schwach kompakt ist, obwohl  $L$  nicht mehr lokalkonvex zu sein braucht. G. Köthe.

**Hyers, D. H. and S. M. Ulam:** On approximate isometries. Bull. Amer. math. Soc. 51, 288—292 (1945).

**Bourgin, D. G.:** Approximate isometries. Bull. Amer. math. Soc. 52, 704—714 (1946).

Eine Abbildung  $T$  eines (nicht notwendig separablen) Hilbertraumes  $E$  auf sich heißt eine  $\varepsilon$ -Isometrie, wenn gilt  $|\varrho(x, y) - \varrho(T(x), T(y))| \leq \varepsilon$  für alle  $x, y \in E$ ,  $\varrho(x, y)$  die Entfernung von  $x$  und  $y$ . Es ist dann, falls  $T(0) = 0$  gilt, die durch  $U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T(2^n x)/2^n)$  erklärte Abbildung linear und isometrisch, und  $U$  bildet ebenfalls  $E$  auf sich ab. Ferner gilt  $\|T(x) - U(x)\| \leq 10\varepsilon$  in  $E$ , d. h. die  $\varepsilon$ -Isometrie ist durch eine lineare Isometrie approximierbar. In der Arbeit von Bourgin wird dieses Resultat von Hyers und Ulam mit  $12\varepsilon$  an Stelle von  $10\varepsilon$  für die Räume  $L^p[0, 1]$  mit  $0 < p < \infty$  bewiesen unter Benützung der uniformen Konvexität. Das Resultat gilt ferner noch für  $\varepsilon$ -Isometrien eines beliebigen (B)-Raumes auf eine gewisse Klasse uniform konvexer (B)-Räume. G. Köthe.

Hyers, D. H.: Linear topological spaces. Bull. Amer. math. Soc. 51, 1—21 (1945).

Bericht über topologische lineare Räume. Behandelte Probleme: Metrisierbarkeit, lokalbeschränkte Räume und Quasinorm. Fixpunktsätze (Schauder, Tychonoff, ein eigener Satz des Autors), Pseudonormen, Differentiale, verschiedene Beschränktheitsbegriffe.

G. Köthe.

Hyers, D. H.: Locally bounded linear topological spaces. Revista Ci. 41, 555—574 (1939).

Aoki, Tosio: Locally bounded linear topological spaces. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 588—594 (1942).

Ein linearer topologischer Raum  $E$  heißt lokalbeschränkt, wenn er eine beschränkte offene Menge enthält. Hyers untersucht die Eigenschaften dieser Räume, so läßt sich z. B. die Rieszsche Theorie der vollstetigen Operatoren darauf übertragen. Von Aoki wird ein Resultat von Hyers verschärft; er zeigt, daß die Topologie von  $E$  auch durch einen Absolutbetrag  $|x|$  (später als Quasinorm bezeichnet) gegeben werden kann, der alle Eigenschaften der Norm besitzt, nur daß statt der Summenungleichung gilt  $|x + y| \leq k(|x| + |y|)$ ,  $k$  eine feste Konstante.

G. Köthe.

Nakano, Hidegorô: Eine Spektraltheorie. Proc. phys.-math. Soc. Japan, III. Ser. 23, 485—511 (1941).

Nakano, Hidegorô: Über ein lineares Funktional auf dem teilweise geordneten Modul. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 548—552 (1942).

Nakano, Hidegorô: Stetige lineare Funktionale auf dem teilweise geordneten Modul. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I. 4, 201—382 (1942).

Nakano, Hidegorô: Riesz-Fischerscher Satz im normierten teilweise geordneten Modul. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 350—353 (1942).

Der Inhalt der ersten Note ist ausführlich wiedergegeben in Kap. III des Buches des Verf. „Modern spectral theory“ (vgl. dies. Zbl. 41, 234). Dasselbe gilt für den Hauptteil der zweiten Arbeit, der in Kap. II, VII, VIII wiederzufinden ist. Weitere Ergebnisse über halbgeordnete Banachräume: Es werden Bedingungen angegeben, wann der konjugierte Raum bezüglich der Halbordnung mit dem konjugierten Banachraum zusammenfällt. Es wird eine abstrakte Charakterisierung der  $L^p[0, 1]$  und  $l^p$  als gewisse halbgeordnete Banachräume angegeben. Die dritte Note gibt eine Klasse halbgeordneter Vektorräume an, die die  $L^p$  umfaßt, und beweist, daß diese Räume nicht als halbgeordnete Vektorräume aus reellen Funktionen dargestellt werden können. In der letzten Note werden zwei Sätze über die Vollständigkeit bezüglich der Norm aus der bedingten Ordnungsvollständigkeit eines halbgeordneten normierten Raumes abgeleitet. G. Köthe.

Nakano, Hidegorô: Über das System aller stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 308—310 (1941).

Nakano, Hidegorô: Über die Charakterisierung des allgemeinen  $C$ -Raumes. I, II. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 301—307 (1941); 18, 280—286 (1942).

Nakano, Hidegorô: Über normierte teilweise geordnete Moduln. Proc. imp. Acad. Tokyo 17, 311—317 (1941).

$C(R)$  bedeute den normierten Raum aller auf  $R$  stetigen reellwertigen Funktionen,  $C_0(R)$  den Teilraum aller in einem festen Punkt verschwindenden solchen Funktionen. In der ersten Note wird gezeigt, daß ein vollständig regulärer Raum  $R$  dann und nur dann extremal ist (d. h. die abgeschlossene Hülle jeder offenen Menge ist wieder offen), wenn jede Menge nichtnegativer  $f \in C(R)$  eine größte untere Schranke  $f_0 \in C(R)$  besitzt. In den beiden nächsten Noten wird bewiesen: Ist  $M$  ein reeller Vektorverband, in dem eine Norm  $\|a\|$  erklärt ist mit den Eigenschaften a) aus  $a \leq b$  folgt  $\|a\| \leq \|b\|$ , b)  $\|(|a| - |b|)\| = \max(\|a\|, \|b\|)$ , c) für eine Menge  $\{a_i\}$  gilt stets  $\sup \|a_i\| = \inf \|b\|$ ,  $b = a_i$ , so ist  $M$  als normierter

Vektorverband isomorph einem  $C(R)$  oder  $C_0(R)$ ,  $R$  ein bikompakter Hausdorffscher Raum. Die Ergebnisse finden sich wiedergegeben in § 41 bzw. § 39 des Buches des Verf. „Modern spectral theory“ (dies., Zbl. 41, 234). Die letzte Note enthält Sätze über die Darstellbarkeit von Vektorverbänden, in denen abgeschwächte Normen erklärt sind, durch Ringe stetiger Funktionen, deren  $k$ -te Potenz integralabel ist, auf einem lokalkompakten Hausdorffschen Raum. *G. Köthe.*

**Nakano, Hidegorô:** Über Erweiterungen von allgemein teilweise geordneten Moduln. I, II. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 626—630 (1942); 19, 138—143 (1943).

Es sei  $\mathfrak{A}$  ein halbgeordneter Vektorraum, der gewissen weiteren Voraussetzungen genügt. Durch Bildung des Raumes  $\widehat{\mathfrak{A}}$  aller beschränkten Funktionale auf  $\mathfrak{A}$  und des Raumes  $\mathfrak{B}$  aller stetigen linearen Funktionale auf  $\widehat{\mathfrak{A}}$  erhält man eine Erweiterung  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{A}$ . Mit diesem Verfahren kann eine beliebige Boolesche Algebra  $A$  so in eine stetige Boolesche Algebra  $B$  eingebettet werden, daß jedes endlichadditive Maß auf  $A$  sich in ein totaladditives auf  $B$  fortsetzt. *G. Köthe.*

**Nakano, Hidegorô:** Über Struktur von Spektren im allgemeinen Euklidischen Raum. Proc. phys.-math. Soc. Japan, III. Ser. 23, 871—882 (1941).

**Nakano, Hidegorô:** Über Einführung der teilweisen Ordnung im reellen Hilbertschen Raum. Proc. phys.-math. Soc. Japan, III. Ser. 26, 1—8 (1944).

Ein abelscher Ring von Projektionen  $E$  eines nichtseparablen Hilbertraumes heißt einfach, wenn er aufgefaßt werden kann als der Ring der  $E(Z)$ , wobei die  $Z$  ein festes Ideal eines Mengensystems durchlaufen. Es wird die Frage untersucht, wann ein beliebiger abelscher Ring in einfache zerlegt werden kann. In der zweiten Note wird zu einem einfachen abelschen Ring eine halbgeordnete Menge angegeben, aus der ebenfalls der Ring wieder abgeleitet werden kann. *G. Köthe.*

**Kakutani, Shizuo:** Concrete representation of abstract  $(M)$ -spaces. (A characterization of the space of continuous functions.) Ann. of Math., II. Ser. 42, 994—1024 (1941).

A characterization of a class of Banach lattices, called the abstract  $M$ -spaces. This are Banach lattices denoted  $(AM)$ , satisfying the following additional postulates: (a) if  $x_n \geq y_n$ ,  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ , then  $x \geq y$ , (b) if  $x \wedge y = 0$ , then  $\|x + y\| = \|x - y\|$ , (c) if  $x \geq 0$  and  $y \geq 0$ , then  $\|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ . The element  $1$  is said to be the unit of  $(AM)$  if  $1 \geq 0$ ,  $\|1\| = 1$ , and  $\|x\| \leq 1$  implies  $x \leq 1$ . Given a compact Hausdorff space  $\Omega$ , elements  $t_x, t'_x \in \Omega$ , and reals  $\lambda_x (0 \leq \lambda_x \leq 1)$  the author denotes by  $C(\Omega)$  the space of continuous functions  $x(t)$  in  $\Omega$  and by  $C(\Omega; t_x, t'_x, \lambda_x)$  its subspace composed of those elements for which  $x(t_x) = \lambda_x x(t'_x)$ . The main theorems: (I) for every space  $(AM)$  there exists a compact Hausdorff space  $\Omega$  such that  $(AM)$  is isometric and lattice-isomorphic with a space  $C(\Omega; t_x, t'_x, \lambda_x)$ , (II) if  $(AM)$  has the unit, then it is isometric and lattice-isomorphic with the space  $C(\Omega)$ . As the space  $\Omega$  the author introduces the closure in the  $*$ -weak topology [of the space conjugate to  $(AM)$ ] of the set  $\Omega'$  of positive linear bounded functionals  $f$  of norm 1 satisfying the condition  $x \wedge y = 0$  implies  $f(x)f(y) = 0$ . Then every element  $x \in (AM)$  defines a continuous function  $x(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$  on  $\Omega'$ , and the mapping  $x \rightarrow x(f)$  is the isometry-isomorphism of (I) and (II). It is shown that two compact Hausdorff spaces  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  are homeomorphic if and only if the spaces  $C(\Omega_1)$  and  $C(\Omega_2)$  are isometric and lattice-isomorphic. As application the author gives first a proof of the compactification theorem of E. Čech (every completely regular Hausdorff space  $\Omega'$  may be embedded into a compact Hausdorff space  $\Omega$  in such a manner that  $\Omega'$  is dense in  $\Omega$  and that every bounded continuous function on  $\Omega'$  has an unique extension on  $\Omega$ ). There is shown that every bounded linear functional on  $C(\Omega)$  is of the form  $f(x) = \int_{\Omega} x(t) \mu(dt)$  where  $\mu$  is a  $\sigma$ -additive set function defined for all Borel subsets of  $\Omega$ ; the additional require-



ment that the function  $\mu$  be regular determines it uniquely. As another application, the author gives a proof of Stone's theorem of representation of Boolean algebras as algebras of open-and-closed subsets of a totally disconnected compact Hausdorff space  $\Omega$ . There are pointed out also some relations with Banach-limits. Finally the author shows that the conjugate space of  $(AM)$  is an abstract  $L$ -space (this *Zbl.* 27, 111) and that the conjugate of an abstract  $L$ -space is an abstract  $M$ -space. Some of the results of the author have been obtained also by M. and S. Krein (see the following review).

*A. Alexiewicz.*

Krein, Mark et Selim Krein: Sur l'espace des fonctions continues définies sur un bicompat de Hausdorff et ses sous-espaces semiordonnés. *Mat. Sbornik*, n. Ser. 13 (55), 1—38 (1943) [Französisch mit russ. Zusammenfassg.].

[See the preceding review.] In this paper there are characterized Banach lattices  $X$  non-necessarily metrically-complete satisfying the conditions (a) if  $x > 0, y > 0$ , then  $\|x + y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ , (b)  $\|x\| = \|x_+ \vee x_-\|$  for every  $x$ . Denoting by  $C(Q)$  the space of all continuous functions in a Hausdorff space  $Q$ , the authors show that for every space of considered type there exists a compact Hausdorff space  $Q$  such that  $X$  is isometric and lattice-isomorphic with a subspace  $Z$  of  $C(Q)$  having the property that (\*) if  $z(q) \in Z$ , then  $|z(q)| \in Z$ . In this representation,  $Q$  is the closure [in the \*-weak topology of the space conjugate to  $X$ ] of the set  $Q'$  of the extreme points of the set of all positive bounded linear functionals on  $X$ , of norm 1. The very isometry-isomorphism is given by formula  $x \rightarrow F_x(j) = j(x)$  where  $j \in Q$ . The set  $Q'$  is characterized also as the set of those elements of the conjugate space which are of norm 1 and satisfy the condition (\*) if  $0 \leq h \leq f$ , then  $h = cf$  with  $c \geq 0$ . Then there are established some properties of the subspaces  $Z \subset C(Q)$  which satisfy the condition (\*):  $Z$  is dense in  $C(Q)$  if and only if for arbitrary different elements  $q_1, q_2 \in Q$  there is a  $z \in Z$  such that  $z(q_1) \neq z(q_2)$ ; a bounded linear functional on  $Z$  satisfies the condition (\*) if and only if  $j(x) = \gamma x(q_0)$  with  $\gamma$  and  $q_0$  such that  $\sup_{q \in C(Q)} |x(q_0)| > 0$ , and  $\gamma > 0$ ; if  $Z_1$  and  $Z_2$  denote two dense subspaces of such type  $Z_1 \subset C(Q_1), Z_2 \subset C(Q_2)$ , then  $Q_1$  and  $Q_2$  are homeomorphic if the spaces  $Z_1$  and  $Z_2$  are isometric and lattice-isomorphic. If the space  $X$  contains an element  $u > 0$  such that the set  $E = \{t | t > 0, -tu < x < tu\}$  is non-empty for every  $x$  and  $\inf E > 0$ , then the image of the space  $X$  is dense in  $C(Q)$ . Finally, the authors characterize the separable abstract  $L$ -spaces.

*A. Alexiewicz.*

Smiley, M. F.: A remark on S. Kakutani's characterization of  $(L)$ -spaces. *Ann. of Math.*, II. Ser. 43, 528—529 (1942).

Axiom (IX) für einen  $(AL)$ -Raum (vgl. S. Kakutani, dies. *Zbl.* 27, 111) wird durch Axiom (IX'):  $\|x - y\| = \|x_+ - y_+ - x_- + y_-\|$  ersetzt und (V) als ebenfalls nachgewiesen.

*G. Köthe.*

Yosida, Kôzaku and Tadasî Nakayama: On the semi-ordered ring and its application to the spectral theorem. I, II. *Proc. imp. Acad. Tokyo* 18, 555—560 (1942); 19, 144—147 (1943).

These papers deal with the representation theory of semi-ordered rings and its application to the spectral representations of a set of mutually commutative bounded self-adjoint operators in a Hilbert space. Firstly the following representation theorem is proved. Let  $R$  be a semi-ordered ring with real multipliers possessing a ring-unit  $e$  which is at the same time an Archimedian unit. Suppose further that  $-\varepsilon e \leq x \leq \varepsilon e$  for every  $\varepsilon > 0$  implies  $x = 0$ . Neither the commutativity nor the associativity of the multiplication is assumed. But  $R$  is ring-isomorphic to a certain ring  $R(M)$  of real-valued bounded functions over a space  $M$  so that  $e$  corresponds to 1. In particular,  $R$  is both commutative and associative. If  $x \leq \varepsilon e$  for every  $\varepsilon > 0$  implies  $x \leq 0$ , then this isomorphism is order-preserving. If  $R$  is

a Banach space by the norm  $\|x\| = \inf \alpha (-\alpha e \leq x \leq \alpha e)$ , then  $R$  is ring-isomorphic to  $R(M)$  for a bicomact Hausdorff space  $M$ . This gives also the representation theorem of abstract  $(M)$ -spaces of S. Kakutani (see this Zbl. 60, 266). Moreover, if a ring  $R$  satisfies the condition that for any increasing sequence  $\{x_n\}$  bounded from above  $\sup x_n = \text{order-limit of } x_n$  exists in  $R$ , then we have a unique resolution of identity  $\{e_\lambda\}$  and the spectral representation of  $x = \int \lambda de_\lambda$ . This last theorem can be applied to the ring  $T''$  where  $T'$  is a set of mutually commutative, bounded self-adjoint operators in a Hilbert space  $H$  by introducing the semi-order  $T \geq 0$  by  $(Tf, f) \geq 0$  for all  $f \in H$ . Thus we get the usual theorem of the spectral representation. These methods are also applicable to determine the ring of bounded automorphisms of an semi-ordered abelian group. The method used here relates to the papers of M. H. Stone [Proc. nat. Acad. Sci. USA 26, 280—283 (1940); 27, 83—87 (1941)] and of Vernikoff, Krein and Tovbin (this Zbl. 24, 414).

Y. Kawada.

**Yosida, Kôzaku:** Normed rings and spectral theorems. I—VI. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 356—359, 466—470; 20, 71—73, 183—185, 269—273, 580—583 (1944).

In I the author proved the spectral theorem from the standpoint of the theory of normed rings. Let  $A$  be a commutative, conjugated (i. e.  $T^* \in A$  if  $T \in A$ ) set. Then  $R = A''$  is a commutative, conjugated ring with unit and with complex multipliers. Moreover,  $R$  is a normed ring with respect to the norm  $\|T\|$  and is closed in strong topology.  $R$  is semi-simple, and  $R$  can be ring-isomorphically and isometrically represented by a function-ring  $R(M)$  of complex-valued continuous functions  $\{T(M)\}$  on a bicomact space  $M$ .  $T(M)$  is real-valued if and only if  $T$  is hermitian and  $T(M)$  is non-negative on  $M$  if and only if  $T$  is non-negative definite. Also let  $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq cI$  in  $R$  and  $T = \lim T_n$ . Then  $T(M) = \lim T_n(M)$  holds on  $M$  except possibly on a set of 1st category. From this we can easily derive the spectral resolution of  $I$  for  $A$ . In II the author considered Fredholm-Riesz-Schauder's theory of completely continuous (c. c.) functional equation by the methods of normed rings. Let  $V$  be a c. c. linear operator on a complex Banach space  $E$ . Let  $R$  be the commutative ring generated by  $V$  and by the identity  $I$  completed with respect to norm. Let  $R^*$  be the ring of conjugate operators  $T^*$  of  $T \in R$  on the conjugate space  $E^*$  of  $E$ . Then  $R$  and  $R^*$  are linearly isomorphic and isometric rings. Let  $R$  be homomorphically represented by the ring of complex-valued functions  $T(M)$  on the space  $M$  of all maximal ideals of  $R$ . Then the range  $R(V)$  of the function  $V(M)$  coincides with the spectrum of  $V$  and hence the spectra of  $V$  and  $V^*$  are the same. Any complex number  $\neq 0$  of the spectra of  $V$  is a proper value of  $V$ , so the spectrum of  $V$  is countable with at most 0 as the limiting value. For each proper value  $\lambda$  of  $V$  we can decompose  $R = RI_\lambda + R(I - I_\lambda)$  such that  $(I - \lambda V)(I - I_\lambda)$  admit an inverse on  $R(I - I_\lambda)$  and  $(I - \lambda V)I_\lambda$  is nilpotent.  $RI_\lambda$  is isomorphic to a commutative matrix ring over a finite-dimensional space  $I_\lambda E$ . From these considerations  $V^*$  and  $V$  have the same proper values and the dimension of these proper spaces are the same. Finally the author proved that the above results hold also for a linear operator  $V$  such that  $V^n$  is c. c. for some  $n > 1$ . This was first pointed out by Nikolski [C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 16, 315—319 (1926)]. In III the author proved some formulas concerning the maximal spectrum of a positive definite, bounded, self-adjoint operator  $T$  in a Hilbert space  $H$ :  $\lambda_1 \|f\|^2 \leq (Tf, f) \leq \lambda_0 \|f\|^2$ ,  $f \in H$ ,  $\lambda_0 > 0$ . Let  $T = \int \lambda dE_\lambda$ ,  $\mu = \inf \{\lambda; E_\lambda \cdot f_0 = f_0, \|f_0\| = 1\}$  for an element  $f \in H$ . If we represent the ring of bounded linear operators  $R \in T''$  ring-isomorphically and linear-isometrically by the functions  $\{T(M)\}$  on the compact space of all maximal ideals of  $R$  then  $\mu$

is the maximal spectrum of the representation  $F(T) = \int T(M) q(M) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda d\tau(\lambda)$

where  $F(T) = (T f_0, f_0)$  and  $\eta$  is a measure on  $M$  determined by  $F$ . Then we get, among others,  $\lim_{n \rightarrow \infty} [F(T^{2n})/F(T^{2(n+1)})]^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(T^{2(n+1)})/F(T^{2(n+2)})]^{1/2} = \mu^{-1}$  and  $0 < F(T^{2n+1})/F(T^{2(n+1)}) = \mu^{-1} = \tau(\mu)^{-1/2} F(T^{2n})/F(T^{2(n+1)}) = F(T^{2(n+1)})^2 F(T^{2(n+1)})^{2(1/2)}$ . These are refinements of results of Temple [Proc. London math. Soc. 29, 257 (1929)] and Collatz (this Zbl. 23, 235). In IV the author considered the evaluation of the next maximal spectrum  $\mu^{(1)}$  of  $F$  referring to  $T$  under the assumption that  $\tau(\cdot)$  is constant except  $\mu$  and  $\mu^{(1)}$  ( $\mu^{(1)} < \mu$ ) in an interval  $(\mu^{(1)} - \varepsilon, \mu)$ . These are obtained by considering a new functional  $F^{(1)}(S) = F[(\mu I - T)S]/F(\mu I - T)$  on the ring of continuous functions on  $M$ . In V and VI the author considered the Krein-Weil's generalization of Plancherel's theorem on a locally compact abelian group  $G$ . The proof is similar to that of Krein (this Zbl. 24, 416). The author considered the normed ring  $R$  which is obtained by adjoining formally a unit to  $L_1(G)$ , and in several points he simplified and supplemented the proof of Krein.

*Y. Kawada.*

**Arens, Richard:** The space  $L^\infty$  and convex topological rings. Bull. Amer. math. Soc. 52, 931—935 (1946).

Début de la théorie des algèbres localement convexes. Définition de  $\sum a_n f^n$ , pour  $f$  dans une telle algèbre,  $\sum a_n z^n$  étant une fonction entière. Exemple d'une algèbre localement convexe commutative non normable.

*J. Dixmier.*

**Neumann, John von:** On some algebraical properties of operator rings. Ann. of Math., II. Ser. 44, 709—715 (1943).

Caractère purement algébrique dans un anneau d'opérateurs de diverses notions, notamment la convergence forte ou faible des suites.

*J. Dixmier.*

**Murray, F. J. and J. von Neumann:** On rings of operators. IV. Ann. of Math., II. Ser. 44, 716—808 (1943).

(III<sup>me</sup> partie v. J. v. Neumann, ce Zbl. 23, 133). 1) Caractérisation du type spatial d'un facteur  $M$  de type II à l'aide des types algébriques de  $M$  et  $M'$ , et d'un nombre réel. 2) Pour  $M$  de type II<sub>1</sub>, définition du type algébrique  $M^\theta$ ,  $\theta$  réel (pour  $\theta$  entier, il s'agit de l'algèbre des matrices à  $\theta$  lignes et  $\theta$  colonnes, à éléments dans  $M$ , réalisée comme facteur). 3) Un facteur  $M$  de type II<sub>1</sub> est dit approximativement fini s'il existe une suite croissante de facteurs de dimension (au sens élémentaire) finie, contenus dans  $M$ , engendrant  $M$ . Existence de tels facteurs, unicité de leur type algébrique, existence de facteurs de type II<sub>1</sub> non approximativement finis. 4) Nouvelle construction de facteurs de type II<sub>1</sub>: on prend un groupe discret  $G$  dans lequel toute classe non triviale est infinie, et les anneaux d'opérateurs engendrés par la double représentation régulière de  $G$ .

*J. Dixmier.*

**Arnold, B. H.:** Rings of operators on vector spaces. Ann. of Math., II. Ser. 45, 24—49 (1944).

Soit  $V$  un espace vectoriel complexe, muni d'une famille  $F$  de formes linéaires. On s'intéresse à la structure définie sur  $V$  par les ensembles bornés pour toute  $f \in F$ . Deux telles structures sont isomorphes si les anneaux d'opérateurs bornés correspondants sont isomorphes. L'A. introduit diverses topologies sur  $R$ , par exemple la topologie finie ( $A_x = A$  si, pour tout  $x \in V$ ,  $A_x x = A x$  pour  $x$  assez grand). Complétion de  $R$ . Conditions pour que  $V$  soit un dual.

*J. Dixmier.*

**Dieudonné, Jean:** Sur l'anneau des endomorphismes continus d'un espace normé. C. r. Acad. Sci., Paris 216, 713—715 (1943).

Soit  $E$  un espace normé réel (resp. complexe). Soit  $R$  l'anneau des endomorphismes continus de  $E$ . Un automorphisme de  $R$  est de la forme  $T \mapsto A^{-1} T A$ , avec  $A$  dans  $R$  (resp.  $A$  dans  $R$  ou  $A$  semi-linéaire bicontinu).

*J. Dixmier.*

**Ambrose, Warren:** Structure theorems for a special class of Banach algebras. Trans. Amer. math. Soc. 57, 364—386 (1945).

L'A. définit ce qu'on appelle maintenant une algèbre hilbertienne complète. Structure d'une telle algèbre  $A$ . Exemples: 1) l'algèbre des opérateurs d'Hilbert-



Schmidt sur un espace hilbertien (toute algèbre  $A$  est somme directe en un certain sens de telles algèbres). 2) l'algèbre  $L^2$  (pour la convolution) d'un groupe compact.

*J. Dixmier.*

**Kondô, Motokiti:** Les anneaux des opérateurs et les dimensions. I, II. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 389—398, 689—693 (1944).

**Kondô, Motokiti:** Sur les sommes directes des espaces linéaires. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 425—431 (1944).

**Kondô, Motokiti:** Sur la réductibilité des anneaux des opérateurs. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 432—438 (1944).

**Orihara, Masae:** Sur les anneaux des opérateurs. I, II. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 399—405, 545—553 (1944).

These papers consider rings of operators of F. J. Murray and John von Neumann on general spaces but in somewhat formal manners. *K. Yosida.*

**Matsuyama, Noboru:** On locally convex topological spaces. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 585—587 (1942).

Let  $L$  be a linear space with pseudo-norm  $|x|_d$  defined for  $x \in L$  and for  $d \in$  a directed system  $D$ . Let  $L^*$  be the space of additive continuous functionals  $f$  on  $L$ , and let  $L^*$  be the subspace of those  $f$  in  $L^*$  for which  $|f|_d = \sup |f(x)|/|x|_d$  is finite. The conjugate space  $L^{**}$  of  $L^*$  is defined to be the set of all additive functionals on  $L^*$  which are continuous on every  $L^*$ . Then the natural mapping  $x \rightarrow X$  ( $X(f) = f(x)$  for all  $f \in L^*$ ) is a linear mapping of  $L$  into  $L^{**}$  which preserves the pseudo-norm, the pseudo-norm of  $X$  being defined by  $|X|_d = \sup |X(f)|/|f|_d$ .

*K. Yosida.*

**Gelfand, I. and M. Neumark:** On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. Mat. Sbornik, n. Ser. 12 (54), 197—213 (1943).

The paper has a fundamental character. The authors give a representation theory of those Banach algebras  $R$  with unit  $e$  in which there is defined an operation  $x \rightarrow x^*$  ( $x^*$  being called the adjoint of  $x$ ) such that (a)  $(x + y)^* = x^* + y^*$ , (b)  $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$ , (c)  $x^{**} = x$ , (d)  $(xy)^* = y^* x^*$ , (e)  $\|x^* x\| = \|x^*\| \|x\|$ , (f)  $\|x^*\| = \|x\|$ , (g)  $(e + x^* x)^{-1}$  exists for every  $x$ . Such algebras are called by the authors the  $*$ -rings, and now usually the  $*$ -algebras. The main theorem (MT) states that for every  $*$ -algebra there exists a Hilbert space  $H$  such that the algebra is isometric and algebra-isomorphic with a subalgebra of the algebra  $B$  of all bounded linear operators in  $H$ , this isomorphism being such that if  $T \in B$  corresponds to  $x$ , then  $T^*$  corresponds to  $x^*$ . Let  $x \rightarrow x(M)$  be the Gelfand homomorphism of a commutative algebra into the space  $C(\mathfrak{M})$  of continuous functions on the space  $\mathfrak{M}$  of maximal ideals. The authors prove also: (T) if the algebra satisfies the conditions (a)—(e), then the homomorphism  $x \rightarrow x(M)$  is an isometry-isomorphism onto  $C(\mathfrak{M})$ , such that  $x^* \rightarrow \overline{x(M)}$ . An element  $h$  is called Hermitean if  $h = h^*$ ; every element has an unique representation  $x = h_1 + i h_2$  where  $h_1, h_2$  are Hermitean. The spectrum of every Hermitean element is real; this enables to call an element positive if it is Hermitean and its spectrum is positive. The sum of two positive elements is positive, and the product — if the first factor is regular. Every positive element has a square root. The proof of (MT) is based on the following idea. First, the algebra is supposed to be simple. A maximal left ideal  $M$  is chosen, and by  $H'$  is denoted the space  $R/M$  of equivalence classes modulo  $M$ . The authors construct a linear functional  $f$  such that  $f(x^*) = \overline{f(x)}$ ,  $f(x) \geq 0$  for positive  $x$ ,  $f(e) = 1$ ,  $f(x) = 0$  on  $M$ , and define the scalar product for  $\xi, \eta \in H'$  as  $(\xi, \eta) = f(y^* x)$  where  $x \in \xi$ ,  $y \in \eta$ . The space  $H'$  is shown to be a (non-necessarily complete) Hilbert space. The space  $H$  of (MT) is the completion of  $H'$ . Now  $a$  being an element of  $R$ , denote by  $A_a$  the mapping  $\xi \rightarrow a \xi$  of  $H$  into  $H$  ( $a \xi$  defined as usual); it is proved that  $(A_a \xi, A_a \xi) \leq \|a\|^2 (\xi, \xi)$ , whence  $A_a$

is a linear bounded operator on  $H$ . The mapping  $a \mapsto A_a$  is the desired isomorphism. If  $R$  is not simple, then, first, for every maximal left-ideal  $M$  the space  $H = H_M$  is to be constructed by the above device; in this case denote the operation  $A_a$  by  $A_a^M$ . Then  $H$  is defined as the direct sum of all  $H_M$ 's and  $A_a$  is defined as  $A_a\{\xi_M\} = \{A_a^M \xi_M\}$ . The isomorphism of (MT) is then  $a \mapsto A_a$ . Finally, the authors establish some properties of weakly closed self-adjoint subrings  $R$  of  $B$ , in terms of the factorization theory of Murray and v. Neumann (this Zbl. 14, 161).  $R$  is called the factor if its centre consists only of scalar multiples of the unit (for the definitions of other terms see the above cited paper). Every factor of class  $I_n$  ( $n$ -finite) is simple, and so is also every factor of class III. If  $R$  is simple,  $R$  is a factor. However, every factor  $R$  of class  $I_\infty$  or  $II_\infty$  if  $H$  is a separable Hilbert space is not simple; it has only one non-trivial two-sided ideal closed in the uniform topology, which is identical with the closure (in the uniform topology) of the smallest two-sided ideal containing all finite projections. If the Hilbert space is separable,  $R$  is simple if and only if  $R$  is a factor of class  $I_n$ ,  $II_1$ , or III.

*A. Alexiewicz.*

**Arens, Richard:** On a theorem of Gelfand and Neumark. Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 237—239 (1946).

The theorem (T) in the preceding review was proved by aid of a theorem of Šilov stating that for every algebra satisfying the conditions of this theorem there exists an unique minimal closed set  $\mathfrak{M}_0$  in  $\mathfrak{M}$  such that  $\sup_{\mathfrak{M}} |x(t)| = \sup_{\mathfrak{M}_0} |x(t)|$  for every  $x \in R$ . The paper of Šilov was inaccessible. The author gives a direct and very elegant proof of the theorem (T).

*A. Alexiewicz.*

**Raikov, D. A.:** To the theory of normed rings with involution. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 54, 387—390 (1946).

This paper generalizes some results of Gelfand and Neumark (see the two preceding reviews). The author deals with normed algebras  $X$  non-necessarily complete, with unit, and with an operation  $x \rightarrow x^*$  (called the involution) satisfying the postulates (a)  $(x + y)^* = x^* + y^*$ , (b)  $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$ , (c)  $x^{**} = x$ , (d)  $(xy)^* = y^* x^*$ . (For the definitions of the concepts used below see the quoted reviews.) A linear functional is called positive if  $f(x x^*) \geq 0$  for every Hermitean  $x$ ; every positive functional  $f$  may be extended to the whole of  $X$  by setting  $f(x) = f[\frac{1}{2}(x + x^*)] + i f[\frac{1}{2}(x - x^*)]$ . The involution is said to be essential if for every  $x$  there exists a positive functional  $f$  such that  $f(x^* x) > 0$ . Every essential involution is continuous. Every algebra with essential involution can be renormed so as  $\|x\| = \|x^*\|$ . Any algebra with essential involution is semi-simple. The algebra is called symmetric if the element  $e - x^* x$  is regular for every  $x$ . In a semi-simple symmetric algebra every involution is essential. An algebra with continuous involution is symmetric if and only if  $\sup f(x^* x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|(x^* x)^n\|}$ , the supremum being taken over all positive linear functionals for which  $f(e) = 1$ . As example of an algebra with essential involution may serve the group algebra of a locally compact group. There exist non-symmetric algebras with essential involution. *A. Alexiewicz.*

**Rickart, C. E.:** Banach algebras with an adjoint operation. Ann. of Math., II. Ser. 47, 528—550 (1946).

The paper is concerned with Banach algebras with involution  $x \mapsto x^*$  such that  $\|x x^*\| = \|x\|^2$ . The basic tool is the use of the projections i. e. Hermitean idempotents ( $u^2 = u$ ). The major part deals with algebras (called the  $B_p^*$ -algebras) such that for every Hermitean element  $h$  there is a projection  $u$  such that  $h u = h$ , and  $h k = 0$  for any Hermitean  $k$  implies  $u k = 0$ . This condition ensures that the algebra has sufficiently many projections. In every commutative  $B_p^*$ -algebra the projections form a  $\sigma$ -lattice, any  $B_p^*$ -algebra is generated by its projections.

An element  $x$  is called relatively regular if there exists a  $z$  such that  $xzx = x$ . The relatively regular elements form a dense set in every non zero ideal of a  $B_p^*$ -algebra. The principal result of the paper gives necessary and sufficient conditions for a  $B_p^*$ -algebra to be simple. *A. Alexiewicz.*

**Lorch, Edgar, R.:** The structure of normed Abelian rings. *Bull. Amer. math. Soc.* **50**, 447—463 (1944).

Exposition de la théorie de l'A. et de la théorie de Gelfand. Exemples (algèbres de fonctions analytiques et de fonctions indéfiniment différentiables). *J. Dixmier.*

**Lorch, Edgar R.:** The theory of analytic functions in normed Abelian vector rings. *Trans. Amer. math. Soc.* **54**, 414—425 (1943).

Soit  $R$  une algèbre complexe normée complète commutative avec unité  $e$ . Définition d'une application analytique de  $R$  dans  $R$ , et extension partielle de la théorie de Cauchy. Il faut introduire le spectre d'un élément  $z$  de  $R$  (défini comme le spectre de l'opérateur de multiplication par  $z$ ). La composante connexe de  $e$  dans le groupe des éléments inversibles est l'image de  $R$  par la fonction exponentielle. Irréductibilité de  $R$ . Eléments extérieurs, intérieurs et singuliers relativement à une courbe simple fermée rectifiable dans  $R$ . *J. Dixmier.*

**Lorch, Edgar R.:** The spectrum of linear transformations. *Trans. Amer. math. Soc.* **52**, 238—248 (1942).

Soient  $E$  un espace de Banach complexe.  $T$  un endomorphisme continu de  $E$ . Par une intégrale de Cauchy le long d'une courbe  $C$  ne rencontrant pas le spectre de  $T$ , on définit un idempotent  $P$  permutable à  $T$ . La correspondance entre  $P$  et la partie du spectre intérieure à  $C$  est un homomorphisme de lattices, mais n'est pas un homomorphisme si on admet les opérations de borne supérieure ou inférieure de familles infinies. *J. Dixmier.*

**Bochner, S. and R. S. Phillips:** Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings. *Ann. of Math.*, II. Ser. **43**, 409—418 (1942).

Let  $R$  be a ring of the indicated type, and  $R'$  the ring of  $x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp(int)$ , where  $a_n \in R$  and  $0 \leq t < 2\pi$  and such that  $\sum_{-\infty}^{\infty} \|a_n\| < \infty$ . It is shown, as an extension of Wiener's reciprocal theorem, that  $x(t)$  has a left inverse in  $R'$  if  $x(t_0)$  has a left inverse in  $R$  for each  $t_0$ . Further generalizations, including Wiener-Pitt's reciprocal theorem of Fourier-Stieltjes transform (this Zbl. 19, 168) are given by letting  $t$  to be an element of a topological group. *K. Yosida.*

**Bochner, S.:** Completely monotone functions in partially ordered spaces. *Duke math. J.* **9**, 519—526 (1942).

Let  $S$  be a partially ordered,  $\sigma$ -complete linear space, and let  $S^*$  consist of the positive elements of  $S$  and zero. Then the transformation  $T(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) dE(t)$  maps, for  $0 < \alpha < \infty$ , all monotone increasing functions  $E(t)$  with range in  $S^*$  onto all completely monotone functions  $T(\alpha)$  with range in  $S^*$ . *K. Yosida.*

**Michal, Aristotle D.:** The total differential equation for the exponential function in non-commutative normed linear rings. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **31**, 315—317 (1945).

In a ring of the indicated type,  $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} A^n$  is the unique entire analytic (in the sense of A. D. Michal and R. S. Martin, this Zbl. 9, 23) solution of  $\delta z(A) = \int_0^1 z((1-t)A) \cdot \delta A \cdot z(tA) dt$ , with  $z(0) = I$ . Here  $\delta$  denotes Fréchet's differential. *K. Yosida.*



**Yoshizawa, Hisa-aki:** On simultaneous extension of continuous functions. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 653—654 (1944).

Let  $F$  be a closed subset of a bicomact Hausdorff space. Let  $C(\Omega)$  and  $C(F)$  respectively be the normed rings of all complex-valued continuous functions on  $\Omega$  and  $F$ . Suppose a mapping  $x'(o') \rightarrow x(o)$  of  $C(F)$  onto a subring of  $C(\Omega)$ , which is linear, multiplicative and isometric, be such that  $x(o') = x'(o')$  for all  $o' \in F$ . Then there exists a retracting mapping  $f(o)$  of  $\Omega$  onto  $F$  such that  $x(o) = x'(f(o))$ .  
K. Yosida.

**Kawada, Yukiyo:** Über die Erweiterung der maximalen Ideale in normierten Ringen. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 267—268 (1943).

Let  $R_2$  be a subring of a commutative normed ring  $R_1$ . Let  $R_1$  contain with every element  $x$  an  $\bar{x}$  such that  $x(M) = \bar{x}(M)$  for every maximal ideal  $M$  of  $R_1$ , and let  $\bar{x} \in R_2$  if  $x \in R_2$ . Then every maximal ideal of  $R_2$  is a part of some maximal ideal of  $R_1$ .  
K. Yosida.

**Kawada, Yukiyo:** Über den Operatorenring Banachscher Räume. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 616—621 (1943).

The minimal left ideals in the ring of all bounded linear operators (b. l. o.) on a Banach space  $X$  are equivalent as a Banach space to the original  $X$  if the dimension of  $X$  is greater than 2. The minimal right ideals bear the same relationship to the conjugate space  $X^*$ . These results extend M. Eidelheit's theorem [Studia Math. 9, 97—104 (1939)]. If the „adjoint“ of the ring of all b. l. o. of a Banach space is isomorphic to the ring of all b. l. o. of some other Banach space, then both the spaces are reflexive and one is isomorphic to the conjugate of the other. Also a necessary and sufficient condition that a normed ring be the ring of all b. l. o. on a Hilbert space is given. These are closely related to the works by S. Kakutani-G. Mackey (this Zbl. 60, 263). The author's proof that a Banach space is isomorphic to its conjugate if and only if the ring of all b. l. o. admits a „conjugation“ seems to hold only for the reflexive spaces. K. Yosida.

**Kawada, Yukiyo:** Über die Existenz der invarianten Integrale. Japanese J. Math. 19, 81—95 (1944).

Let  $B$  be a complete Boolean algebra such that corresponding to any set  $\{a_\alpha\}$  there exists a countable subset  $\{a_{\alpha_n}\}$  satisfying  $\bigcup a_\alpha = \bigcup a_{\alpha_n}$ . Let  $G$  be a group of automorphisms of  $B$  and let  $Z$  be the totality of elements  $\in B$  invariant under  $G$ . Assume that there exists an element  $a_0$  such that (i)  $\bigcup_{\sigma \in G} a_0^\sigma = 1$ , (ii) there does not exist an element  $b < a$  satisfying  $b = \bigcup b_n$ ,  $a = \bigcup a_n$ ,  $b_i \cap b_j = a_i \cap a_j = 0$  ( $i \neq j$ ),  $b_n = a_{\sigma_n}^{\sigma_n}$ ,  $\sigma_n \in G$ . Then, to any measure  $\mu_0$  defined on  $Z$  with  $\mu_0(1) = 1$ , there exists a measure  $\mu$  defined on  $B$  invariant under  $G$  and such that  $\mu(a_0 \cap c) = \mu_0(c)$  if  $c \in Z$ ,  $\mu(b) > 0$  if  $\mu_0(\bigcup_{\sigma \in G} b^\sigma) > 0$ . Moreover, if  $\mu_0(a) > 0$  implies  $a > 0$  on  $Z$ ,  $\mu$  enjoys the same property on  $B$ .  
K. Yosida.

**Nakamura, Masahiro:** Note on Banach space. II. An ergodic theorem for Abelian semi-groups. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 131 (1942).

Every reflexive Banach space is proved to be ergodic, in the sense of Birkhoff and L. Alaoglu (this Zbl. 24, 124), under a uniformly bounded Abelian semigroup of linear operators.  
K. Yosida.

**Izumi, Shin-ichi:** A remark on ergodic theorems. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 102—104 (1943).

Proofs of Birkhoff's ergodic theorem and Wiener's dominated ergodic theorem are sketched together with some of their extensions to vector lattices. K. Yosida.

**Tsuji, Masatsugu:** On Hopf's ergodic theorem. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 640—647 (1944).

Tsuji, Masatsugu: Some metrical theorems on Fuchsian groups. Proc. imp. Acad. Tokyo 21, 104—109 (1945).

Tsuji, Masatsugu: On Hopf's ergodic theorem. Japanese J. Math. 19, 259—284 (1945).

The first two papers constitute an announcement of the third paper which gives an extension of a theorem of E. Hopf (dies. Zbl. 14, 83). The author does not refer to a more recent paper by E. Hopf (this Zbl. 24, 80). Let  $G$  be a Fuchsian group with principal circle  $U$ ,  $|z| = 1$ , and let the torus  $T$  be the direct product  $U \times U$  with the usual product measure  $m$ ,  $m(T) = 4\pi$ . Let  $z_1, z_2, \dots$  be congruent to  $z_0 = 0$  under  $G$  and let  $n(r)$  denote the number of these  $z$ 's in the circle  $|z| \leq r < 1$ . Then  $\lim_{r \rightarrow 1} \sup n(r) (1 - r) > 0$  implies the non-existence of a measurable set  $E$  on  $T$ , invariant by the group induced by  $G$  on  $T$ , such that  $0 < m(E) < 4\pi$ . The latter condition is just the metric transitivity of the flow defined by the hyperbolic lines on the manifold which is derived by identifying the points congruent under  $G$ .  
K. Yosida.

Kawada, Yukiyosi: Über einen schwachen Ergodensatz. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 343—349 (1942).

Let  $B^*$  be the conjugate space of a Banach space  $B$ , and let a set  $\{T_x\}$  of isometries of  $B$  (with itself) constitute a representation of a group  $G = \{x\}$ . It is assumed that the set  $\{T_x f; x \in G\}$  is conditionally compact. Denoting by  $N(f)$  the closed linear subspace spanned by  $T_x f$ ,  $x \in G$ , the author introduces three conditions upon a linear operator  $U$  on  $B^*$  to  $B^*$ : (i)  $\{f \in B: L_0(f) = 0 \text{ for an } L_0 \in B^*\} \supseteq N(f_0)$  implies  $\{f: UL_0(f) = 0\} \supseteq N(f_0)$ , (ii) there exists  $K(f) \geq 0$  such that  $\Re(UL(f)) \geq K(f) \inf_x \Re(L(T_x f))$  for all  $L \in B^*$ , (iii)  $\sup_x |(UL)f|$  for  $|L(T_x f)| \leq 1$  is  $\leq 1$ . Then he proves the theorem: for any  $L \in B^*$ , there is an  $L_0 \in B^*$  such that  $n^{-1}(L + UL + U^2L + \dots + U^{n-1}L)$  converges to  $L_0$  as functionals.

K. Yosida.

(1) Kawada, Yukiyosi: Über die maßtreuen Abbildungen vom Mischungstypus im weiteren Sinne. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 520—524 (1943).

(2) Kawada, Yukiyosi: Über die maßtreuen Abbildungen in Produkträumen. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 525—527 (1943).

Let  $T$  ( $T'$ ) be a measure preserving transformation of a measure space  $\Omega$  ( $\Omega'$ ) with a measure  $m$  ( $m'$ ) such that  $m(\Omega) = 1$  ( $m(\Omega') = 1$ ). The transformation  $\bar{T} = T \times T'$  on  $\Omega \times \Omega$  preserves the product measure  $m \times m'$ . It is proved in (2) that the point spectrum of  $\bar{T}$  is the set of all  $\lambda + \lambda'$ , where  $\lambda$  and  $\lambda'$  are chosen respectively from the point spectrum of  $T$  and that of  $T'$ . Hence  $\bar{T}$  is ergodic if and only if (i)  $T$  and  $T'$  are both ergodic and (ii) 0 is the only common point of the spectra of  $T$  and  $T'$ . Thus  $\bar{T}$  is of mixing type if and only if  $\bar{T}$  is ergodic for every ergodic choice of  $T'$ . This result is proved in (1) differently.

K. Yosida.

Kakutani, Shizuo: Induced measure preserving transformations. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 635—641 (1943).

A measure preserving transformation (m. p. t.)  $q(\omega)$  of a  $\sigma$ -finite measure space  $\Omega$  is called to be isomorphic to a m. p. t.  $q'(\omega')$  of a measure space  $\Omega'$  if there exists a m. p. t.  $\chi$  of  $\Omega$  onto  $\Omega'$  such that  $\chi(q(\omega)) = q'(\chi(\omega))$  almost everywhere. Let  $\varphi$  be an ergodic m. p. t. of  $\Omega$ , and let  $\Omega'$  be any subset of  $\Omega$  with  $m(\Omega') > 0$ . Then  $\varphi$  induces an ergodic m. p. t.  $q_{\Omega'}$  of  $\Omega'$  by putting  $q_{\Omega'}(\omega) = \varphi^n(\omega)$ , where  $n = n(\omega)$  = the least positive integer such that  $q^n(\omega) \in \Omega'$ . Any m. p. t.  $\psi$  isomorphic to  $q_{\Omega'}$  is called a derivative of  $\varphi$  and  $\varphi$  is called a primitive of  $\psi$ , in symbol  $\varphi > \psi$ . This symbol is transitive but  $\varphi > \psi$  and  $\psi > q$  do not in general imply that  $\varphi$  and  $\psi$  are isomorphic. It is proved that two ergodic m. p. t.  $\varphi$  and  $\varphi'$

of a complete metric measure space have a primitive in common if and only if each flow built on  $q$  under a function (W. Ambrose, this Zbl. 25, 269) is isomorphic to a flow built on  $q'$  under a function, and each flow built on  $q'$  under a function is isomorphic to a flow built on  $q$  under a function. The author conjectures that any two ergodic m. p. t. have a primitive in common. *K. Yosida.*

Cameron, R. H.: Some examples of Fourier-Wiener transforms of analytic functionals. Duke math. J. 12, 485—488 (1945).

In Analogie zur klassischen Fourier-Transformation einer Funktion wird die „Fourier-Wiener-Transformation“ eines Funktional definiert. Es sei  $K$  der Raum der komplexen, stetigen Funktionen  $x(t)$  in  $0 \leq t \leq 1$  mit  $x(0) = 0$ . Die Integrale sind als Wiener'sche Integrale über dem Teilraum  $C$  der reellen Funktionen in  $K$  zu verstehen.  $F[x]$  sei ein auf  $K$  definiertes Funktional mit der Eigenschaft, daß  $F[x + i y]$  Wiener-summabel in  $x$  über  $C$  für festes  $y$  in  $K$  ist. Dann heißt  $G[y] = \int_C F[x + i y] d_w x$  die Fourier-Wiener-Transformierte von  $F[x]$ , abgekürzt  $F[x] \rightarrow G[y]$ . (Das  $e^{i\pi}$  der klassischen Fourier-Transformierten braucht hier nicht hinzugefügt zu werden, weil es schon in der Definition des Wiener'schen Integrals steckt.) Es gibt Klassen von  $F$  derart, daß  $G[y + i x]$  Wiener-summabel in  $y$  über  $C$  für festes  $x$  in  $K$  und  $G[y + i x] \rightarrow F[x]$  ist (Reziprozitätseigenschaft). Es werden für 7 spezielle Funktionale die Transformaten berechnet, z. B.  $\int_0^1 e^{i\pi t} d\lambda(t) \rightarrow \int_0^1 e^{i\pi t} d\lambda(t)$ , und es wird gezeigt, daß sie die Reziprozitätseigenschaft haben. *G. Doetsch.*

Cameron, R. H. and W. T. Martin: Fourier-Wiener transforms of analytic functionals. Duke math. J. 12, 489—507 (1945).

Im Anschluß an die vorstehend referierte Arbeit werden 3 allgemeine Klassen von Funktionalen angegeben, für die  $G[y]$  existiert, zur selben Klasse gehört,  $F[-x]$  als Fourier-Wiener-Transformierte besitzt und die Parsevalsche Gleichung erfüllt:  $\int_C |F[2^{-\frac{1}{2}}x]|^2 d_w x = \int_C |G[2^{-\frac{1}{2}}y]|^2 d_w y$ . *G. Doetsch.*

Schwartz, Laurent: Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues. Bull. Soc. math. France 72, 141—145 (1944).

Démonstration de la conjecture de Choquet-Deny (ibid. 118—140): Soit  $K$  un compact dans  $R^n$  et  $C(K)$  l'espace des fonctions continues sur  $K$  avec la topologie uniforme.  $U[T^{-1}(x_1, \dots, x_n)]$ , où  $T$  parcourt toutes les similitudes possibles, n'est pas total dans  $C(K)$ , si et seulement si  $\int_K U = 0$ . Cette note est à l'origine des distributions de l'A. (ce Zbl. 37, 73; 42, 115). *J. Horváth.*

Schwartz, Laurent: Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques. Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math. phys., n. Sér. 21, 57—74 (1946).

Ausführliche Wiedergabe dieser Arbeit in dies. Zbl. 30, 126. *G. Doetsch.*

Zaanen, A. C.: On a certain class of Banach spaces. Ann. of Math., II. Ser. 47, 654—666 (1946).

Généralisation des espaces  $L^p$ .  $q(u)$  non décroissante pour  $u \geq 0$ ,  $q(u) = 0$ ,  $\lim_{u \rightarrow \infty} q(u) = \infty$ ,  $\Phi(u) = \int_0^u q(u) du$  et  $\Phi(2u) \leq C \Phi(u)$ ,  $C$  constante  $> 0$ ,  $\varphi(v)$  fonction inverse de  $q(u)$ ,  $\Psi(v) = \int_0^v \varphi(v) dv$ . Définition:  $y \in L_\Phi \Leftrightarrow \Phi[y(t)]$  est intégrable.  $L_\Phi^*$  est l'espace des fonctions  $x(t)$  telles que  $\int_a^b x(t) y(t) dt$  existe pour tout  $y \in L_\Psi$ , avec la norme  $\|x\|_\Phi = \sup_a \left| \int_a^b x(t) y(t) dt \right|$  pour  $\int_a^b \varphi(|y|) dt = 1$ .



$L_\phi^*$  est séparable, et son dual est constitué des éléments  $F(y) = \int_a^b y(t) f(t) dt$ , avec  $f \in L_\psi^*$  et  $\frac{1}{2} \|f\|_\psi \leq \|F\| \leq \|f\|_\psi$ . Applications à  $K(y) = \int_a^b K(s, t) y(t) dt$ . *A. Revuz.*

**Millsaps, Knox:** A note on generalized Hilbert space. Univ. nac. Tucumán. Revista, Ser. A 4, 317—320 (1944).

Étude des espaces de suites réelles  $\{x_n\}$  telles que  $\sum |x_n|^2 < \infty$  avec la „norme“  $(\sum |x_n|^\alpha)^\beta$ . *A. Revuz.*

**Smolian, V.:** On compact sets in the space of measurable functions. Mat. Sbornik, n. Ser. 15 (57), 343—346 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Es sei  $A$  die Menge aller für  $t \in T$  definierter  $\mu$ -meßbarer reeller Funktionen  $x(t)$  mit  $\lim_{y \rightarrow \infty} \mu(E[|x(t)| > y]) = 0$ . Ein neues Kriterium für die Kompaktheit (im Sinne der asymptotischen Konvergenz) von Mengen  $B \subset A$ , und ähnliche Bedingungen für die Kompaktheit von Mengen  $B \subset L^p(\mu)$ ,  $p > 1$ . *A. Császár.*

**Allen, H. S.:** Projective convergence and limit in sequence spaces. Proc. London math. Soc., II. Ser. 48, 310—338 (1945).

Zusätze zu Arbeiten von Köthe und Toeplitz über vollkommene Räume u. ä. (vgl. Literaturübersicht bei Köthe, dies. Zbl. 42, 116). Untersuchung der starken Konvergenz in den Räumen  $q$  (abbrechende Folgen),  $\sigma$  (alle Folgen),  $\sigma_r$  (Folgen mit  $\sum |x_n|^r < \infty$ ). Einige allgemeine Resultate über den in einem Stellenraum  $\alpha$  vermittels eines Unterraums  $\beta$  des Duals  $\alpha^*$  erklärten Konvergenzbegriff. *K. Zeller.*

**Fan, Ky:** Two mean theorems in Hilbert space. Proc. nat. Acad. Sci. USA 31, 417—421 (1945).

**Fan, Ky:** Remarques sur un théorème de M. Khintchine. Bull. Sci. math., II. Sér. 69, 81—92 (1945).

**Fan, Ky:** On positive definite sequences. Ann. of Math., II. Ser. 47, 593—607 (1946).

$\{X_n\}$ : suite d'éléments d'un espace de Hilbert est stationnaire si le produit  $(X_h, X_k)$  ne dépend que de  $h - k$ . La suite  $a_n = (X_h, X_{h+n})$  est alors définie positive. Toute suite définie positive peut être obtenue de cette manière. Étude des suites stationnaires: convergence forte de  $(X_1 + \dots + X_n)/n$  pour  $n \rightarrow \infty$ ; spectre ponctuel des suites définies positives. *A. Revuz.*

**Martchenko, V.:** Sur les fonctions dont les distances à certains ensembles dans l'espace des fonctions bornées sont égales. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 51, 663—666 (1946).

Es seien  $M$  die Menge aller auf  $A$  definierter beschränkter reeller Funktionen mit der Norm  $\|f(x)\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$  und  $N \subset M$  eine bezüglich der Multiplikation

abgeschlossene und die Funktion  $f(x) = 1$  enthaltende Teilmenge. Für  $f_1, \dots, f_n \in N$  und  $\varepsilon > 0$  sei  $S$  die Menge der Elementenpaare  $(x, y)$ ,  $x \in A$ ,  $y \in A$  mit  $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Für  $g \in M$  sei  $[g] = \inf_S \sup_{x \in A} \sup_{(x, y), (x, z) \in S} |f(y) - f(z)|$ ,

dann gilt  $[g] = 2 \inf_{f \in L} \|g - f\|$ , wo  $L$  die Menge aller linearer Kombinationen von Funktionen aus  $N$  bedeutet. *A. Császár.*

**Toranzos, Fausto I.:** On projectivity in Hilbert spaces. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. 7, 189—197 (1945) [Spanisch mit engl. Zusammenfassg.].

Dans un espace hilbertien, une hyperquadrique (transformée d'une hypersphère par une transformation projective au sens de Vitali) a une équation du second degré. *J. Dixmier.*

**Lévy, Paul:** Problème de Dirichlet et surfaces minima dans l'espace de Hilbert. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 772—773 (1946).

Kakutani, Shizuo: Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 269—271 (1943).

The author establishes two remarkable properties of a sphere in a Hilbert space. The first is that there is a homeomorphic mapping of it onto itself without fixed points; the other is that the identity mapping of  $\|x\| = 1$  (i.e. the surface of the sphere) onto itself is homotopic to a constant mapping. C. Racine.

Scorza Dragoni, Giuseppe: Un teorema d'esistenza per gli elementi uniti di una trasformazione funzionale. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 15, 25—32 (1946).

This paper is about a fixed point theorem of transformations of the usual metric space  $C^n(-1, +1)$  into itself when the transformations are of the form  $S = T \cdot S$  being continuous and of compact range and  $T$  such that,  $I$  standing for the identity transformation,  $I - T$  be continuous, locally invertible and transform a compact sequence into a convergent one. Rouché's theorem is shown to be a particular case of this proposition. C. Racine.

Rothe, Erich: On non-negative functional transformations. Amer. J. Math. 66, 245—254 (1944).

An unsolved problem in the theory of integral equations is first stated. Further an immediate application of Schauder's fixed point theorem shows that if  $s$  is a convex subset of the sphere  $\|x\| = 1$  in a Hilbert space and  $F$  a completely continuous transformation of  $s$  into itself, then  $F$  has a fixed point. This result enables the author to prove an interesting theorem in the theory of eigenvalues of integral equations. The paper is concluded with a few remarks about the same theory. C. Racine.

Leréj, Ž. (Leray, J.) and Ju. Šauder (Schauder, J.): Topology and functional equations. Uspechi mat. Nauk, n. Sér. 1, no. 3—4 (13—14), 71—95 (1946) [Russisch].

Übersetzt aus: Ann. Sci. École norm. sup., III. Ser. 51, 45—78 (1934), s. dies. Zbl. 9, 73.

Ghermanescu, M.: Sur une classe d'équations fonctionnelles. C. r. Acad. Sci., Paris 211, 199—201 (1940).

Ghermanescu, M.: Sur quelques équations fonctionnelles. Bull. sci. École polytechn. Timișoara 11, 181—184 (1943).

Es werden Funktionalgleichungen des Typs

$$m^r f(m^{a_1} x_1, m^{a_2} x_2, \dots, m^{a_n} x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + F(x_1, \dots, x_n)$$

mit der gesuchten Funktion  $f$  betrachtet. Für den Fall, daß  $F$  homogen von der Ordnung  $-r$  ist, ergibt sich als allgemeine Lösung

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) [\lg(x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}) + \psi(x_1, \dots, x_n)],$$

( $\sum x_i \beta_i$ )  $\lg m = 1$ , sonst  $\beta_i$  beliebig;  $\psi$  eine beliebige pseudohomogene Funktion vom Grade Null. G. Tautz.

● Iníguez Almech, José M<sup>a</sup>.: Lineare Operatoren in metrischen Räumen. Mem. Acad. Ci. Zaragoza, II. Ser. 1, 273 p. (1946) [Spanisch].

Exposé très soigné de la représentation spectrale des transformations linéaires d'un espace de Hilbert, avec une introduction sur le cas  $n$ -dimensionnel. Des espaces non-séparables et l'espace de Wachs sont aussi considérés.

A. Pereira Gomes.

Germain, Paul: Définition des structures infinitésimales. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 344—345 (1945).

● Vigier, Jean-Pierre: Étude sur les suites infinies d'opérateurs hermitiens. Thesis, Univ. de Genève 1946. 35 p.

Rachewsky, P.: Les problèmes les plus simples de „l'algèbre quasi-commutative“ en connexion avec la théorie des valeurs caractéristiques des opérateurs différentiels. Mat. Sbornik, n. Sér. 10 (52), 95—142 (1942) [mit russischer Zusammenfassg.]

Lee, H. C.: On the Hermitian operators in quantum mechanics. Chinese J. Phys. 6, 86—99 (1946).

Ghika, Al.: Sur l'espace fonctionnel de Cauchy et l'approximation des fonctions analytiques uniformes. Mathematica, Timişoara 22, 109—142 (1946).

Ríos, Sixto: Über die Mengen fortsetzbarer und nichtfortsetzbarer Taylorsche Reihen. Univ. nac. Litoral Inst. mat., Publ. 6, 237—245 (1946) [Spanisch].

Métrisation de l'espace des séries entières: la distance de deux éléments étant l'inverse du rayon de convergence de la différence. Les ensembles respectifs des séries prolongeables et non prolongeables ont tous leurs points intérieurs (sauf 0 pour le premier). *A. Revuz.*

● Fantappiè, L.: Theorie der analytischen Funktionalen und ihrer Anwendungen. Barcelona: Consejo Superior de Investigaciones Científicas 1943. 174 p. [Spanisch].

Fantappiè, Luigi: L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 22, 181—289 (1943).

Catunda, Omar: Über Systeme totaler Differentialgleichungen in mehr als einem unbekannten Funktional. Anais Acad. Brasil. Ci. 14, 109—125 (1942) [Portugiesisch].

Silva Dias, C. L. da: Über den Begriff eines analytischen Funktional. Anais Acad. Brasil. Ci. 15, 1—9 (1943) [Portugiesisch].

Augé, Juan: Kennzeichnung eines linearen Funktional durch seine Werte auf einer analytischen Linie. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 4, 141—148 (1944) [Spanisch].

Sebastião e Silva, José: Sull'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche. Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 709—715 (1946).

Il primo lavoro è una notevole monografia, nella quale la teoria dei funzionali analitici viene rielaborata, tenendo conto dei perfezionamenti che l'A. ha successivamente arrecato alla propria trattazione iniziale (1930). Si considerano: funzioni analitiche localmente e funzioni ultraregolari (di una variabile) e loro spazio funzionale, funzionali lineari, funzionali misti, funzionali bilineari; funzioni analitiche di più variabili, funzionali dipendenti da funzioni di più variabili e relativi operatori: applicazione dei funzionali analitici a equazioni a derivate parziali. Nel secondo lavoro vengono studiati i funzionali analitici lineari delle funzioni di più variabili  $F[y(t_1, \dots, t_n)]$ , introducendo l'indicatrice proiettiva  $p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = F_{t_1 \dots t_n} [(1 + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n)^{-1}]$ . Mediante la formula

$$(I) \quad F[y(t_1, \dots, t_n)] = p(\alpha_1^\circ, \dots, \alpha_n^\circ) X_n(\alpha_1^\circ t_1^\circ, \dots, \alpha_n^\circ t_n^\circ) y(t_1^\circ, \dots, t_n^\circ)$$

si esprime con due prodotti funzionali simmetrici il valore del funzionale lineare  $F$  (la cui indicatrice proiettiva  $p$  sia regolare entro un  $n$ -cilindro  $\tilde{Q}$  avente il centro nell'origine) per ogni funzione  $y$  regolare nell' $n$ -cilindro  $\tilde{Q}'$  associato a  $\tilde{Q}$ , quando si supponga nota la funzione

$$X_n(z_1, \dots, z_n) = \sum_{r_1=0}^{+\infty} \dots \sum_{r_n=0}^{+\infty} (-1)^r \frac{r_1! \dots r_n!}{r!} z_1^{r_1} \dots z_n^{r_n},$$

ove  $r = r_1 + \dots + r_n$ . Il secondo membro della (I) viene chiamato prodotto funzionale proiettivo e viene indicato con la notazione  $p y$ . Di tale prodotto funzionale proiettivo, che non varia scambiando tra loro le due funzioni  $p, y$ , vengono rilevate le proprietà di invarianza per trasformazioni proiettive duali eseguite sulle due funzioni. Circa il calcolo dei prodotti  $p y$  è da citare il caso particolare, in cui una delle due funzioni si decompone nel prodotto ordinario di più funzioni, perchè allora basta calcolare i prodotti funzionali proiettivi per i singoli fattori del prodotto, se sull'altra funzione viene eseguita la media proiettiva. Infine si



studiano i funzionali lineari abeloidi, la cui indicatrice proiettiva è razionale. Alla teoria dei funzionali analitici di Fantappiè si collegano anche gli altri lavori: nel quarto viene definita una classe di funzionali analitici e viene data una condizione, affinché tale definizione sia equivalente a quella di Fantappiè, mentre l'ultimo è una nota preventiva (questo Zbl. 41, 438). *S. Cinquini.*

Vulich, B.: Sur les opérations linéaires multiplicatives. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 41, 142—144 (1943).

Vulich, B.: Sur les fonctionnelles linéaires dans les espaces semi-ordonnés linéaires. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 52, 95—98 (1946).

Vulich, B.: Sur les opérations linéaires multiplicatives. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 52, 383—386 (1946).

The papers deal with operations in semi-ordered spaces (linear lattices) satisfying the axioms I—V of Kantorovič (this Zbl. 16, 405). The element  $e$  is called a unit if  $e \cdot x > 0$  for every  $x$ ; a quasi-unit is an element  $u$  such that  $u \cdot (e - u) = 0$ . In an earlier note (this Zbl. 23, 131) the author has defined the product for certain pairs of elements. An operation  $U$  from a space  $X$  of considered type to another  $Y$  is called multiplicative if  $U(x_1 x_2) = U(x_1) U(x_2)$  if  $x_1 x_2$  and  $U(x_1) U(x_2)$  exist. A topologically continuous linear operation  $U$  is multiplicative if and only if for every quasi-unit  $u$ ,  $U(u)$  is a quasi-unit in  $Y$ ; for such operations existence of  $x^{-1}$  implies existence of  $[U(x)]^{-1}$  and  $[U(x)]^{-1} = U(x^{-1})$ . The class  $\mathfrak{M}$  of topologically continuous linear multiplicative operations is closed with respect to the point-wise limits. If  $U \in \mathfrak{M}$ ,  $X$  is regular, and  $\bigvee x_\alpha < \infty$ , then  $U(\bigvee x_\alpha) = \bigvee U(x_\alpha)$ . If an operation  $U \in \mathfrak{M}$  is one-to-one from  $X$  onto  $Y$ , then  $U^{-1}(y)$  also belongs to  $\mathfrak{M}$ . The operations of  $\mathfrak{M}$  have a representation  $U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\varphi(u_\lambda(x))$  where  $x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda du_\lambda(x)$  is the spectral representation of  $x$ ;  $\varphi(u)$  is a quasi-unit-valued function defined for quasi-units in  $X$ ,  $\sigma$ -continuous, and such that  $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$  provided that  $u_1 \wedge u_2 = 0$ . There are proved some theorems concerning the relations between the convergence of operations of  $\mathfrak{M}$  and the behaviour of the corresponding „measures“  $\varphi$ . Now suppose that  $X$  has a unit  $e$ , and that every set of positive quasi-units  $u_\alpha$  such that  $u_\alpha \wedge u_\beta = 0$  for  $\alpha \neq \beta$ , is denumerable. The author gives necessary and sufficient conditions for the conjugate space to have a unit, and proves a representation theorem for linear continuous functionals in  $X$ . *A. Alexiewicz.*

Pinsker, A.: On a class of operations in  $K$ -spaces. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 36, 227—230 (1942).

The author considers continuous transformations of a Kantorovič space satisfying the condition:  $|x| \wedge |y| = 0$  implies  $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$ ,  $U(x_1) \cdot U(x_2) = 0$ . The underlying space is supposed to be of type  $K_b^1$  of Kantorovič. The author gives a representation for the operations  $U$  in form  $U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\lambda) d\epsilon_\lambda(x)$  where  $x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\epsilon_\lambda(x)$ , and  $z(\lambda)$  is a  $X$ -valued function. This representation is valid for bounded elements of the space. There follow some generalizations. *A. Alexiewicz.*

Fullerton, R. E.: Linear operators with range in a space of differentiable functions. Duke math. J. 13, 269—280 (1946).

Étude des applications linéaires d'un espace de Banach dans  $C^n(0, 1)$ .

*A. Revuz.*

Dixmier, Jacques: Sur une classe nouvelle de variétés linéaires et d'opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 971—972 (1946).

Vorbericht zur Arbeit des Verf.: dies. Zbl. 45, 391.

*G. Köthe.*

Murray, F. J.: The solution of linear operator equations. *J. Math. Physics* **22**, 148—157 (1943).

Es wird die Lösung einer Operatorgleichung  $Tf = g$  nach  $f$  im Hilbertschen Raum in den Einzelheiten auseinandergesetzt.  $T$  ein abgeschlossener Operator. Die Unlösbarkeit einer speziellen Operatorgleichung wird als Beispiel durchgerechnet. *G. Köthe.*

Sheffer, I. M.: An extension of a Perron system of linear equations in infinitely many unknowns. *Amer. J. Math.* **67**, 123—140 (1945).

Das Gleichungssystem  $\sum_{s=0}^{n-1} b_{ns} x_s + \sum_{s=0}^{\infty} (a_s + b_{n,n+s}) x_{n+s} = c_n$ , das aus dem Perronschen durch Hinzufügen von  $\sum_{s=0}^{n-1} b_{ns} x_s$  entsteht, wird im Raum der  $(x_n)$  mit  $\lim |x_n|^{1/n} < \infty$  auf Lösbarkeit untersucht. *G. Köthe.*

Hilding, S. H.: On infinite sets of homogeneous linear equations in Hilbert space. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **17**, 240—244 (1946).

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Unlösbarkeit im Hilbertschen Raum des Gleichungssystems  $\sum_{q=1}^{\infty} x_q (\lambda_p - \mu_q) = 0$ ;  $\lambda_p = \mu_q$  für alle  $p, q$ ;  $\mu_p \neq \mu_q$  für  $p \neq q$ . *G. Köthe.*

Cohen, L. W.: On linear equations in Hilbert space. *Bull. Amer. math. Soc.* **50**, 729—733 (1944).

Es wird untersucht, wann ein unendliches Gleichungssystem  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = y_i$  für jede im Hilbertschen Raum liegende rechte Seite  $(y_1, y_2, \dots)$  lösbar ist. Durch eine Approximationsmethode (Lösung der ersten  $n$  Gleichungen und Grenzübergang) erhält Verf. hinreichende Bedingungen. *G. Köthe.*

Wintner, Aurel: On the  $\mathcal{Q}$ -matrices of Toeplitz. *Amer. J. Math.* **64**, 669—676 (1942).

Romanov, N. P.: Über eine spezielle Familie unendlicher unitärer Matrizen. *C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér.* **52**, 295—297 (1946).

Schur, Issai: Ein Satz über quadratische Formen mit komplexen Koeffizienten. *Amer. J. Math.* **67**, 472—480 (1945).

Eine symmetrische Matrix  $C$  läßt sich mittels einer unitären Matrix  $U$  in die Diagonalform  $U C U'$  transformieren, wobei in deren Diagonale die positiven Quadratwurzeln der Eigenwerte von  $C C'$  stehen. Dies wird übertragen in den Hilbertschen Raum auf eine symmetrische Bilinearform  $f(x, y)$ . *R. W. Weitzenböck.*

Everett, C. J. and H. J. Ryser: The Gram matrix and Hadamard theorem. *Amer. math. Monthly* **53**, 21—23 (1946).

In einem linearen Vektorraum nicht notwendig endlicher Dimension über den komplexen Zahlen wird in bekannter Weise ein skalares Produkt mittels einer positiv definiten Hermiteschen Bilinearform eingeführt. Für  $n$  Vektoren  $\xi_1, \dots, \xi_n$  kann das bekannte Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren durch eine Matrix  $T = T(\xi_1, \dots, \xi_n)$  beschrieben werden. Es gilt:  $|T|^2 \leq (\xi_1, \xi_1) \dots (\xi_n, \xi_n)$ ; Gleichheit genau dann, wenn die  $\xi_r$  ein Orthogonalsystem bilden. Sind  $\xi_1, \dots, \xi_n$  linear unabhängig, so gilt für ihre Gramsche Matrix  $G(\xi_1, \dots, \xi_n) = ((\xi_i, \xi_k)) = \overline{T'} T$  und also  $|G| = |T|^2 > 0$ . Hieraus folgt der Satz von Hadamard-Fischer:  $|G| \leq (\xi_1, \xi_1) \dots (\xi_n, \xi_n)$ . *H.-J. Kowalsky.*

Delange, Hubert et Christian Pauc: L'extensibilité des espaces vectoriels normés. *C. r. Acad. Sci., Paris* **223**, 606—608 (1946).

Als Streckbarkeit  $\varrho(V)$  eines normierten Vektorraumes  $V$  wird die untere Grenze aller Zahlen  $\delta^*(S)/\lambda(S)$  bezeichnet, wobei  $S$  eine endliche Teilmenge von  $V$ ,  $\delta^*(S)$  das Maximum der Zahlen  $\|\sum_{i=1}^n x_i^0\|$  mit  $S^* \subseteq S$  und  $\lambda(S)$  die Gesamtlänge

$\sum_{v \in S} \|v\|$  bedeuten. Versteht man allgemeiner bei einer beliebigen stetigen Kurve  $C$  in  $V$  der Länge  $\lambda(C) < +\infty$  unter  $\delta^*(C)$  die obere Grenze der Durchmesser aller Kurven  $C^*$  der Eigenschaft, daß bei jeder Borelschen Menge  $B$  von Richtungen die Menge der Punkte von  $C$  bzw.  $C^*$ , in denen die orientierte Tangente an  $C$  bzw.  $C^*$  zu  $B$  gehört, gleiches lineares Maß haben, so bleibt  $\varrho(V)$  auch noch die untere Grenze aller  $\delta^*(C)/\lambda(C)$ , falls  $V$  gleichmäßig konvex ist. Schließlich bildet  $\varrho(V)$  stets die untere Grenze aller  $\delta^*(m)/\lambda(m)$ , wenn  $m$  ein auf einem Booleschen  $\sigma$ -Verband  $\mathfrak{M}$  mit größtem Element  $K$  erklärtes Maß mit Werten in  $V$ ,  $\delta^*(m)$  die obere Grenze der  $\|m(K^*)\|$  mit  $K^* \in \mathfrak{M}$  und  $\lambda(m)$  die obere Grenze aller  $\sum_i \|m(K_i)\|$  für alle höchstens abzählbaren Zerlegungen von  $K$  in paarweise fremde Elemente  $K_i$  aus  $\mathfrak{M}$  bedeuten.

*K. Krickeberg.*

**Pauc, Christian:** Prolongement d'une mesure vectorielle jordanienne en une mesure lebesguienne. C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 709—711 (1946).

Eine auf einem Booleschen Unterverband eines Booleschen  $\sigma$ -Verbandes erklärte additive Funktion mit Werten in einem schwach vollständigen normierten Vektorraum kann dann und nur dann zu einem auf einem Booleschen  $\sigma$ -Verband definierten abzählbar additiven vektoriellen Maß fortgesetzt werden, wenn sie abzählbar additiv und beschränkt ist.

*K. Krickeberg.*

**Rickart, C. E.:** Integration in a convex topological space. Trans. Amer. math. Soc. **52**, 498—521 (1942).

Das (i. a. mehrdeutige) Integral einer mehrdeutigen, auf einem  $\sigma$ -Mengenring  $\mathfrak{M}$  definierten Funktion  $F$ , deren Werte in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum  $\mathfrak{X}$  liegen, wird in Anlehnung an das Kolmogoroffsche Vorbild bei reellen Funktionen mit Hilfe von endlichen oder abzählbaren Zerlegungen des Integrationsbereichs definiert. Die Grundlage bildet der Begriff der unbedingten Summierbarkeit „bis auf eine Umgebung“ einer Reihe (Mengenreihe, entsprechend der Mehrdeutigkeit des Integranden) gegen eine Teilmenge von  $\mathfrak{X}$ . Die Untersuchung der Eigenschaften dieses Integrals schließt eine sinngemäße Verallgemeinerung der Differentialäquivalenz von Kolmogoroff ein. Bei einer Folge von Integranden, die hinsichtlich eines reellen Maßes  $m$  „approximativ“ konvergieren und eindeutige unbestimmte Integrale haben, ist unter gewissen Voraussetzungen die Konvergenz der unbestimmten Integrale ihrer gleichmäßigen  $m$ -Stetigkeit äquivalent. Besonders untersucht wird die Integration von Funktionen der Gestalt  $F(\sigma) = B(y(\sigma), \sigma)$ , wobei u. a.  $B(u, \sigma)$  eindeutig mit Werten in  $\mathfrak{X}$ , linear als Funktion von  $u$  in einem linearen Raum  $\mathfrak{Y}$  und abzählbar additiv als Funktion von  $\sigma$  in  $\mathfrak{M}$  sein soll und  $y$  eine in  $\mathfrak{M}$  definierte mehrdeutige Funktion mit Werten in  $\mathfrak{Y}$  darstellt. Weitere Spezialisierungen ergeben sich durch besondere Wahl von  $B$ , z. B.  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$  und  $B(u, \sigma) = m(\sigma)u$  mit einem reellen Maß  $m$ .

*K. Krickeberg.*

**Rickart, C. E.:** An abstract Radon-Nikodym theorem. Trans. Amer. math. Soc. **56**, 50—66 (1944).

Während sich nach einem Beispiel von Pettis nicht jede abzählbar additive, in einer Booleschen  $\sigma$ -Mengenalgebra  $\mathfrak{J}$  mit größtem Element  $M$  definierte und hinsichtlich eines  $\sigma$ -endlichen Maßes  $m$  über  $\mathfrak{J}$  totalstetige Funktion mit Werten in einem reellen Banachschen Raum  $\mathfrak{X}$  als unbestimmtes Pettissches (d. h. mit Hilfe des dualen Raums erklärtes)  $m$ -Integral einer in  $M$  erklärten eindeutigen Funktion mit Werten in  $\mathfrak{X}$  darstellen läßt, gelingt dem Verf. eine solche Darstellung mit Hilfe eines allgemeineren Integranden  $x$ , der jedem Element  $E$  aus  $\mathfrak{J}$  endlichen positiven Maßes eine Teilmenge von  $\mathfrak{X}$  zuordnet, so daß aus  $E \subseteq E'$  folgt  $x(E) \subseteq x(E')$ . Dabei kann  $\mathfrak{J}$  eine beliebige Boolesche  $\sigma$ -Algebra sein. Das Integral  $\int_E x dm$  ist eine Verallgemeinerung des Pettisschen. Als Anwendung ergibt sich eine Dar-



stellung einer beliebigen linearen beschränkten Abbildung  $T$  von  $L_1(M, \mathfrak{F})$  in  $\mathfrak{X}$  in der Gestalt  $Tf = \int_M x f dm$ , wobei  $(x|f)(E)$  die Menge aller  $\lambda z$  mit  $\lambda \in f(E)$  und  $z \in x(E)$  bedeutet. Es wird  $\|T\| = \sup_{0 < m(E) < +\infty} m(E)^{-1} \left\| \int_E x dm \right\|$ .

K. Krickeberg.

Sigalov, A. G.: Représentations presque isométriques et la pseudo-dérivabilité. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 52, 11—12 (1946).

$E$  und  $U$  seien Banachsche Räume,  $Tx$  eine Transformation ( $x \in E$ ,  $Tx \in U$ ),  $T0 = 0$ , zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  gehöre ein  $\delta > 0$ , so daß  $\|x - x'\| = \|Tx - Tx'\| < \varepsilon (\|x\| + \|x'\|)$  für  $\|x\|, \|x'\| < \delta$  gilt. Ist  $f(t)$  ( $0 < t < 1$ ,  $f(t) \in E$ ) so beschaffen, daß  $\lim_{t \rightarrow 0} \|f(t)\|/t$  existiert und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(t_k)/t_k - f(t'_k)/t'_k\| = 0$  für  $t_k \rightarrow 0$ ,  $t'_k \rightarrow 0$ ,  $t_k = O(t'_k)$ ,  $t'_k = O(t_k)$  gilt, so besitzt  $q(t) = Tf(t)$  dieselben Eigenschaften.

A. Császár.

Millsaps, Knox: Differential calculus in topological groups. I, II. Revista Ci. 44, 485—492 (1942); 45, 45—52 (1943).

Rothe, E. H.: Gradient mappings in Hilbert space. Ann. of Math., II. Ser. 47, 580—592 (1946).

The author introduces in a real Hilbert space the notions of scalar and gradient which he has afterwards more systematically studied and successfully applied (this Zbl. 34, 365; 31, 216). In this paper he considers „layer mappings“ of a Hilbert space into itself, namely mappings of the form  $y = x + F(x)$  where  $F$  is completely continuous and has a range contained in a finite dimensional subspace. The main result is that if  $F$  is a gradient of scalar  $i$ ,  $F$  is a layer mapping if and only if  $i$  is a layer scalar, namely one of the form  $\frac{1}{2} \|x\|^2 + S(x)$  where  $S(x') = S(x'')$  whenever  $x'$  and  $x''$  have the same projection on a finite dimensional subspace. Further a few relations between completely continuous scalars and completely continuous gradients are investigated.

C. Racine.

Ries, S.: Bemerkung über analytische Operationen in Banachschen Räumen. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 6, 48—50 (1946) [Spanisch].

Esquisse d'une définition d'applications analytiques d'un espace de Banach dans un autre.

A. Revuz.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● Finetti, B. de: Compte rendu critique du colloque de Genève sur la théorie des probabilités. (Actual. sci. ind. Nr. 766.) Conférences internationales de sciences mathématiques organisées à l'Université de Genève. Colloque consacré à la théorie des probabilités. VIII. Paris: Hermann & Cie 1939. 65 p.

Bernstein, S. N.: Die Petersburger Schule der Wahrscheinlichkeitstheorie. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski. Ser. mat. Nauk 10, 3—11 (1940) [Russisch].

Williams, Donald: The problem of probability. Philos. and phenomenol. Res. 6, 619—622 (1946).

Kamke, E.: Zu meinem Aufsatz „Kritische Bemerkungen zu K. Marbe, Grundfragen der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung und theoretischen Statistik“. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 49, 255—256 (1940).

S. dies. Zbl. 11, 217.

Broderick, T. S. and E. Schrödinger: Boolean algebra and probability theory. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 46, 103—112 (1940).

Dantzig, D. van: Mathematical and empirical foundations of the calculus of probability. Nederl. Tijdschr. Natuurkunde 8, 70—93 (1941) [Holländisch mit engl. Zusammenfassg.].

Halmos, Paul R.: Random alms. Ann. math. Statistics 15, 182—189 (1944).

Halmos, P. R.: The foundations of probability. Amer. math. Monthly 51, 493—510 (1944).

Mises, R. v.: On the probabilities in a set of games and the foundation of probability theory. Revista Ci. 47, 435—456 (1945).

Grundlagenfragen, wobei es sich bei Halmos um die maßtheoretische Auffassung handelt, bei v. Mises um eine Anwendung des v. Misesschen Kollektivbegriffs.  
H. Geiringer.

Gennaro, Antonino: Eventi subordinati linearmente dipendenti. Atti Accad. Italia, Mem. Cl. Sci. fis. mat. natur. 13, 947—962 (1942).

Es seien  $E_i|H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) bedingte Ereignisse und  $p_i = P(E_i|H_i)$  ihre Wahrscheinlichkeiten:  $E_0|H_0$  wird von den andern „linear abhängig“ genannt, wenn  $p_0$  bestimmt ist, sobald die Werte von  $p_1, \dots, p_n$  gewählt werden. Diese logische Verknüpfung logisch auszudrücken, scheint ein schwieriges Problem zu sein; denn Verf. gibt eine geometrische Lösung nur für  $n = 2, 3, 4$ .

B. de Finetti.

(1) ● Fréchet, Maurice: Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants. II. Cas particuliers et applications. (Actual. sci. ind., Nr. 942.) Paris: Herman & Cie 1943. 131 p. (p. 81—211).

(2) Loève, M.: Systèmes d'événements en nombre fini. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 5, 55—74 (1942).

(3) Ky, Fan: Un théorème général sur les probabilités associées à un système d'événements dépendants. C. r. Acad. Sci. Paris 218, 380—382 (1944).

(1): Fréchet applique les résultats du tome I (ce Zbl. 26, 329) aux cas où les événements sont équiprobables et indépendants; où ils sont échangeables (au sens de Pólya); aux problèmes dérivés de celui des rencontres et à ses généralisations. Il donne une bibliographie. — (2): Loève, dans l'esprit des méthodes de Fréchet (1) poursuit, dans le cas fini, ses recherches sur les événements liés [J. Math. pur. appl. IX. Sér. 24, 249—318 (1945)]. Il introduit les „variables indicatrices d'événements“ (quantités égales à 1 ou à 0 suivant que l'événement se produit, ou non) et en indique les règles de calcul. — (3): Ky Fan utilisant la notion d'indicateur (2), étend au cas d'événements quelconques certaines relations d'égalité et d'inégalité supposées valables pour des événements indépendants et d'un type souvent rencontré, p. ex. par Fréchet, ce Zbl. 26, 329, et Loève, ce Zbl. 25, 198. A. Sade.

Chung, Kai Lai: Generalization of Poincaré's formula in the theory of probability. Ann. math. Statistics 14, 63—65 (1943).

Cheng, Tseng-Tung: A new probability function and its properties. J. Amer. statist. Assoc. 39, 243—245 (1944).

Chung, Kai-Lai and Lietz C. Hsu: A combinatorial formula and its application to the theory of probability of arbitrary events. Ann. math. Statistics 16, 91—95 (1945).

Chung, Kai-Lai: On fundamental systems of probabilities of a finite number of events. Ann. math. Statistics 14, 123—133 (1943).

Chung, Kai-Lai: Further results on probabilities of a finite number of events. Ann. math. Statistics 14, 234—237 (1943).

Chung, Kai-Lai: On mutually favorable events. Ann. math. Statistics 13, 338—349 (1942).

Fan, Ky: Conditions d'existence de suites illimitées d'événements correspondant à certaines probabilités données. *Revue sci.* 82, 235—240 (1944).

L'A. se donne un système de nombres réels et cherche à quelles conditions nécessaires et suffisantes ce système doit satisfaire pour qu'il existe au moins une suite infinie d'événements pour laquelle le système représente divers systèmes particuliers donnés. *A. Sade.*

Haller, B.: Verteilungsfunktionen und ihre Auszeichnung durch Funktionalgleichungen. *Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath.* 45, 97—163 (1945).

Bericht über die Verteilungsfunktionen, ihre wichtigsten Eigenschaften und ihren Zusammenhang mit der Lösung von Funktionalgleichungen. *W. Saxer.*

Kreis, H.: Beitrag zur Theorie der Häufigkeitsfunktionen. *Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath.* 45, 239—256 (1945).

Darstellung einer Operatoren-Methode für die Berechnung der Momente einer Binomialverteilung. Schilderung einer Methode zur Konstruktion bestimmter Verteilungsfunktionen, die als Grenzfall die Brunsche Verteilungsfunktion und  $\Phi(x)$  enthalten. *W. Saxer.*

Neyman, Jerzy: Un théorème d'existence. *C. r. Acad. Sci., Paris* 222, 843—845 (1946).

L'A. démontre que: étant données  $N$  variables aléatoires indépendantes  $X$  avec leurs lois de probabilité  $F(t)$  continues, il existe une fonction mesurable  $f(t)$  telle qu'en y substituant au lieu de  $t$  n'importe quelle variable  $X$ , on obtient une variable aléatoire  $f(X)$  dont la répartition de probabilité est uniforme entre zéro et un, et annonce des applications au problème des ensembles semblables. *A. Sade.*

Darmois, Georges: Sur certaines lois de probabilité. *C. r. Acad. Sci., Paris* 222, 164—165 (1946).

Darmois, Georges: Résumés exhaustifs et problème du Nil. *C. r. Acad. Sci., Paris* 222, 266—268 (1946).

L'A. étant donnée une loi de probabilité à deux variables  $x, y$  et un paramètre  $m$ , étudie le problème du Nil de Fisher, où de la division du plan cartésien en parcelles dont la masse totale soit indépendante de  $m$ , et rencontrées aussi par Pearson et Neyman sous le nom de „régions semblables à l'espace entier“. Il introduit les lois à „estimation exhaustive“. *A. Sade.*

Féraud, Lucien: Sur les distributions à projection indépendante du paramètre. *C. r. Acad. Sci., Paris* 222, 1272—1273 (1946).

L'A. étudie le problème analogue à celui de Darmois et donne une condition suffisante pour qu'une distribution soit, à la fois, à projection indépendante de  $m$  et susceptible d'être ramenée à la forme canonique. *A. Sade.*

Masuyama, Motosaburô: The Bienaymé-Tchebycheff inequality for Hermitic tensors. *Proc. phys.-math. Soc. Japan*, III. Ser. 24, 409—411 (1942).

The Bienaymé-Tchebycheff inequality for a positive random variable  $A$ :  $\Pr \{A - \lambda E(A) \geq 0\} \leq \lambda^{-1}$  is extended for a chance Hermitian positive definite or semidefinite tensor. If  $x$  is a random bivector and  $A = (x - E(x))(x - E(x))^*$ ,  $E(A)$  becomes the variance tensor so that the inequality says that the endpoint of  $(x - E(x))/\lambda^{1/2}$  lies outside the ellipsoid  $x E(A)^{-1} x^* = 1$ . *K. Yosida.*

Offord, A. C.: An inequality for sums of independent random variables. *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. 48, 467—477 (1945).

$X_1, X_2, \dots, X_n$  seien unabhängige stochastische Variablen,  $\alpha_v = E(x_v)$ ,  $A_v^2 = E[(x_v - \alpha_v)^2]$ ,  $B_v^3 = E(|x_v - \alpha_v|^3)$ .  $F_n(u)$  sei die Verteilungsfunktion von



$x_1 + \dots + x_n$ :  $\psi_n(x) = \max_{-\infty < t < \infty} \int_{t-x}^{t+x} dF_n(u)$ . Es gilt die Ungleichung

$$\psi_n(x) \leq C k^{-3} n^{-1/2} \log n [\log n + K x / \min_v A_v].$$

$C$  ist eine Konstante,  $K$  ist definiert durch die Gleichung  $2K^{1/2} = \min_v (A_v/B_v)$ .

*W. Saxon.*

Moyal, J. E.: Approximate probability distribution functions for the sum of two independent variates. *J. roy. statist. Soc.* 105, 42—43 (1943).

Eyraud, H.: Sur l'addition des aléatoires imaginaires. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* 2, 7—17 (1939).

L'A. étudie les variables aléatoires imaginaires avec un nombre fini de valeurs, et les aléatoires de Poisson, avec des moments connus. *A. Sade.*

Dor, Léopold: Quelques remarques sur les variables aléatoires combinées  $xy$ ,  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ . *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* 13, 203—209 (1944).

L'A. indique des propriétés de la fonction de probabilité totale du produit de deux variables aléatoires indépendantes. *A. Sade.*

(1) Eyraud, H.: Les lois d'erreurs dans deux dimensions. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* 2, 19—23 (1939).

(2) Fréchet, Maurice: Sur la correspondance entre certaines lois d'erreurs et certaines définitions de la distance. *Revue sci.* 79, 3—14 (1941).

Eyraud étudie la détermination d'une grandeur vectorielle en prenant pour position la plus probable celle qui rend minimum la somme des  $p$ èmes puissances des écarts. — Fréchet critique les anciennes démonstrations de la loi normale et rapporte les résultats déduits d'expériences (signal lumineux, tir). L'arbitraire dans le choix de la définition de l'écart entraîne l'incertitude dans celui de la loi d'erreurs. Les résultats de (1) sont retrouvés comme cas particuliers. *A. Sade.*

Hitosi-Iyoi: Calcul explicite de la distance de deux lois de probabilités. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* 3, 55—63 (1940).

L'A. présente d'utiles remarques sur les définitions de P. Lévy pour la distance entre deux lois (Fréchet-Borel, ce Zbl. 15, 260). *A. Sade.*

Féraud, Lucien: Paramètre ignorable dans une loi de probabilité. *C. r. Soc. Physique Genève* 62, 58—61 (1945).

Féraud, Lucien: Statistique mathématique: Distributions de produits intérieurs. *C. r. Soc. Physique Genève* 60, 196—200, 296 (1943).

Lukacs, E.: A characterization of the normal distribution. *Ann. math. Statistics* 13, 91—93 (1942).

L'A. servendosi della funzione caratteristica, dà una nuova dimostrazione della normalità della distribuzione di densità di una variabile casuale quando media e varianza sono stocasticamente indipendenti. Mostra la generalizzazione di questa condizione al caso di  $n$  variabili. *T. Salvemini.*

Kaplansky, Irving: A characterization of the normal distribution. *Ann. math. Statistics* 14, 197—198 (1943).

Ostrowski, Alexandre: Sur la formule de Moivre-Laplace. *C. r. Acad. Sci., Paris* 223, 1090—1092 (1946).

L'A. calcule la partie principale du reste dans la formule de Laplace, théorie analytique des probabilités, 3<sup>e</sup> éd. 1820, p. 279—282. *A. Sade.*

Vegas Perez, Angel: Die Euler-Maclaurinsche Formel und ihre Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. *Euclides, Madrid* 4, 80—84, 180—181 u. 248—250 (1944) [Spanisch].

Dieulefait, C.: Die multidimensionale Gaußsche Verteilung und ihre Verallgemeinerung. *An. Soc. Ci. Argentina* 136, 193—215 (1943) [Spanisch].

Auftreten der Hermiteschen Polynome in dem Gaußschen Verteilungsgesetz mit mehreren Variablen. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Kac, M.: A remark on independence of linear and quadratic forms involving independent Gaussian variables. *Ann. math. Statistics* **16**, 400—401 (1945).

Bei Gaußschem Vektor  $\mathbf{x}$  sind  $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$  und  $\mathbf{a}'\mathbf{x}$  genau dann unabhängig, wenn  $\mathbf{A}\mathbf{a} = 0$  ist. H. Richter.

Kac, M.: On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bull. Amer. math. Soc.* **49**, 314—320 (1943).

Kac, M.: A correction to „On the average number of real roots of a random algebraic equation“. *Bull. Amer. math. Soc.* **49**, 938 (1943).

Let  $X_0 + X_1 x + X_2 x^2 + \dots + X_{n-1} x^{n-1} = 0$  be an algebraic equation with coefficients  $X_i$  independent random variables assuming real values only, and let  $N_n$  be the number of real roots. The mean value of  $N_n$  is determined when all  $X_i$  have the same normal distribution. E. Frank.

Girshick, M. A.: Note on the distribution of roots of a polynomial with random complex coefficients. *Ann. math. Statistics* **13**, 235—238 (1942). A correction. *Ann. math. Statistics* **13**, 447 (1942).

Finsler, P.: Über die Wahrscheinlichkeit seltener Erscheinungen. *Experientia* **1**, 56—57 (1945).

Poisson-Verteilung mit Parameter  $\delta$  gegeben.  $w(\delta, t, T)$  bedeutet die Wahrscheinlichkeit, daß das Zeit-Intervall  $T$  mindestens ein Intervall,  $0 < t < T$ , enthält, in welches kein Ereignis fällt. Der Autor behauptet ohne Beweis die folgende Darstellung:  $w(\delta, t, T) = \sum_{n=1}^{[t/T]} (-1)^{n-1} \delta^{n-1} (T - nt)^{n-1} \left[ 1 + \frac{\delta}{n} (T - nt) \right] \frac{e^{-\delta t}}{(n-1)!}$ .

W. Saxer.

Hadwiger, H.: Über Verteilungsgesetze vom Poissonschen Typus. *Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath.* **45**, 257—277 (1945).

Eine für  $x \geq 0$  definierte Verteilungsfunktion nennt Verf. vom Poissonschen Typus, wenn sie eine Treppenfunktion mit den Sprüngen bei  $x = 0, 1, 2, \dots$  darstellt,  $\sum_{n=0}^{\infty} n \varphi_n(t) = t$  und  $\varphi_n(x+t) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \varphi_{n-k}(t)$ . Damit sie von diesem Typus ist, muß ihre erzeugende Funktion von der Form  $e^{f(z)}$  sein, wo  $f(z)$  analytisch für  $|z| < 1$  mit  $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = 1$  und  $f^{(n)}(0) \geq 0$  wenn  $n \geq 1$ .

W. Saxer.

Rott, N.: Über Wahrscheinlichkeitsprobleme der Garnefestigkeitsprüfung. *Schweiz. Arch. angew. wiss. Tech.* **12**, 93—95 (1946).

Beweis dafür, daß die Anzahl der Brüche in einem Faden unter sehr allgemeinen Voraussetzungen einer Poisson-Verteilung genügt. W. Saxer.

Orts Aracil, J. M<sup>a</sup>.: Über das Verhalten gewisser Wahrscheinlichkeiten. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. **3**, 157—163 (1943) [Spanisch].

Approximierte Abschätzung der größten Wahrscheinlichkeit im disymmetrischen Schema von Bernoulli. J. M<sup>a</sup>. Orts.

Rosenblatt, A.: Sur les théorèmes des grand nombres dans la théorie de la probabilité. *Actas Acad. nac. Ci. exact. fis. natur. Lima* **3**, 152—159 (1940).

Abschätzung der Approximation im Limestheorem der Wahrscheinlichkeit, im Falle von Bernoulli. J. M<sup>a</sup>. Orts.

Brown, B. H.: Simple examples of limiting processes in probability. *Amer. math. Monthly* **48**, 98—102 (1941).

Núñez Bazalar, Tomás: Über das Gesetz der großen Zahlen in der Wahrscheinlichkeitstheorie. *Revista Ci.* **47**, 601—643 (1945) [Spanisch].

Betrachtung des Schemas von Bernoulli im Falle  $p = \frac{2}{3}$ . J. M<sup>a</sup>. Orts.

Rosenblatt, Alfred: Über das Gesetz der großen Zahlen. *Actas Acad. nac. Ci. exact. fis. natur. Lima* **8**, 7—26 (1945) [Spanisch].

Explizite Schätzung der Abweichung zwischen der Frequenz und der Wahrscheinlichkeit im Gesetz der großen Zahlen.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

(1) Feller, W.: Note on the law of large numbers and „fair“ games. *Ann. math. Statistics* **16**, 301—304 (1945).

(2) Feller, W.: The fundamental limit theorems in probability. *Bull. Amer. math. Soc.* **51**, 800—832 (1945).

(3) Feller, W.: On the normal approximation to the binomial distribution. *Ann. math. Statistics* **16**, 319—329 (1945).

(4) Feller, W.: A limit theorem for random variables with infinite moments. *Amer. J. Math.* **68**, 257—262 (1946).

Beiträge zu Problemen, die dem Gedankenkreis des Central-Limit-Theorem angehören: (1) bezieht sich auf Grundlagenfragen und scheint dem Ref. anfechtbar, (2) ist eine Exposition bekannter Resultate, die — bis auf die etwas einseitige Auswahl — von überlegener Kraft ist.

*H. Geiringer.*

(1) Esseen, Carl-Gustav: Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. *Acta math.* **77**, 1—125 (1945).

(2) Esseen, Carl-Gustav: Determination of the maximum deviation from the Gaussian law. *Ark. Mat. Astr. Fys.* **29 A**, Nr. 20, 10 p. (1943).

(3) Bergström, Harald: On the central limit theorem. *Skand. Aktuarietidskr.* **27**, 139—153 (1944).

(4) Bergström, Harald: On the central limit theorem in the space  $R_k$ ,  $k > 1$ . *Skand. Aktuarietidskr.* **28**, 106—127 (1945).

(5) Törnqvist, Leo: On the distribution function for a function of  $n$  statistic variables and the central limit theorem in the mathematical theory of probability. *Skand. Aktuarietidskr.* **29**, 206—229 (1946).

These papers all deal with the central limit theorem, in particular its remainder problem. Esseen's remarkable thesis (1), to which (2) is a preliminary announcement, starts with a thorough review of the problem. The introductory chapters contain several general results on inference from characteristic functions  $f(t)$ , . . . to the corresponding distribution functions (d. f.)  $F(x)$ , . . . e. g. the following: if

$f(t) = g(t)$  for  $|t| \leq L$ , then  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)| dx \leq \pi/L$ . — As an application of

these results, the remainder term in the central limit theorem is shown to be of order  $n^{-1/2}$ ; the hitherto known estimate has been of order  $n^{-1/2} \log n$ . The result mentioned has been found independently by Berry (this *Zbl.* **25**, 346). — Next, the author studies the Edgeworth expansion of the d. f.  $F_n(x)$  for the normalized sum of identically distributed random variables; he shows, i. a., that this expansion can be improved by including a discontinuous function to take care of the jumps in  $F_n(x)$  when the original distribution is discontinuous. — He finally turns to vector variables  $Y_i = (Y_{i,1}, \dots, Y_{i,k})$ , assumed to be identically distributed and normalized to zero means and unit covariance matrix, and shows that the d. f. of the square sum  $\sum_j (\sum_i Y_{ij})^2/n$  deviates from the  $\chi_k^2$  d. f. by less than a term of order  $n^{-k/(k+1)}$ . Bergström, in (3), also attacks the one-dimensional remainder term problem, and derives the Esseen-Berry estimate in a way similar to Lindeberg's method for proving the central limit theorem: he uses a „smoothing term“ and a recursive estimation procedure, based directly on the convolution formula. In (4), the method is extended to the multi-dimensional case, yielding an estimate of the difference between the d. f. of the normalized vector sum and the corresponding  $k$ -dimensional normal d. f.; the estimate is of order  $n^{-1/2}$ . Törnqvist, in (5), takes up a much more general problem. Let there be given a sequence  $x = (x_1, x_2, \dots)$  of random variables, not necessarily independent, and a sequence of functions  $u_1(x), u_2(x), \dots$ , depending on  $x_1; x_1, x_2; \dots$



respectively, and corresponding to the sums in the ordinary central limit theorem. Let the d. f.'s of these functions be  $W_n(u)$ . Then one may ask whether there exists a sequence of constants  $a_n, b_n$  such that the normalized d. f.'s  $W_n(a_n u + b_n)$  tend to  $\Phi(u)$  as  $n \rightarrow \infty$ . The author attacks this question by means of an expansion of form  $W_n(a u + b) = \Phi(u) + \sum_{k \neq 0} w_{nak} \exp\{2\pi i k \Phi(u)\}$  where  $b$  is a function

of  $a$  and  $n$ . He arrives at certain sufficient conditions for the convergence in question; they are, however, rather complicated. *G. Elfving.*

**Garti, Y.:** Les lois de probabilité pour les fonctions statistiques (cas de collectifs à plusieurs dimensions). *Revue math. Un. Interbalkan.* 3, Nr. 1/2, 21—39 (1940).

**Consoli, T.:** Généralisation d'un théorème sur la probabilité de la somme d'un nombre infini de variables aléatoires. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* 5, 1—17 (1940) [Französisch mit türk. Zusammenfassg.].

**Silberstein, Ludwik:** The accumulation of chance effects and the Gaussian frequency distribution. *Philos. Mag., VII. Ser.* 35, 395—404 (1944).

**Dieulefait, C. E.:** Einige neue Ableitungen von Grenzwerten von Wahrscheinlichkeitsfunktionen. *Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A* 2, 25—30 (1941) [Spanisch].

Über einige Grenzwerte von Wahrscheinlichkeitsfunktionen in Verbindung mit den Schemata der Ansteckung von Polya. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

**Orts, J. M<sup>a</sup>.:** Über einige Folgen von Zufallsveränderlichen. *Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser.* 5, 53—57 (1945) [Spanisch].

Transformationen von Folgen von Zufallsvariablen und Berechnung von Grenzwerten. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

**Fan, Ky:** Généralisation du théorème de M. Khintchine sur la validité de la loi des grands nombres pour les suites stationnaires de variables aléatoires. *C. r. Acad. Sci., Paris* 220, 102—104 (1945).

Let  $X_1, X_2, \dots$  be a sequence of random variables such that  $E(X_k^2)$  are finite and  $\sup_{n,m} n^{-1}[E(X_{n+1} + \dots + X_{n+m})^2 - E(X_1 + \dots + X_n)^2] < \infty$ ,  
 $\sup_m [E\{X_{m+1}(X_1 + \dots + X_m)\} - E\{X_{m+2}(X_1 + \dots + X_{m+1})\}] < \infty$ .

Then  $n^{-1}(X_1 + \dots + X_n)$  converges in probability. This result is stated without proof. *K. Yosida.*

**Fan, Ky:** Sur l'extension de la formule générale d'interpolation de M. Borel aux fonctions aléatoires. *C. r. Acad. Sci., Paris* 218, 260—262 (1944).

There exists a system of polynomials  $P_{m,n}(t)$ , defined for  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq m \leq n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), such that  $\lim_{m \rightarrow n} \Pr\{|X(t) - \sum_{m=0}^n X(m/n) P_{m,n}(t)| < \varepsilon\} = 1$  uniformly in  $0 \leq t \leq 1$  for any  $\varepsilon > 0$  and for any random function  $X(t)$  which is continuous in probability and has a bounded expectation. *K. Yosida.*

**Fan, Ky:** Sur l'approximation et l'intégration des fonctions aléatoires. *Bull. Soc. math. France* 72, 97—117 (1944).

Let a random function  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , be continuous in the sense of Slutsky. Then it can be approximated by polynomials in  $t$  with random coefficients. An analogous approximation in the mean is also discussed. The results are applied to the Slutsky's definition of the integral of a random function. *K. Yosida.*

**Fan, Ky:** Une définition descriptive de l'intégrale stochastique. *C. r. Acad. Sci., Paris* 218, 953—955 (1944).

The stochastic integral  $I(X(t))$ , in the sense of Slutsky, of a random function  $X(t)$ ,  $a < t < b$ , is characterized by the properties that  $I(X(t) + Y(t)) = I(X(t)) + I(Y(t))$ , that  $\lim I(X_k(t)) = I(X(t))$  in probability whenever  $E(|X(t) - X_k(t)|)$  tends uniformly to zero, and that for every  $X(t)$  of the form  $X(t) = x(t)A$ , where  $x(t)$  is an ordinary function and  $A$  a random variable, the integral  $I(X(t))$  reduces to  $A$  multiplied by the Riemann integral of  $x(t)$ . *K. Yosida.*

Dieulefait, C. E.: Über das Slutskysche sinusoidale Grenzesetz, hergeleitet aus einer neuen Folge von Zufallsvariablen. An. Soc. Cl. Argentina 134, 237—285 (1942) [Spanisch].

Hadwiger, H.: Die Erfahrungsnachwirkung bei Wahrscheinlichkeiten. Experimentia 1, 87—89 (1945).

Untersuchung von Wahrscheinlichkeiten  $p(t)$  von der Form  $p(t) = \frac{a}{a+B(t)}$ :  
 $B(t) = b + c \int_0^t (1 - p(x)) dx$ .  $p(t)$  muß in diesem Fall der Diff. Gl. genügen:  
 $p' = k(p^2 - p^2)$ ;  $a, b, c, k$  sind Konstanten. Anwendung auf biologische Gesamtheiten.  
 W. Saxer.

Orts, J. M<sup>a</sup>.: Über einige iterierte Wahrscheinlichkeiten. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 4, 153—158 (1944) [Spanisch].

Spezialfall der Markoffschen Ketten.

J. M<sup>a</sup>. Orts.

Cernuschi, Felix, and Ernesto Saleme: Ein neues Schema der Wahrscheinlichkeitsansteckung. An. Soc. Cl. Argentina 138, 201—213 1944) [Spanisch].

Spezialfälle der Markoffschen Ketten.

J. M<sup>a</sup>. Orts.

Mihoc, G.: Sur le problème des itérations dans une suite d'épreuves. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 45, 81—95 (1943).

Asymptotische Abschätzung der Momente im Falle der Markoffschen Ketten.

J. M<sup>a</sup>. Orts.

Doob, J. L.: What is a stochastic process? Amer. math. Monthly 49, 648—653 (1942).

The relation of the notion of the stochastic processes to measure theory is explained for non-specialists.

K. Yosida.

Doob, J. L.: The elementary Gaussian processes. Ann. math. Statistics 15, 229—282 (1944).

Let the chance variables  $\{x(t)\}$  be temporally homogeneous and Gaussian (t. h. G.), that is, let the joint distribution of  $x(t_1 + h), \dots, x(t_n + h)$  be Gaussian and independent of  $h$ . A t. h. G. process  $\{x(t)\}$  is Markovian (M.) if  $E(x(t_{n+1}) | x(t_1), \dots, x(t_n)) = E(x(t_{n+1}) | x(t_n))$  for  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ . It is called deterministic if  $x(s + t) = A(t)x(s)$ ,  $t \geq 0$ , with probability 1. If the t. h. G. M. processes  $\{x(t)\}$ ,  $\{y(t)\}$  be such that every  $x(s)$  is independent of  $y(t)$ , then the t. h. G. M. process with variables  $(x(t), y(t))$  is called the direct product of  $\{x(t)\}$  and  $\{y(t)\}$ . It is proved that a t. h. G. M. process is the direct product of deterministic processes of four simple types (three if  $t$  runs through the real axis) and a process with no deterministic factors. Also several equivalent conditions are given for a one-dimensional t. h. G. process to be a component process of a certain  $n$ -dimensional t. h. G. M. process.

K. Yosida.

Itô, Kiyosi: On stochastic processes. I. (Infinitely divisible laws of probability.) Japanese J. Math. 18, 261—301 (1942).

A systematic and rigorous reconstruction of P. Lévy's infinitely divisible law (this Zbl. 16, 170) is given. The author classifies distribution functions  $\{F(x)\}$  by the equivalence relation  $F(x) \sim F(x + a)$  (for any  $a$ ). The classes are partially ordered by writing  $f \leq g$  if a distribution in the class  $f$  is the convolution of one in the class  $g$  with a third distribution. Let  $\varrho(f, g)$  be the infimum of Lévy's distance between pairs of distributions in  $f$  and  $g$ . Then any set of classes which is order bounded from below is totally  $\varrho$ -bounded. Thus if  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$  or if  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$ , then  $\lim f_n$  exists in  $\varrho$ -sense. By making use of these notions, the author gives rigorous derivations of Lévy's formula for the characteristic function of an infinitely divisible law, together with its relation to the stochastic process with independent increments.

K. Yosida.

**Itô, Kiyosi:** On the normal stationary process with no hysteresis. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 199—202 (1944).

Without knowing, owing to the wartime situation. J. L. Doob's papers [Ann. of Math. 43, 351—369 (1942) and Ann. math. Statistics 15, 229—282 (1944); see last review but one], the following results are obtained. Let a real random function  $x(t)$ , with  $t$  running through all integers or all real numbers, constitute a stationary Gaussian process, viz. the joint distribution of  $(x(t_1 + h), x(t_2 + h), \dots, x(t_n + h))$  is Gaussian and independent of  $h$  for any finite set of  $t$ -values  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Then this process is a Markoff process if and only if  $E(x(s)x(s+t))$  has the form  $\exp(-a|t|)$  with positive  $a$ . Moreover, a normal form for such processes is given in terms of the Gaussian processes with stationary uncorrelated increments. K. Yosida.

**Itô, Kiyosi:** On the ergodicity of a certain stationary process. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 54—55 (1944).

The stationary Gaussian process (for the definition see the preceding review) is, by the group of probability preserving transformation of the  $t$  axis, ergodic and strongly mixing if and only if the auto-correlation  $E(x(s)x(s+t))$  converges to zero when  $|t| \rightarrow \infty$ . K. Yosida.

**Itô, Kiyosi:** A kinematic theory of turbulence. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 120—122 (1944).

The velocity component  $u(t)$ , at a given point in a given direction and at time  $t$ , of a temporally homogeneous isotropic turbulence determines a stationary stochastic process. If the turbulence is of Gaussian type, the stochastic process is a stationary Gaussian process and the processes corresponding to orthogonal directions are mutually independent. Thus, by the result quoted in the preceding review,  $E(u(s)u(s+t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T u(t)u(t+s)ds$  almost certainly if the left hand term tends to zero as  $|t| \rightarrow \infty$ . K. Yosida.

**Nakano, Hidegorô:** Über stochastischen Prozeß. I. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 513—518 (1944).

A foundation of the stochastic processes depending upon a continuous time parameter is outlined, based upon the author's work on topological measure [Proc. phys.-math. Soc. Japan, III. Ser. 25, 279—334 (1943)]. The author claims that his foundation is simpler than that of J. L. Doob (this Zbl. 17, 27). K. Yosida.

**Ville, J.:** Sur les processus stochastiques stationnaires analytiques. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 101—103 (1943).

**Ambarzumian, G. A.:** Studium eines Spezialfalles eines stetigen stochastischen Prozesses. Moskovsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski, Mat. 10, 120—138 (1940) [Russisch].

**Blackwell, D. and M. A. Girshick:** On functions of sequences of independent chance vectors with applications to the problem of the „random walk“ in  $k$  dimensions. Ann. math. Statistics 17, 310—317 (1946).

$x_i$  sei eine Folge gleichverteilter, unabhängiger stochastischer Vektoren im  $k$ -dimensionalen Raum.  $S_1, S_2, \dots$  sei eine Folge unabhängiger Ereignisse,  $S_i$  hänge von den ersten  $i$  Vektoren ab,  $\sum W(S_i) = 1$ .  $q_j$  sei eine reelle oder komplexe Funktion, abhängig von den ersten  $j$  Vektoren.  $E(q_i) = 0$ ,  $E(q_j | x_1, \dots, x_i) = q_i$  für  $j \geq i$ . Ferner sei  $n = i$ , wenn  $S_i$  eintritt, und  $q = q_i$ . Die Verf. geben eine allgemeine Bedingung für die  $q_i$ , damit  $E(q) = 0$  (Verallgemeinerung eines Resultates von Wald für  $k = 1$ ). W. Sauer.

**Silberstein, L.:** Solution of the restricted problem of the random walk. Philos. Mag., VII. Ser. 35, 538—543 (1944).



**Kac, M.:** Random walk in the presence of absorbing barriers. *Ann. math. Statistics* **16**, 62—67 (1945).

$x_1, x_2, \dots$  seien unabhängige symmetrische stochastische Variablen.  $N$  sei der kleinste Wert für  $n$ , so daß entweder  $x_1 + \dots + x_n > p$  oder  $x_1 + \dots + x_n < -q$  ( $p, q \geq 0$ ). Der Verf. bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $N > n$  unter der Voraussetzung, daß die Verteilungen der  $x_i$  gleich und bekannt sind.

W. Saxon.

**Pólya, George:** Sur une généralisation d'un problème élémentaire classique, importante dans l'inspection des produits industriels. *C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 1422—1424 (1946).

Zweidimensionaler „Random-walk“ unter folgender Voraussetzung: Start im Punkt  $(0, 0)$  zu einem Punkt mit ganzzahligen Koordinaten. In jedem solchen Punkt  $(x, y)$  bewegt er sich mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  in der  $x$ -Richtung zum Punkt  $(x+1, y)$  oder mit der Wahrscheinlichkeit  $1-p$  in der  $y$ -Richtung zum Punkt  $(x, y+1)$ . Beim Verlassen des Streifens  $D: -h_1 + s(x+y) < x < h_2 + s(x+y)$ , wobei  $h_1, h_2 > 0, s(s-1)^{-1} = ab^{-1}$ ,  $a, b$  positive ganze teilerfremde Zahlen, hört der Prozeß auf. Für  $(x, y) \in D$  sei  $K(x, y)$  die Anzahl der Wege zu diesem Punkt.  $D$  kann in Teilgebiete  $D_k$  derart zerlegt werden, daß  $(x+a, y+b)$  das Gebiet  $D_{k+1}$  durchläuft, wenn  $(x, y) \in D_k$ . Daraus folgt die Existenz von ganzen Zahlen  $r, c_1, \dots, c_r$ , so daß  $c_r K(x, y) + c_{r-1} K(x+a, y+b) + \dots + c_1 K(x+(r-1)a, y+(r-1)b) + K(x+ra, y+rb) = 0$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß der Weg an der Grenze von  $D$  endet, ist  $\sum K(x, y) p^x (1-p)^y$ , wobei über alle Punkte  $(x, y) \in D$  summiert werden muß, so daß  $(x-1, y)$  oder  $(x, y-1) \in D$ . Sowohl diese Wahrscheinlichkeit als auch die Erwartung der Dauer des Prozesses ist eine rationale Funktion von  $p$ .

W. Saxon.

(1) Cameron, R. H. and W. T. Martin: The Wiener measure of Hilbert neighborhoods in the space of real continuous functions. *J. Math. Physics* **23**, 195—209 (1944).

(2) Cameron, R. H. and W. T. Martin: Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations. *Trans. Amer. math. Soc.* **58**, 184—219 (1945).

In the space  $C$  of all continuous functions  $x(t)$  on  $(0, 1)$  and vanishing at  $t=0$ , the Brownian motion measure (Wiener's measure) of the set of functions satisfying the inequality  $\int_0^1 x(t)^2 dt < R^2$  is evaluated (1). (2): The Brownian motion measure of the image by the transformation  $x(t) \rightarrow y(t) = x(t) + x_0(t) + \int_0^1 K(t, s) x(s) ds$  of a (Brownian) measurable subset of  $C$  is evaluated, under appropriate regularity conditions concerning  $K(t, s)$  and  $x_0(t)$ . It is applied to the evaluation of the characteristic function of the random variable  $\int_0^1 x(t)^2 dt$ .

K. Yosida.

**Itô, Kiyosi:** Stochastic integral. *Proc. imp. Acad. Tokyo* **20**, 519—524 (1944).

Let  $g(t, \omega)$  define, when  $0 \leq t \leq 1$  and when  $\omega$  varies on a probability space, a Brownian motion. As an extension of the Wiener's integral  $\int_0^1 f(s) dg(s, \omega)$  for  $f \in L_2(0, 1)$ , the author defines the integral of the form  $\int_0^1 f(s, \omega) dg(s, \omega)$  for those functions  $f(s, \omega)$  which are, when  $u > t \geq s$ , independent of  $(g(u, \omega) - g(t, \omega))$ .

K. Yosida.

Wiener, Norbert: Die Theorie der statistischen Extrapolation. Bol. Soc. mat. Mexicana 2, 37—42 (1945) [Spanisch].

Extrapolationsproblem einer Wahrscheinlichkeitsfolge im ergodischen Falle. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Bass, Jean: Sur la structure des fonctions aléatoires. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 190—192 (1945).

Betrachtung der Differentialgleichung, der die Wahrscheinlichkeitsdichte genügt, und die in einem Falle einen Markoffschen Prozeß erzeugt. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Bass, Jean, Georges Dedeant et Philippe Wehrlé: Les équations différentielles aléatoires. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 168—171 (1945).

Isotropische Lösungen vom stationären Typus einiger Differentialgleichungen mit Zufallsvariablen. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

(1) ● Arley, Niels: On the theory of stochastic processes and their application to the theory of cosmic radiation. Thesis, University of Copenhagen 1943. 240 p. [Englisch mit dänischer Zusammenfassg.].

(2) Arley, Niels and Vibeke Borchsenius: On the theory of infinite systems of differential equations and their application to the theory of stochastic processes and the perturbation theory of quantum mechanics. Acta math. 76, 261—322 (1945).

(3) Arley, Niels: On the elementary, time-homogeneous, discontinuous, stochastically definite process. Skand. Aktuarietidskr. 27, 172—176 (1944).

From an analytical point of view, these investigations are concerned with infinite systems of linear differential equations, in matrix notation [1]  $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ ,  $Y(t_0) = Y_0$ , where  $A(t)$  is an infinite matrix. The underlying probabilistic problem is to find the transition probabilities for a Markov process with an enumerable number of states; in this application,  $B(t)$  vanishes.  $A(t)$  is the matrix of differential transition probabilities, and the elements of  $Y(t)$  are the probabilities of the states  $0, 1, \dots$  at time  $t$ , given the distribution  $Y_0$  at time  $t_0$ . (1) is mainly concerned with this latter aspect, a large part of it being devoted to physical applications. (2) gives an improved and generalized version of the main mathematical results, including a discussion of pathologic cases and an application to quantum mechanics. (3) treats the special case where transitions are possible only to the nearest higher state and the process is time-homogeneous. In the probabilistically relevant case  $B(t) = 0$ , a formal solution of [1] is given by  $Y(t) = \overline{P}'_{t_0}(I + A(u) du) \cdot Y_0$  where the first factor is a new notation for Volterra's product integral. A sufficient condition for this solution to be valid and unique in  $(t_0, t_1)$  is that  $A(t)$  be „absolutely exponentiable“ in that interval; this means that the matrix series  $\sum K^n |t - t_0|^n / n!$ , with  $k_{ij} = \max_{(t_0, t_1)} |a_{ij}(t)|$ , converges. —

The main new problems arise from the requirement that the solution be a probability distribution; various conditions for this are given. — In (1) special attention is given to multi-dimensional stochastic processes, i. e. processes where the states are described by several subscripts. *G. Elfving.*

Dedeant, G. et Ph. Wehrlé: Mécanique aléatoire. I. Le calcul aléatoire. Portugaliae Phys. 1, 95—149 (1944).

Dedeant, G. et Ph. Wehrlé: Mécanique aléatoire. I. Le calcul aléatoire. (suite). II. Applications physiques. Portugaliae Phys. 1, 179—296 (1945).

Anwendung der Zufallsvariablen und Zufallsfunktionen und der stochastischen Prozesse auf physikalische Vorgänge: Thermodynamik, Analyse periodischer Vorgänge, Diffusion, Brownsche Molekularbewegung usw. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Bass, Jean, Georges Dedeant et Philippe Wehrlé: Sur la connexion aléatoire d'un fluide. Application à la turbulence. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 165—167 (1945).

Besprechung der Turbulenz einer Flüssigkeit, die in ihrer Bewegung einem gewissen Wahrscheinlichkeitsgesetz folgt. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Bass, Jean: Les fonctions aléatoires et leur interprétation mécanique. *Revue sci.* 83, 3—20 (1945).

Kritische Betrachtung der mechanischen Erläuterung der stochastischen Prozesse. Verallgemeinerung der Gleichungen von Boltzmann und Clausius durch die Anwendung der Markoffschen Ketten.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Potoček, J.: La diffusion et la notion de réversibilité de M. Kolmogoroff. *Bull. internat. Acad. Sci. Bohême* 1939, 1—10 (1939).

Hostinský, Bohuslav: Über die Wahrscheinlichkeit von Änderungen in einem System, das sich im Laufe der Zeit entwickelt. *Rozpravy II. Třída České Akad.* 50, Nr. 26, 9 p. (1940) [Tschechisch].

Campbell, N. R. and V. J. Francis: Random fluctuations in a cathode ray oscillograph. *Philos. Mag.*, VII. Ser. 37, 289—310 (1946).

● Borel, Émile et André Chéron: Théorie mathématique du bridge à la portée de tous. 134 tableaux de probabilités avec leurs modes d'emploi. Formules simples. Applications. Environ 4000 probabilités. Monographies des Probabilités, Fasc. V. Paris: Gauthier-Villars 1940. XX, 392 p.

Anderson, T. W.: On card matching. *Ann. math. Statist.* 14, 426—435 (1943).

Asymptotische Verteilungen in verschiedenen Kartenspielen, mit möglicher Anwendung auf einige psychologische Probleme.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Uspensky, J. V.: Über das Problem des Ruins von Spielern. *Univ. nac. Litoral, Inst. Mat.*, Publ. 7, 155—186 (1945) [Spanisch].

Lösung des Problems des Ruins von Spielern im Spezialfall, daß einer unendlich reich ist.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Hsu, P. L. and K. L. Chung: Sur un théorème de probabilités dénombrables. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 223, 467—469 (1946).

Les AA. établissent un théorème applicable aux jeux de hasard „bernoulliens avec probabilité constante commensurable“ et où s'introduit la convergence ou la divergence d'une série.

*A. Sade.*

Fréchet, Maurice: A note on the „problème des rencontres“. *Amer. math. Monthly* 46, 501 (1939).

*S. dies. Zbl.* 21, 39.

Fréchet, Maurice: Les systèmes d'événements et le jeu des rencontres. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 4, 95—126 (1944).

Zusammenfassung der Forschungen des Verf. über Wahrscheinlichkeiten, die einem System von zusammenhängenden und verträglichen Ereignissen entsprechen, die der Verf. bereits behandelt hat (*dies. Zbl.* 60. 283).

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Cattaneo, Paolo: Sul problema delle concordanze. *Ist. Veneto Sci. Lett. Arti.*, Atti, Cl. Sci. mat. natur. 101, 89—104 (1942).

Cattaneo, Paolo: Sul problema delle concordanze generalizzato. *Ist. Veneto Sci. Lett. Arti, Atti, Cl. Sci. mat. natur.* 103, 439—456 (1944).

Le problème en question (G. Silva, *ce Zbl.* 28, 168) est celui des coïncidences dans un jeu de patience appelé compter par  $m$ , joué avec un jeu de cartes de  $r$  couleurs, les cartes de chaque couleur étant numérotées de 1 à  $n$ . Compter par  $m$  signifie compter les nombres 1 à  $m$  au fur et à mesure des cartes sortantes autant de fois qu'il est nécessaire jusqu'à ce que le paquet soit vide. On a une coïncidence lorsque le numéro de la carte et le nombre appelé concordent. On cherche la probabilité qu'il y ait  $c$  ou au moins  $c$  coïncidences. — Dans le premier article, l'A. étend aux termes d'ordre  $n^{-2}$  le résultat de Silva dans l'expression approchée de la probabilité qu'il y ait exactement  $c$  coïncidences. Dans le second article, le problème est généralisé aux cas de deux paquets de cartes, toujours d'un nombre arbitraire de couleurs et de cartes dans chaque couleur. L'A. ne fait pas mention de la littérature américaine et anglaise étendue se rapportant aux problèmes de cartes.

*S. Bays.*



Batiéle, Edgar: Le problème des stocks. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 355—357 (1946).

Batiéle, étant donnés  $n$  magasins contenant chacun  $s$  objets, calcule la probabilité pour que  $k$  magasins soient épuisés après  $q$  achats. *A. Sade.*

Fine, N. J. and Ivan Niven: The probability that a determinant be congruent to  $a \pmod{m}$ . Bull. Amer. math. Soc. **50**, 89—93 (1944).

Nilssen, Bailli: Einige Bemerkungen über Abzählung. Norsk mat. Tidsskr. **27**, 106—111 (1945) [Norwegisch].

Giltay, J.: A counter arrangement with constant resolving time. Physica **10**, 725—734 (1943).

Eine Reihe von statistisch verteilten Impulsen soll durch eine Zählordnung gezählt werden. Die Impulse, welche innerhalb einer Zeit  $h$  nach einem gezählten Impuls ankommen, werden nicht gezählt und sollen auf die Zählordnung keinen weiteren Einfluß haben. Es wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, daß bei gegebener mittlerer Zahl der ankommenden Impulse  $x$  Impulse in einem Zeitintervall der Länge  $t$  gezählt werden, für folgende beiden Fälle: A) Die Zählordnung wird zu Beginn des Intervalls  $t$  in Betrieb gesetzt; B) die Zählordnung ist dauernd in Betrieb. Das Problem kann als spezieller Fall einer Aufgabe aus der Fernsprechtechnik aufgefaßt werden. Es wird eine Apparatur angegeben, welche die angegebenen Voraussetzungen über die Auflösungszeit erfüllt. *J. Meixner.*

Robbins, H. E.: On the measure of random set. Ann. math. Statistics **15**, 70—74 (1944).

Robbins, H. E.: On the measure of a random set. II. Ann. math. Statistics **16**, 342—347 (1945).

Bronowski, J. and J. Neyman: The variance of the measure of a two-dimensional random set. Ann. mat. Statistics **16**, 330—341 (1945).

Votaw jr., David F.: The probability distribution of the measure of a random linear set. Ann. math. Statistics **17**, 240—244 (1946).

Fréchet, Maurice: Valeurs moyennes attachées à un triangle aléatoire. Revue sci. **81**, 475—482 (1943).

L'A. considère divers mécanismes de détermination de fonctions rattachées à un triangle aléatoire. Il compare les résultats observés et calculés. *A. Sade.*

Raimondi, Elba R.: Ein Problem der geometrischen Wahrscheinlichkeit in einer Dreiecksmenge. Revista Un. mat. Argentina **8**, 1—16 (1942) [Spanisch].

Erforschung des folgenden Problems: Wahrscheinlichkeit, daß zwei Geraden, jede durch zwei Punkte eines Dreiecks bestimmt, sich im Inneren des Dreiecks schneiden. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Gotusso, Guido: Probabilità di rottura di un filo. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. sci. mat. natur. **78** (III. Ser. 9), 182—190 (1945).

Es sei  $P$  die theoretische Bruchspannung für einen gegebenen Faden und  $p < P$ . Die Bruchwahrscheinlichkeit  $f(p, l)$  für eine Strecke von der Länge  $l$  wird definiert als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es irgendwo auf der Strecke ein Element gibt, dessen Bruchspannung, wegen zufälliger Ungenauigkeit,  $\leq p$  ist. Für eine willkürliche Einheitslänge  $l = \lambda$  wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung eine halbe Gaußsche Verteilung ist, so daß

$$f(p, l) = [\psi(p)]^{l/\lambda}, \quad \psi(p) = \frac{1}{\sigma(P-p)} \int_0^{P-p} \exp(-x^2) dx. \quad B. de Finetti.$$

Nicolini, Tito: Un tipo di curva a curvatura distribuita come la densità della probabilità nella legge normale. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. **13**, 109—115 (1945).

Kurve  $\varrho = a \exp(s/c)^2$ ;  $\varrho$  = Krümmungsradius,  $s$  = Bogenlänge.

*B. de Finetti.*

## Statistik:

Woffenden, H. H.: The fundamental principles of mathematical statistics. Toronto, Ont. Macmillan Comp. of Canada Ltd. 1942. XV, 379 p.; \$ 5,00.

● Wilks, S. S.: Mathematical statistics. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1943. XI, 284 p.; \$ 3,75.

● Weatherburn, C. E.: A first course in mathematical statistics. Cambridge: At the University Press and New York: The Macmillan Company 1946. XV, 271 p.; \$ 3,50.

● Kingston, Jorge: Die Theorie der statistischen Induktion. Rio de Janeiro: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística 1945. 121 p. [Portugiesisch].

Hartley, H. O.: Recent advances in mathematical statistics: bibliography of mathematical statistics (1939). J. roy. statist. Soc. 103, 534—560 (1940).

Camp, Burton H.: Some recent advances in mathematical statistics. I. Ann. math. Statistics 13, 62—73 (1942).

Craig, Cecil C.: Recent advances in mathematical statistics. II. Ann. math. Statistics 13, 74—85 (1942).

Mahalanobis, P. C.: Mathematics and statistics. Sample curves. Science and Culture 7, Suppl. 1—2 (1942).

● Lindner, A.: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften 6. Mathematische Reihe. Band III. Basel: Verlag Birkhäuser 1945. 150 S.

● Divisia, F.: Technique et statistique. 192 p., 28 fig.

Abdruck der Arbeitenreihe des Verf. in Ann. Ponts. Chaussées 111 II, 389—448 (1941); 112, 177—202, 257—276, 383—392 (1942).

● Molina, E. C.: Poisson's exponential binomial limit. Table I: Individual terms. Table II: Cumulated terms. New York: Van Nostrand Comp., Inc. 1942. V, 47 p.; \$ 2,75.

Thompson, Catherine M.: Tables of percentage points of the incomplete beta-function. Prefatory note by E. S. Pearson; description of the calculation by L. J. Comrie and H. O. Hartley; methods of interpolation by H. O. Hartley. Biometrika 32, 151—181 (1941).

Comrie, L. J., and H. O. Hartley: Table of Lagrangian coefficients for harmonic interpolation in certain tables of percentage points. Biometrika 32, 183—186 (1941).

Scheffé, Henry: Note on the use of the tables of percentage points of the incomplete beta function to calculate small sample confidence intervals for a binomial  $p$ . Biometrika 33, 181 (1944).

Merrington, M.: Table of percentage points of the  $t$ -distribution. Biometrika 32, 300 (1942).

Baldwin, Elizabeth M.: Table of percentage points of the  $t$ -distribution. Biometrika 33, 362 (1946).

Worcester, Jane and Edwin B. Wilson: A table determining L. D. 50 or the fifty per cent end-point. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 207—212 (1943).

Goudsmit, S. A. and W. H. Furry: Significant figures of numbers in statistical tables. Nature 154, 800—801 (1944).

Furry, W. H. and Henry Hurwitz: Distribution of numbers and distribution of significant figures. Nature 155, 52—53 (1945).

Curtiss, J. H.: Generating functions in the theory of statistics. Amer. math. Monthly 48, 374—386 (1941).

● Treloar, Alan E.: Random sampling distributions. Minneapolis, Minn.: Burgess Publishing Co. 1942. 94 p.; \$ 2,25.

**Bose, Purnendu and S. Raja Rao:** On the limiting forms of statistical distributions. *Science and Culture* 9, 402—403 (1944).

**Burr, I. W.:** Cumulative frequency functions. *Anh. math. Statist.* 13, 215—232 (1942).

In tale lavoro, l'A. detta  $F(b) - F(a)$  la probabilità della limitazione  $a \leq x \leq b$  nel continuo e  $F(b+h) - F(a)$  la probabilità della stessa limitazione nel discontinuo ( $h$  = intervallo fra due ascisse consecutive), considera accanto agli usuali momenti del tipo  $\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^j dF(x)$  altri del tipo  $\int_a^{\infty} (x-a)^j [1-F(x)] dx - \int_{-\infty}^a (x-a)^j dF(x)$ . Nel discontinuo  $(x-a)^j$  viene sostituito con  $(x-a) \cdot (x-a-h) \cdot (x-a-2h) \dots (x-a-(j-1)h)$ . I nuovi momenti sono espressi mediante gli usuali e consentono alcuni vantaggi rispetto a quest'ultimi nell'interpolazione di particolari tipi di funzioni. *C. Benedetti.*

**Kärsna, A.:** Über das System der einmodigen Häufigkeitskurven. *Acta Comment. Univ. Tartuensis* A 35, Nr. 1, 65 S. (1940).

**Reiersöl, Olav:** Measures of departure from symmetry. *Skand. Aktuarietidskr.* 27, 229—234 (1944).

**Ottestad, Per:** On certain compound frequency distributions. *Skand. Aktuarietidskr.* 27, 32—42 (1944).

**Hagstroem, K.-G.:** Un problème du calcul stochastique. *Försäkringsmatematiska Studier tillägnade Filip Lundberg*, 104—127. Stockholm: 1946.

This rather scattered collection is concerned with one-variate distributions in general. Kärsna presents a four-parameter system of frequency curves, and practical procedures for their fitting. The curves have the common analytical form  $y = A\{1 + \cos \pi [\log(a + bx)/\log \beta]^n\}$  and are intended to replace Pearson's system. — Reiersöl proposes a new measure  $S$  of departure from symmetry;  $S$  vanishes if and only if the distribution is strictly symmetrical. — Ottestad studies distributions that are obtained from a one-parameter family of distributions by weighing with respect to the parameter. — Hagstroem writes on the interpolation of moments when two or more moments are known. *G. Elfvig.*

**Birnbaum, Z. W.:** An inequality for Mill's ratio. *Ann. math. Statistics* 13, 245—246 (1942).

**Fisher, R. A.:** The negative binomial distribution. *Ann. Eugenics* 11, 182—187 (1941).

**Gaddum, J. H.:** Lognormal distributions. *Nature* 156, 463—466 (1945).

**Hald, A. Hjorth:** Die gestutzte Normalverteilung. *Mat. Tidsskr. B* 1946, 83—91 (1946) [Dänisch].

**Quensel, Carl-Erik:** Studies of the logarithmic normal curve. *Skand. Aktuarietidskr.* 28, 141—153 (1945).

**Quensel, Carl-Erik:** An extension of the validity of „Student“-Fisher's law of distribution. *Skand. Aktuarietidskr.* 26, 210—219 (1943).

**Lindblom, Sven G.:** On the connection between tests of significance for correlation coefficients and for differences between means. *Skand. Aktuarietidskr.* 29, 12—29 (1946).

**Odhoff, W.:** Some studies of the characteristic functions and the semi-invariants of Pearson's frequency-functions. *Försäkringsmatematiska Studier tillägnade Filip Lundberg*, 168—179. Stockholm: 1946.

These are studies in particular probability distributions. — Hald treats the estimation problem for the distribution  $F(x) = 0$  ( $x < 0$ ),  $F(x) = \Phi[(x - \xi)/\sigma]$  ( $x \geq 0$ ). Quensel in his first paper deals with the distribution of a random variable of form  $x = a + \exp(m + \sigma y)$  where  $y$  is normally distributed, and



some generalizations thereof; methods for testing the hypothesis mentioned, and estimating the parameters, are developed. In the second paper the same author studies the distribution of the sample statistics, particularly Student's  $t$ , when the sample variables are normal with different variances. Lindblom draws attention to certain connected distributions in univariate as well as multivariate sampling theory. Odhnoff shows that the characteristic functions of the Pearson distributions satisfy a linear homogeneous differential equation of second order with four parameters.

*G. Elfving.*

Bliss, C. I.: A chart of the chi-square distribution. *J. Amer. statist. Assoc.* 39, 246—248 (1944).

Morrell, A. J. H.: Note on Wilson and Hilferty's approximation to the  $\chi^2$ -distribution. *J. roy. statist. Soc.* 107, 59 (1944).

Haldane, J. B. S.: Moments of  $r$  and  $\chi^2$  for a fourfold table in the absence of association. *Biometrika* 33, 231—233 (1945).

Haldane, J. B. S.: The use of  $\chi^2$  as a test of homogeneity in a  $(n \times 2)$ -fold table when expectations are small. *Biometrika* 33, 234—238 (1945).

Fernández Baños, O.: Beitrag zum Studium von Pearsons  $\chi^2$ . *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 6, 66—83 (1946) [Spanisch].

Bhattacharyya, A.: A note on the distribution of the sum of chi-squares. *Sankhyā* 7, 27—28 (1945).

Crow, James F.: A chart of the  $\chi^2$  and  $t$  distributions. *J. Amer. statist. Assoc.* 40, 376 (1 plate) (1945).

Goldberg, Henry and Harriet Levine: Approximate formulas for the percentage points and normalization of  $t$  and  $\chi^2$ . *Ann. math. Statistics* 17, 216—225 (1946).

Methode für die Normalisation der Koeffizienten von  $t$  und  $\chi^2$ , mit den entsprechenden Tabellen.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Stevens, W. L.: Mathematische Theorie einiger in der Statistik gebrauchter Verteilungen. *Revista Fac. Ci. Univ. Coimbra* 10, 247—288 (1942); 11, 85—102 (1943) [Portugiesisch].

Analytische Entwicklungen der  $\chi^2$ -,  $t$ -,  $z$ -Verteilungen.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Feraud, L.: Problème d'analyse statistique à plusieurs variables. *Ann. Univ. Lyon*, III. Sér., Sect. A 5, 42—53 (1942).

L'A. donne des exemples de problèmes pouvant, ou non, être traités au moyen de la distribution de Student [*Biometrika* 6. 1—25 (1908)] et de Student généralisée.

*A. Sade.*

Peiser, Alfred M.: Asymptotic formulas for significance levels of certain distributions. *Ann. math. Statistics* 14, 56—62 (1943).

Asymptotische Formeln für die Verteilung  $t$  von Student.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Wilson, E. B.: Note on the  $t$ -test. *Amer. math. Monthly* 51, 563—566 (1944).

Rao, C. Radhakrishna: On the sum of  $n$  observations from different gamma type populations. *Science and Culture* 7, 614—615 (1942).

Gage, Robert: Contents of Tippet's „Random Sampling Numbers“. *J. Amer. statist. Assoc.* 38, 223—227 (1943).

Dodd, Edward L.: A transformation of Tippet random sampling numbers into numbers normally distributed. *Bol. mat.* 15, 73—77 (1942).

Transformationsmethode der Tippet-Zahlen im Falle eines normalen Kollektivs.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Fréchet, Maurice: Nouvelles définitions de la valeur moyenne et des valeurs équiprobables d'un nombre aléatoire. *Ann. Univ. Lyon*, III. Sér., Sect. A 9, 5—26 (1946).

L'A. généralise, au moyen de suites  $Y_n$  qui convergent vers  $X$  pour  $n$  infini trois nouvelles définitions des valeurs typiques (valeurs équiprobables et valeur moyenne) du nombre aléatoire  $X$ .

*A. Sade.*

- Hsu, L. C.: Some combinatorial formulas on mathematical expectation. *Ann. math. Statistics* 16, 369—380 (1945).
- Robbins, H. E.: On the expected values of two statistics. *Ann. math. Statistics* 15, 321—323 (1944).
- Toledo Piza, Alfonso P. de: Repräsentative Werte einer Verteilung. Dispersionsindizes. *Anais Acad. Brasil. Ci.* 18, 209—235 (1946) [Portugiesisch].
- Rodrigues, Milton da Silva: On an extension of the concept of moment with applications to measures of variability, general similarity, and overlapping. *Ann. math. Statistics* 16, 74—84 (1945).
- Baer, Reinhold: Sampling from a changing population. *Ann. math. Statistics* 16, 348—361 (1945).
- $x(t)$  mit  $0 \leq t \leq 1$  habe den Erwartungswert  $a(t)$  und die zentralen Momente  $M_j(t)$ . Aus einer Stichprobe  $\{x(t_j)\}$ ,  $j=1, \dots, n$ , mit  $(j-1) \cdot n^{-1} < t_j < j \cdot n^{-1}$  seien gebildet:  $\bar{x} = n^{-1} \sum x_j$ ,  $d^2 = (2n)^{-1} \sum (x_j - x_{j+1})^2$ ,  $s^2 = n^{-1} \sum (x_j - \bar{x})^2$ . Bei  $n \rightarrow \infty$  konvergieren  $\bar{x}$ ,  $d^2$  und  $s^2$  stochastisch bzw. gegen  $a = \int a(t) dt$ ,  $M_2 = \int M_2(t) dt$  und  $M_2 + \int (a(t) - a)^2 dt$ . — Stochastische Konvergenz für weitere Statistiken und Varianzen derselben. H. Richter.
- Irwin, J. O., and M. G. Kendall: Sampling moments of moments for a finite population. *Ann. Eugenics* 12, 138—142 (1944).
- Ghizzetti, A.: Sui momenti di 2° ordine di una legge di probabilità in  $n$  dimensioni. *Rend. Mat. e Appl., V. Ser.* 4, 94—101 (1943).
- Bose, Purnendu: Certain moment calculations connected with multivariate normal populations. *Science and Culture* 7, 411—412 (1942).
- Sen Gupta, J. M.: A note on adjustments for first and second moments in a grouped frequency distribution split up into subsections. *Sankhya* 6, 413—414 (1944).
- Kreis, H.: Lineare Abhängigkeit und Äquivalenz von Punktsystemen. *Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath.* 46, 169—186 (1946).
- Bestimmung aller äquivalenten Dreiecke (Ebene) bzw. Tetraeder (Raum) eines Punktsystems. Äquivalente Dreiecke haben die gleichen 1. und 2. Momente bezüglich der Koord. ihrer Eckpunkte unter Annahme einer homogenen Massenverteilung in den Ecken. W. Saxer.
- Demelenne, J.: Théorie des sommantes. *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* 15, 192—204 (1946).
- Schneider, Otto: Über einen zur Kennzeichnung zweidimensionaler statistischer Verteilungen geeigneten Parameter. *An. Soc. ci. Argentina* 133, 397—401 (1942) [Spanisch].
- Asymptotische Formeln einiger Parameter, die in der normalen Verteilung von zwei Variablen vorkommen. J. M<sup>a</sup>. Orts.
- Brown, L. M.: Some parameters of sampling distributions simply obtained. *Edinburgh math. Notes* Nr. 34, 8—11 (1944).
- Cornfield, Jerome: On samples from finite populations. *J. Amer. statist. Assoc.* 39, 236—239 (1944).
- Shrivastava, M. P.: The distribution of the mean for certain Bessel function populations. *Science and Culture* 6, 244—245 (1940).
- Szatrowski, Zenon: Calculating the geometric mean from a large amount of data. *J. Amer. statist. Assoc.* 41, 218—220 (1946).
- Janardana Aiyer, S.: On the arithmetic and the geometric means from a type III population. *Math. Student* 13, 11—15 (1945).
- Shafei, A. M. N.: On the standard deviation of samples drawn from a type III distribution. *Proc. math. phys. Soc. Egypt* 1, Nr. 3, 1—8 (1939).

Pearson, E. S.: The probability integral of the mean deviation. *Biometrika* 33, 252—253 (1945).

Godwin, H. J.: On the distribution of the estimate of mean deviation obtained from samples from a normal population. *Biometrika* 33, 254—256 (1945).

Hartley, H. O.: Note on the calculation of the distribution of the estimate of mean deviation in normal samples. *Biometrika* 33, 257—258 (1945).

Tables of the probability integral of the mean deviation in normal samples. *Biometrika* 33, 259—265 (1945).

Baker, G. A.: Distribution of the ratio of sample range to sample standard deviation for normal and combinations of normal distributions. *Ann. math. Statistics* 17, 366—369 (1946).

Bose, Chameli: Note on the sampling error in the method of double sampling. *Sankhyā* 6, 329—330 (1943).

Bose, Purnendu: On the exact distribution of the ratio of two means belonging to samples drawn from a given correlated bivariate normal population. *Bull. Calcutta math. Soc.* 34, 139—141 (1942).

Cheng, Tseng-Tung: A simplified formula for mean difference. *J. Amer. statist. Assoc.* 39, 240—242 (1944) and *Coll. Papers Sci. Engin. nat. Univ. Amoy* 1, 69—72 (1943).

Bose, Chameli: The variance of the forecasted mean value subjecting to two-way fluctuations. *Science and Culture* 7, 514 (1942).

Irwin, J. O.: A table of the variance of  $\{\bar{x}$  when  $x$  has a Poisson distribution. *J. roy. statist. Soc.* 106, 143—144 (1943).

Neumann, J. von: Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance. *Ann. math. Statistics* 12, 367—395 (1941).

Siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i valori di  $n$  osservazioni indipendenti su una variabile casuale  $X$  con media  $\bar{x}$ , varianza  $\sigma^2$  e distribuzione normale. Sia poi  $\bar{x}$  la media dei valori osservati,  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ,  $\delta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$ . L'A. determina la distribuzione del rapporto  $\eta = \delta^2 / s^2$  al variare del campione dei valori osservati. A tale scopo egli mostra che la detta distribuzione può ricavarsi come caso particolare dalla distribuzione  $\omega(\gamma)$  della  $\gamma = \sum_{i=1}^{n-1} B_i x_i^2$ , dove il punto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  varia uniformemente sulla superficie sferica  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ , e  $B_1 \leq B_2 \leq \dots \leq B_m$ . Tale  $\omega(\gamma)$  può ricavarsi dalla equazione  $\int_{B_m}^{\gamma} (\gamma - z)^{m-2} \omega(\gamma) d\gamma = \prod_{i=1}^m (B_i - z)^{-\frac{1}{2}}$  sotto determinate ipotesi per i  $B_i$  e per  $m$  pari. L'A. mostra infine che  $\eta$  ed  $s$  sono indipendenti stocasticamente. T. Salvemini.

Neumann, J. von: A further remark concerning the distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance. *Ann. math. Statistics* 13, 86—88 (1942).

In questo lavoro l'A. estende il risultato ricavato nel suo precedente studio togliendo la restrizione di  $m$  pari. Mostra inoltre che detto risultato si presta a determinare la distribuzione del rapporto

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+1} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

quando  $n$  è pari e le  $x_i$  sono elementi ricavati come precedentemente da una popolazione normale. T. Salvemini.



Hart, B. L.: Tabulation of the probabilities for the ratio of the mean square successive difference to the variance. Note by John von Neumann. *Ann. math. Statistics* 13, 207—214 (1942).

Questo lavoro si modella a quelli di von Neumann (v. las) le due precedenti recensioni) riguardanti la funzione di distribuzione del rapporto  $q$  sopra indicato tra il quadrato delle differenze successive e la varianza di  $n$  osservazioni. Edificava il valore dell'integrale  $\int_0^1 m(q) dy$  per  $n=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60$  e

per valori di  $k$  di 0.5 in 0.5 entro quei limiti per i quali l'integrale ha valori da 0.05 a 0.10. La tabulazione è sufficiente a determinare, per i valori considerati di  $n$ , l'1% e il 5% di livello di significatività.

*T. Salvemini.*

Hart, B. L.: Significance levels for the ratio of the mean square successive difference to the variance. *Ann. math. Statistics* 13, 445—447 (1942).

L'A. estende ulteriormente la tabulazione di cui si è detto nella precedente segnalazione. Edificava i valori di  $k$  per i quali  $\int_0^1 m(y) dy = .001, .01, .05$  per un numero  $n$  di osservazioni da 4 a 60 e, per questi stessi valori di  $n$ , tabulazione i valori di  $k$  per i quali  $\int_0^1 m(y) dy = .999, .99, .95$ .

*T. Salvemini.*

Dyson, F. J.: A note on kurtosis. *J. roy. statist. Soc.* 106, 360—361 (1943).

Kaplansky, Irving: A common error concerning kurtosis. *J. Amer. statist. Assoc.* 40, 259 (1945).

Raiford, T. E.: Skewness of combined distributions. *J. Amer. statist. Assoc.* 37, 391—393 (1942).

Michalup, E.: Über den Begriff „Exzess“ in der mathematischen Statistik. *Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath.* 46, 231—236 (1946).

Verf. gibt Gründe für die Richtigkeit der Lindebergschen Definition des Exzesses.

*W. Saxon.*

Hirschman, Albert O.: On measures of dispersion for a finite distribution. *J. Amer. statist. Assoc.* 38, 346—352 (1943).

Onicescu, O.: Les structures planes. *Bull. math. Soc. Roumaine Sci.* 45, 63—76 (1943).

Onicescu, O. et G. Mihoc: Le coefficient de dispersion et la dépendance des épreuves. *Bull. math. Soc. Roumaine Sci.* 46, 77—80 (1944).

Hoel, Paul G.: On indices of dispersion. *Ann. math. Statistics* 14, 155—162 (1943).

Erterschung der Anpassung der  $\chi^2$ -Verteilung für kleine Stichproben mit binomialen oder Poissonschen Indizes.

*J. M<sup>o</sup>. Orts.*

Gumbel, E. J.: On the frequency distribution of extreme values in meteorological data. *Bull. Amer. meteorol. Soc.* 23, 95—105 (1942).

Gumbel, Émile-J.: Détermination commune des constantes dans les distributions des plus grandes valeurs. *C. r. Acad. Sci., Paris* 222, 34—36 (1946).

L'A. donne une détermination, à l'aide des moments, des constantes dans les distributions des plus grandes valeurs [cf. M. Fréchet, *Ann. Soc. Polon. Math.* 6, 93—122 (1928) et R. A. Fisher & L. H. C. Tippett, *Proc. Cambridge philos. Soc.* 24, 180—190 (1928)].

*A. Sade.*

Rajalakshman, D. V.: On the extreme values of samples taken from a rectangular population. *Math. Student* 9, 103—111 (1941).

Walsh, John E.: Some order statistic distributions for samples of size four. *Ann. math. Statistics* 17, 246—248 (1946).

Geary, R. C.: Minimum range for quasi-normal distributions. *Biometrika* 33, 100—103 (1943).

Rajalakshman, D. V.: On the interval between the ranked individuals of samples taken from a rectangular population. *J. Madras Univ., Sect. B* 15, 31—44 (1943).

Roy, S. N. and Kalishankar Banerjee: On hierarchical sampling, hierarchical variances and their connexion with other aspects of statistical theory. *Science and Culture* 6, 189 (1940).

Linder, Arthur: Sur la manière d'organiser les expériences afin d'obtenir un rendement maximum. *Arch. Sci. physiques natur. V. Sér.* 28, 181—191 (1946).

Hansen, Morris H. and William N. Hurwitz: On the theory of sampling from finite populations. *Ann. math. Statist.* 14, 333—362 (1943).

Erforschung der Schemata stratifizierter Stichproben, mit Anwendung auf die Probleme der Volkszählung.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Dodge, H. F.: A sampling inspection plan for continuous production. *Ann. math. Statistics* 14, 264—279 (1943).

Ein Plan für die Beobachtung der Stichproben von Manufakturartikeln.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Mood, Alexander M.: On the dependence of sampling inspection plans upon population distributions. *Ann. math. Statistics* 14, 415—425 (1943).

Wald, A. and J. Wolfowitz: Sampling inspection plans for continuous production which insure a prescribed limit on the outgoing quality. *Ann. math. Statistics* 16, 30—49 (1945).

Konstruktion des Inspektionsplanes PSA für laufende Produktion II eines Artikels von den Eigenschaften  $\mp$  und  $-$ . PSA garantiert durch Wechsel von Teil- und Vollinspektion mit Wahrscheinlichkeit Eins einen Mindestanteil von  $\mp$ -Artikeln im Ausstoß und erfordert bedingt minimalen Inspektionsaufwand bei statistisch verteilten  $\mp$  und  $-$  in II. — Modifikationen von PSA zwecks Anwendbarkeit auf Inspektion von Warenposten und zur Vermeidung größerer Schwankungen in Teilsequenzen.

*H. Richter*

Curtiss, J. H.: A note on some single sampling plans requiring the inspection of a small number of items. *Ann. math. Statistics* 17, 62—70 (1946).

Wald, Abraham: On the efficient design of statistical investigations. *Ann. math. Statistics* 14, 134—140 (1943).

Siano  $y_1, y_2, \dots, y_N$   $N$  variabili fra loro indipendenti e distribuite normalmente con la stessa varianza  $\sigma^2$ . Il valore probabile di ogni  $y_x$  è supposto dall'autore essere una combinazione lineare di  $p$  parametri  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  ognuno incognito:  $E(y_x) = \beta_1 x_{1x} + \beta_2 x_{2x} + \dots + \beta_p x_{px}$  dove le  $x_{ix}$  sono calcolate mediante le osservazioni preposte a raccogliere i valori di  $y_x$ . Seguendo Kolodziejczyk (questo Zbl. 11, 220) e il Tang (questo Zbl. 20, 243) e mediante altre considerazioni che non possono essere riassunte brevemente l'autore arriva a diverse definizioni della misura dell'efficienza di un piano di esperimenti, giungendo a risultati interessanti. Ad esempio secondo una di queste definizioni lo schema dei „quadrati latini“ e „greco latini“ risultano più efficienti di altri particolari classi di schemi.

*C. Benedetti.*

Fisher, R. A.: The logical inversion of the notion of the random variable. *Sankhyā* 7, 129—132 (1945).

Court, Louis M.: A reciprocity principle for the Neyman-Pearson theory of testing statistical hypotheses. *Ann. math. Statistics* 15, 326—327 (1944).

Lehmann, Erich: Une propriété optimale de certains ensembles critiques du type A. *C. r. Acad. Sci., Paris* 223, 567—569 (1946).

L'A. étudie, à l'occasion de lois de probabilité élémentaires à  $n$  variables, dépendant d'un paramètre, l'ensemble critique uniformément le plus puissant

des ensembles bien placés (type  $A_1$ , cf. J. Neyman, *ce Zbl.* **14**, 321, 357, 358).  
A. Sade.

Scheffé, Henry: Statistical inference in the non-parametric case. *Ann. math. Statistics* **14**, 305—332 (1943).

Kritische und historische Betrachtung der Methoden von Fisher, Pitman und Scheffé.  
J. M<sup>a</sup>. Orts.

Scheffé, Henry: On a measure problem arising in the theory of non-parametric tests. *Ann. math. Statistics* **14**, 227—233 (1943).

Vergleich der statistischen Hypothesen im Falle unbekannter Verteilungsfunktionen.  
J. M<sup>a</sup>. Orts.

Scheffé, Henry: On the theory of testing composite hypotheses with one constraint. *Ann. math. Statistics* **13**, 280—293 (1942).

In questo lavoro l'A. estende la teoria di Neyman-Pearson sul controllo delle ipotesi „testing hypotheses“ al caso che la legge di distribuzione dei campioni sia a più parametri. Il metodo è condotto sul modello di quello di Neyman-Pearson, ma l'analisi è più estesa ed è presentata con chiarezza. T. Salvemini.

Rao, C. Radhakrishna and S. Janardhan Poti: On locally most powerful tests when alternatives are one sided. *Sankhyā* **7**, 439 (1946).

Wolfowitz, J.: Additive partition functions and a class of statistical hypotheses. *Ann. math. Statistics* **13**, 247—279 (1942).

È un interessante lavoro sui „tests“ delle ipotesi statistiche. Uno dei problemi trattati è il seguente: detti  $n_1$  ed  $n_2$  due serie di osservazioni indipendenti di due variabili casuali relative a due popolazioni delle cui funzioni di distribuzione si sa solamente che sono continue, si chiede un „test“ per decidere quando le due popolazioni suddette sono identiche. L'Autore tratta il problema estendendo opportunamente il rapporto di verosimiglianza di Neyman-Pearson, ed allo scopo di agevolare le applicazioni dei procedimenti esposti si serve delle funzioni additive di partizione delle quali espone nuovi ed utili risultati. C. Benedetti.

Wald, A. and J. Wolfowitz: An exact test for randomness in the non-parametric case based on serial correlation. *Ann. math. Statistics* **14**, 378—388 (1943).

Betrachtung einiger Hypothesen die in der Theorie des Qualitätskontrolle vorkommen.  
J. M<sup>a</sup>. Orts.

Wald, A.: Sequential tests of statistical hypotheses. *Ann. math. Statistics* **16**, 117—186 (1945).

Darstellung der prinzipiell neuen Sequenz-Analysis zur Testierung statistischer Hypothesen, die von den USA während des Krieges bei der Materialkontrolle benutzt wurde. Im Gegensatz zu den bisherigen Testen mit einer festen Anzahl von Versuchen steht man bei einem Sequenz-Test nach jeder Beobachtung vor den folgenden 3 Entscheidungen: Die Hypothese  $H_0$  wird angenommen, verworfen, oder es wird eine neue Beobachtung gemacht. Die Anzahl der Beobachtungen ist demnach eine stochastische Variable. Das beschriebene Testverfahren (the sequential probability ratio test) wird im Sinne der Neyman-Pearsonschen Theorie untersucht und es wird gezeigt, daß es verschiedene optimale Eigenschaften besitzt. Im 1. Teil wird die Theorie auf die Testierung einer Hypothese gegen eine andere angewendet, im 2. Teil werden Tests einer oder mehrerer Hypothesen gegen eine ganze Menge von Alternativen diskutiert. Anwendungen auf ganz bestimmte Verteilungen. Die Sequenz-Analysis ist in vielen Fällen rationeller bei gleicher Sicherheit wie Tests mit einer bestimmten Anzahl von Versuchen.

W. Saxer.

Brookner, R. J.: Choice of one among several statistical hypotheses. *Ann. math. Statistics* **16**, 221—242 (1945).

Im klassischen Entscheidungsproblem mit vorgegebenem Stichprobenumfang und einer endlichen Entscheidungsdisjunktion wird eine Vorschrift zur entspre-



chenden Einteilung des Merkmalraumes unter Berücksichtigung der Verlustfunktion angegeben, die im allgemeinen nicht zur Minimax-Lösung führt, aber leichter zu handhaben ist.

*H. Richter.*

Aroian, Leo A.: A new approximation to the levels of significance of the chi-square distribution. *Ann. math. Statistics* 14, 93—95 (1943).

Erforschung der  $\chi^2$  Verteilung als quadratische Funktion der Schiefe.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Satterthwaite, Franklin E.: Linear restrictions on chi-square. *Ann. math. Statistics* 13, 326—331 (1942).

L'autore studia il caso in cui le  $m < n$  lineari indipendenti relazioni fra le  $n$  variabili componenti la costante  $\chi^2$  siano anzichè omogenee non omogenee; in tal caso egli giunge con una semplice correzione su  $\chi^2$  alla sua usuale distribuzione con gli stessi gradi di libertà.

*C. Benedetti.*

Chandra Sekar, C. and Mary G. Francis: A method to get the significance limit of a type of test criteria. *Sankhyā* 5, 165—168 (1941).

L'autore considera il „test“ basato sul massimo di un insieme di costanti statistiche. Viene studiata la distribuzione del massimo  $M$  di  $k$  costanti  $M_1, \dots, M_k$  dove  $M_i = m_i(m_1 + \dots + m_k)^{-1}$  con  $m_1, m_2, \dots, m_k$  indipendenti tra loro con distribuzione del  $\chi^2$  con  $f$  gradi di libertà. In seguito viene mostrato che nell'intervallo  $(\frac{1}{2}, 1)$  la densità della probabilità della distribuzione di  $M$  è uguale a  $k$  volte la densità di probabilità di  $M_1$ . In seguito, fra l'altro, l'autore ritrova anche un risultato di Cochran [*Ann. Eugenics* 11, 47—52 (1941)].

*C. Benedetti.*

Pätau, K.: Zur statistischen Beurteilung von Messungsreihen (Eine neue  $t$ -Tafel). *Biol. Zbl.* 63, 152—168 (1943).

Dieulefait, C. E.: Note on a method of sampling. *Ann. math. Statistics* 13, 94—97 (1942).

Questo articolo tratta del problema di Olds (questo Zbl. 24, 53). Il problema è questo: in una massa di  $m = s + r$  elementi  $s$  di essi sono di carattere conosciuto, facendo estrazioni successive senza rimettere l'elemento estratto nella massa fino ad avere  $j$  degli  $s$  elementi di cui sopra, si domanda 'qual'è la legge di probabilità del numero  $n$  delle estrazioni per avere  $j$ . L'autore trova come legge di  $n$  per  $j \leq n \leq r + j$  la legge normale.

*C. Benedetti.*

Simpson, Harold: On a theorem concerning sampling. *J. roy. statist. Soc.* 106, 266—267 (1943).

Kempthorne, O.: Comments on the note „On a theorem concerning sampling“. *J. roy. statist. Soc.* 107, 58 (1944).

Bezieht sich auf die vorstehend angezeigte Note.

Mourier, Édith: Étude du choix entre deux lois de probabilité. *C. r. Acad. Sci., Paris* 223, 712—714 (1946).

L'A. caractérise „la difficulté de distinguer“ entre deux lois  $F$  et  $G$  par leur „distance statistique  $(F, G)$ “, définie à partir de l'idée de résumé exhaustif (Dar-mois, 23<sup>me</sup> session de l'Institut International de Statistique, Athènes 1936) et retrouve ainsi la quantité d'information de Fisher.

*A. Sade.*

Mathen, K. K.: A criterion for testing whether two samples have come from the same population without assuming the nature of the population. *Sankhyā* 7, 329 (1946).

(1) Geppert, Maria-Pia: Über den Vergleich zweier beobachteter Häufigkeiten. *Deutsche Math.* 7, 553—592 (1944).

(2) Gildemeister, M. and B. L. van der Waerden: Die Zulässigkeit des  $\chi^2$ -Kriteriums für kleine Versuchszahlen. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl.* 95, 145—150 (1944).

(1) gibt eine zusammenfassende, kritische Darstellung verschiedener Tests zur Prüfung der Gleichheit der zwei Stichproben aus Bernoulli-Gesamtheiten zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten. Für den Spezialfall des  $\chi^2$ -Tests liefert (2) eine Tabelle von Irrtumswahrscheinlichkeiten für kleine Stichprobenumfänge.

H. Richter.

Simon, Herbert A.: Symmetric tests of the hypothesis that the mean of one normal population exceeds that of another. *Ann. math. Statistics* 14, 149—154 (1943).

Mathisen, Harold C.: A method of testing the hypothesis that two samples are from the same population. *Ann. math. Statistics* 14, 188—194 (1943).

Stein, Charles: A two-sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance. *Ann. math. Statistics* 16, 243—258 (1945).

Theorem: Es seien die  $x_i$  unabhängig normal verteilt mit  $E(x_i) = \xi$  und  $\text{var}(x_i) = \sigma^2$ . Es werde aus einer Stichprobe mit vorgegebenem Umfang  $n_0$  die Schätzung  $s^2$  gebildet und hieraus der endgültige Stichprobenumfang  $n$  bestimmt zu  $n = \max\{[s^2/z] + 1, n_0 + 1\}$  mit vorgegebenem  $z$ . Zur Testung von  $\xi = \xi_0$  wird  $t' = z^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_1^n a_i x_i - \xi_0 \right)$  gebildet mit  $\sum a_i = 1$  und  $s^2 \sum a_i^2 = z$ . Dann

ist  $u = t' - z^{-\frac{1}{2}}(\xi - \xi_0)$  verteilt wie Students  $t$  mit  $n_0 - 1$  Freiheitsgraden. — Folgerung: Von  $\sigma^2$  unabhängige Teststärke; Ermöglichung von Konfidenzintervallen konstanter vorgegebener Länge. — Seinerzeit grundlegend, da genannte Eigenschaft nur bei Sequenztests möglich. — Ausdehnung auf den Fall der allgemeinen linearen Hypothese.

H. Richter.

Hoel, Paul G.: Testing the homogeneity of Poisson frequencies. *Ann. math. Statistics* 16, 362—368 (1945).

$x_i$  genügen unabhängig voneinander Poisson-Verteilungen mit Erwartungswerten  $m_i$ ;  $i = 1$  oder 2. Es wird bei vorgegebener Signifikanzschranke  $\alpha$  für die Hypothese  $m_1/m_2 = r$  ein von  $m_1 + m_2$  unabhängiger kritischer Bereich konstruiert, der auf  $x_1 + x_2 = \text{const}$  most powerful gegen  $m_1/m_2 < r$  ist. Praktisch äquivalent mit dem  $\chi^2$ -Test.

H. Richter.

Festinger, Leon: An exact test of significance for means of samples drawn from populations with an exponential frequency distribution. *Psychometrika* 8, 153—160 (1943).

Festinger, Leon: A statistical test for means of samples from skew populations. *Psychometrika* 8, 205—210 (1943).

Festinger, Leon: The significance of difference between means without reference to the frequency distribution function. *Psychometrika* 11, 97—105 (1946).

Scheffé, Henry: On the ratio of the variances of two normal populations. *Ann. math. Statistics* 13, 371—388 (1942).

Questo lavoro esamina i tests di significatività della ipotesi che il rapporto  $\Theta$  tra le varianze di due campioni casuali tratti da una popolazione normale, abbia un valore  $\Theta_0$ , ed inoltre determina l'intervallo di confidenza per  $\Theta$ . L'A. usa vari tests, tra cui quello basato sul rapporto di rassomiglianza e quello sulla minore grandezza del logaritmo dell'intervallo di confidenza, il quale si presenta come preferibile.

T. Salvemini.

Nandi, H. K.: Note on tests applied to samples from normal bivariate population. *Science and Culture* 12, 249 (1946).

Villars, D. S. and T. W. Anderson: Some significance tests for normal bivariate distributions. *Ann. math. Statistics* 14, 141—148 (1943).

Beschränkende Hypothesen für die mehrdimensionalen Verteilungen.

J. M<sup>a</sup>. Orts.

Kosambi, D. D.: A test of significance for multiple observations. *Current Sci.* **11**, 271—274 (1942).

Rao, C. Radhakrishna: Studentised tests of linear hypotheses. *Science and Culture* **11**, 202—203 (1945).

Gleissberg, W.: Ein Kriterium für die Realität zyklischer Variationen. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **10**, 36—42 (1945) [Mit türkischer Zusammenfassg.].

Swed, Frieda S. and C. Eisenhart: Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives. *Ann. math. Statistics* **14**, 66—87 (1943).

Walsh, John E.: On the power function of the sign test for slippage of means. *Ann. math. Statistics* **17**, 358—362 (1946).

Barnard, G. A.: A new test for  $2 \times 2$  tables. *Nature* **156**, 177 (1945).

Hussain, Q. M.: A note on interactions. *Sankhyā* **6**, 321—322 (1943).

Bonnier, Gert: The four-fold table and the heterogeneity test. *Science, n. Ser.* **96**, 13—14 (1942).

Wilson, Edwin B.: On contingency tables. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **28**, 94—100 (1942).

Fréchet, Maurice: Fondements des méthodes statistiques d'estimation. *Portugaliae Math.* **5**, 137—141 (1946).

Scheffé, H. and J. W. Tukey: Non-parametric estimation. I. Validation of order statistics. *Ann. math. Statistics* **16**, 187—192 (1945).

Die  $X_i, i = 1, \dots, n$ , seien unabhängig verteilt mit übereinstimmender Verteilungsfunktion  $F(x)$ ;  $Z_i$  seien die Anordnungsstatistiken der Stichprobe  $\{X_i\}$ . Theorem: Ist  $F$  stetig, so ist die gemeinsame Verteilungsfunktion von Statistiken  $F(Z_{i_k}), \{i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ , unabhängig von  $F$ . Folgerung: Die Thompson-Nair-Lösung für die Quantile und die Wilks-Lösung für den  $b$ -Anteil sind für beliebiges stetiges  $F$  gültig. Bei beliebigem  $F$  sind beide Lösungen gültig, falls Aussagen der Art  $p(Z_k \leq y \leq Z_l | F) = 1 - \alpha$  ersetzt werden durch:

$$p(Z_k < y < Z_l | F) \leq 1 - \alpha \leq p(Z_k \leq y \leq Z_l | F). \quad H. Richter.$$

Carlton, A. George: Estimating the parameters of a rectangular distribution. *Ann. math. Statistics* **17**, 355—358 (1946).

Cramér, Harald: A contribution to the theory of statistical estimation. *Skand. Aktuarietidskr.* **29**, 85—94 (1946).

This important paper extends to the multi-parameter case the idea of a lower bound for the variation of any unbiased estimate of a parameter, the estimate being calculated from a sample with a joint distribution depending on the parameter in question. Let  $f(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  be a frequency function,  $\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*$  unbiased estimates of the parameters,  $\lambda_{ij}$  the variances and covariances of these estimates, and  $\mu_{ij} = E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial \log f}{\partial \alpha_j}\right)$  the elements of the so-called information matrix. Then, under certain regularity assumptions, the matrices  $M = A^{-1}$  and  $A = M^{-1}$  are always non-negative; cf. the case  $k = 1$ , where this amounts to  $\text{var}(\alpha^*) \geq 1/E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2$ .

G. Elfving.

Kolmogoroff, A.: Confidence limits for an unknown distribution function. *Ann. math. Statistics* **12**, 461—463 (1941).

Wald, Abraham: Asymptotically shortest confidence intervals. *Ann. math. Statistics* **13**, 127—137 (1942).

L'autore generalizza il concetto del più breve sistema di intervalli di confidenza dando alcune definizioni di sistema asintoticamente più breve di intervalli di confidenza. L'autore, in base a tali definizioni, prova alcuni interessanti teoremi e si riallaccia ai risultati di Wilks (questo Zbl. **19**, 357) sui sistemi di intervalli di confidenza più brevi in media.

C. Benedetti.



**Wald, Abraham:** Setting of tolerance limits when the sample is large. *Ann. math. Statistics* **13**, 389—399 (1942).

Dato un campione di dimensione  $n$  scelto da una massa  $p$ -dimensionale implicante  $K$  parametri incogniti, l'autore affronta il problema di trovare tra le  $p$  coppie  $U_i, L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) limiti di tolleranza più favorevoli per essere applicati ad un secondo campione di dimensione  $N$  tratto dalla stessa massa e tale che  $U_i - L_i$  sia minimo in certi casi. Il problema è considerato per  $N$  finito e per  $N \rightarrow \infty$ , inoltre si danno soluzioni di tale problema per  $n$  grande. Il problema è stato risolto da Wilks (vedasi la susseguente recensione) per  $p=1$  e tale soluzione sembra la migliore possibile se non si sa altro che la funzione di densità incognita è continua. Ulteriori informazioni sulla natura della funzione incognita consentono di ottenere anche per  $p=1$  limiti di tolleranza migliori di quelli ottenuti da Wilks.

*C. Benedetti.*

**Wilks, S. S.:** Statistical prediction with special reference to the problem of tolerance limits. *Ann. math. Statistics* **13**, 400—409 (1942).

L'autore affronta e discute i seguenti problemi. Dati i valori  $X_1$  ed  $X_n$  che indicano rispettivamente il più piccolo e il più grande valore in un campione di dimensione  $n$  di una variabile aleatoria  $X$ : 1) Quale è la probabilità  $P'$  che almeno  $N_0$  valori in un secondo campione eccedano il limite di tolleranza  $X_1$  posto per il primo campione? 2) Quale è la probabilità  $P$  che almeno  $N_0$  valori di  $X$  nel secondo campione cadano tra i 2 limiti di tolleranza  $X_1$  e  $X_2$  posti per il primo campione? 3) Per dati valori di  $n, N$  ed  $\alpha$  qual'è il più grande intero  $N_x$  tale che la probabilità  $P'$  sia almeno  $\alpha$  che  $N_0 \leq N_x$ ; qual'è il  $\lim_{N, \infty} [N_x/N] = \lim_{X, \infty} R_x$ ? *C. Benedetti.*

**Wald, Abraham:** An extension of Wilks's method for setting tolerance limits. *Ann. math. Statistics* **14**, 45—55 (1943).

L'autore dà un metodo per stabilire i limiti di tolleranza per due o più variabili statistiche dipendenti. Il detto procedimento di scelta dei limiti di tolleranza è indipendente dalla funzione di densità incognita delle variabili. Il caso di due variabili è trattato in ogni dettaglio seguito da appropriati esempi numerici.

*C. Benedetti.*

**Paulson, Edward:** A note on tolerance limits. *Ann. math. Statistics* **14**, 90—93 (1943).

L'autore studia le relazioni intercorrenti tra i limiti di tolleranza e quelli di confidenza. Da tale studio scaturisce un metodo per stabilire i limiti di tolleranza per una coppia di variabili  $x$  ed  $y$  normalmente distribuita sulla base di un campione di  $n$  osservazioni.

*C. Benedetti.*

**Robbins, Herbert:** On distribution-free tolerance limits in random sampling. *Ann. math. Statistics* **15**, 214—216 (1944).

**Scheffé, H. and J. W. Tukey:** A formula for sample sizes for population tolerance limits. *Ann. math. Statistics* **15**, 217 (1944).

(1) Ville, Jean: Sur l'application, à un critère d'indépendance, du dénombrement des inversions présentées par une permutation. *C. r. Acad. Sci., Paris* **217**, 41—42 (1943).

(2) Ville, J.: Sur la transitivité d'une méthode d'estimation. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* **7**, 14—20 (1944).

(3) Ville, Jean: Sur la théorie invariante de l'estimation statistique. *Bull. Sci. math., II. Sér.* **68**, 95—108 (1944).

(1) exprime par comparaison avec le nombre des inversions présentées par une permutation, l'indépendance et l'invariance de la loi de probabilité. (2) traitant du choix des lois de probabilités, donne un exemple où la même méthode (N) conduit à préférer  $f$  à  $g$ ,  $g$  à  $h$ ,  $h$  à  $f$ , voir aussi (3).

*A. Sade.*

Fisher, R. A.: The likelihood solution of a problem in compounded probabilities. *Ann. Eugenics* **11**, 306—307 (1942).

Fréchet, M.: Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons. *Revue Inst. internat. Statist.* **11**, 182—205 (1943).

Paulson, Edward: A note on the estimation of some mean values for a bivariate distribution. *Ann. math. Statistics* **13**, 440—445 (1942).

In questo lavoro vengono esaminati i limiti del rapporto  $m_x/m_y$  dei valori medi ricavati da un campione casuale di  $n$  coppie di valori  $(x_i, y_i)$ , tanto sotto l'ipotesi che  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$  e  $\rho_{xy}$  siano conosciuti a priori, quanto sotto l'ipotesi contraria. In ciascuno di questi casi viene pure esaminata la determinazione della stima di  $m_x$  quando  $m_y$  è noto. L'A. mostra che i risultati, ricavati sotto la condizione che la funzione di densità  $f(x, y)$  sia normale, sono validi con una buona approssimazione anche nel caso non normale se il campione è sufficientemente grande.

*T. Salvemini.*

Scheffé, Henry: On solutions of the Behrens-Fisher problem, based on the  $t$ -distribution. *Ann. math. Statistics* **14**, 35—44 (1943).

L'autore si occupa della stima dell'intervallo in cui cade la differenza tra le medie di due popolazioni normali, delle quali sono dati due campioni, nel caso che sia ignoto il rapporto delle varianze. Egli introduce opportune costanti moltiplicative che determina successivamente in modo da rendere minimo l'intervallo di confidenza della funzione  $t$ . Mostra con altri procedimenti fondati sulle differenze di forme lineari nelle quantità di ciascun campione che la soluzione ottenuta è la migliore.

*T. Salvemini.*

Scheffé, Henry: A note on the Behrens-Fisher problem. *Ann. math. Statistics* **15**, 430—432 (1944).

L'autore mostra che non esiste una soluzione simmetrica del problema di Behrens-Fisher implicante la distribuzione della  $t$ . Più precisamente, se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ed  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono due campioni di due differenti masse normalmente distribuite, inferenze possono essere fatte circa la differenza  $\delta$  tra le medie delle due masse se esiste un rapporto  $t = (L - \delta)/(Q/k)^{1/2}$  distribuito secondo la distribuzione di Student con  $k$  gradi di libertà.  $L$  e  $Q$  sono rispettivamente una forma lineare e quadratica delle osservazioni e sono indipendenti dai parametri della massa. L'autore mostra che fra le condizioni sufficienti del problema suddetto ve ne sono alcune che sono incompatibili con l'invarianza del rapporto  $t$  rispetto a permutazioni tra le  $x$  e le  $y$ .

*C. Benedetti.*

Craig, Allen T.: A note on the best linear estimate. *Ann. math. Statistics* **14**, 88—90 (1943).

Investigation of the relation between the unbiased estimates of a same parameter belonging to a same class.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Bose, C. and A. K. Gayen: Note on the expected discrepancy in the estimation (by double sampling) of a variate in terms of a concomitant variate when there exists a non-linear regression between the two variates. *Sankhya* **8**, 73—74 (1946).

Ganguli, Mohonlal: A method of estimating variance of sample grand-mean and zone variances in unequal nested sampling. *Science and Culture* **6**, 724 (1941).

Hasel, A. A.: Estimation of volume in timber stands by strip sampling. *Ann. math. Statistics* **13**, 179—206 (1942).

Mann, Henry B.: On a problem of estimation occurring in public opinion polls. *Ann. math. Statistics* **16**, 85—90 (1945).

Mann, H. B.: Correction to the paper „On a problem of estimation occurring in public opinion polls“. *Ann. math. Statistics* **17**, 87—88 (1946).

● Treloar, Alan E.: Correlation analysis. Minneapolis, Minn.: Burgess Publishing Co. 1942. 64 p.; \$ 1,50.

Cowden, Dudley J.: Correlation concepts and the Doolittle method. *J. Amer. statist. Assoc.* 38, 327—334 (1943).

Fréchet, M.: A general method of constructing correlation indices. *Proc. math. phys. Soc. Egypt* 3, 13—20 (1946).

Fréchet applique la notion de distance aux indices de corrélation. Sur ce sujet, voir aussi la note de Simaika annoncée ci-dessous. *A. Sade.*

Simaika, J. B.: Note on M. Fréchet index of correlation. *Proc. math. phys. Soc. Egypt* 3, 21—22 (1946).

Craig, Allen T.: Note on the independence of certain quadratic forms. *Ann. math. Statistics* 14, 195—197 (1943).

Hotelling, Harold: Note on a matrix theorem of A. T. Craig. *Ann. math. Statistics* 15, 427—429 (1944).

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Unabhängigkeit zweier quadratischen Formen, mit Anwendung auf die  $\chi^2$ -Verteilung. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Sawkins, D. T.: Simple regression and correlation. *J. Proc. roy. Soc. New South Wales* 77, 85—95 (1944).

Dwyer, Paul S.: Recent developments in correlation technique. *J. Amer. statist. Assoc.* 37, 441—460 (1942).

Platt, John R.: A mechanical determination of correlation coefficients and standard deviations. *J. Amer. statist. Assoc.* 38, 311—318 (1943).

Waugh, Frederick V.: The computation of partial correlation coefficients. *J. Amer. statist. Assoc.* 41, 543—546 (1946).

Roy, S. N. and Purnendu Bose: The distribution of the root-mean-square of the second type of the multiple correlation coefficient. *Science and Culture* 6, 59 (1940).

Bose, Purnendu: On the reduction formulae for the incomplete probability integral of the multiple correlation coefficient of the second kind. *Science and Culture* 7, 171—172 (1941).

Lovera, G.: Metodo abbreviato di calcolo delle caratteristiche di una correlazione multipla. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat.-natur.* 80, 194—198 (1945).

Sind die Korrelationskoeffizienten  $r_{hk}$  der  $X_1 \dots X_n$  annähernd gleich ( $r_{hk} \cong r$ ), so wird  $r$  leicht mittels  $r = [(\sigma/S)^2 - 1]/(n - 1)$  bestimmt ( $\sigma^2$  = Streuung von  $[\sum_h X_h]$ ,  $S^2 = \sum_h$  [Streuungen der  $X_h]$ ). *B. de Finetti.*

Shrivastava, M. P.: Bi-variate correlation surfaces. *Science and Culture* 6, 615—616 (1941).

Rao, C. Radhakrishna: On bivariate correlation surfaces. *Science and Culture* 8, 236—237 (1942).

Banerjee, D. P.: Note on the limit of correlation and regression coefficients in mingled records. *Math. Student* 9, 155—157 (1941).

Bhargava, R. P.: Test of significance for intra-class correlation when family sizes are not equal. *Sankhyā* 7, 435—438 (1946).

Weichelt, John A.: A first-order method for estimating correlation coefficients. *Psychometrika* 11, 215—221 (1946).

Lord, Frederic M.: Alignment chart for calculating the fourfold point correlation coefficient. *Psychometrika* 9, 41—42 (1944).

Guilford, J. P. and Thoburn C. Lyons: On determining the reliability and significance of a tetrachoric coefficient of correlation. *Psychometrika* 7, 243—246 (1942).

Hayes jr., Samuel P.: Tables of the standard error of tetrachoric correlation coefficient. *Psychometrika* 8, 193—203 (1943).

Hayes jr., Samuel P.: Diagrams for computing tetrachoric correlation coefficients from percentage differences. *Psychometrika* 11, 163—172 (1946).



Kaitz, Hyman B.: A note on reliability. *Psychometrika* 10, 127—131 (1945).

Guttman, Louis: A basis for analyzing test-retest reliability. *Psychometrika* 10, 255—282 (1945).

Guttman, Louis: The test-retest reliability of qualitative data. *Psychometrika* 11, 81—95 (1946).

Tucker, Ledyard R.: Maximum validity of a test with equivalent items. *Psychometrika* 11, 1—13 (1946).

Baker, G. A.: Correlations between functions of variables. *J. Amer. statist. Assoc.* 37, 537—539 (1942).

Fischer, C. H.: A sequence of discrete variables exhibiting correlation due to common elements. *Ann. math. Statistics* 13, 97—101 (1942).

L'A. considera un gruppo di variabili casuali  $x, y, \dots$  ricavate nel seguente modo: la prima,  $x$ , rappresenta il numero di palle bianche ricavate con lo schema delle prove ripetute con probabilità costante in un gruppo di  $s_1$  estrazioni; la seconda,  $y$ , è uguale al numero delle palle bianche ricavate da un gruppo di  $s_2$  estrazioni, delle quali  $t_{12}$  ricavate dal gruppo delle precedenti  $s_1$  estrazioni, e le restanti  $s_2 - t_{12}$  ricavate direttamente dall'urna; e così via per le altre variabili. Egli dimostra che la regressione tra le coppie di variabili è lineare e che il coefficiente di correlazione tra le prime  $k$  variabili è  $r_{1k} = r_{12} r_{23} \dots r_{k-1,k}$ .

*T. Salvemini.*

Peters, Charles C.: A new descriptive statistic: the parabolic correlation coefficient. *Psychometrika* 11, 57—69 (1946).

Fraga Torrejon, E. de: Ein aus dem Spearmanschen Korrelationskoeffizienten abgeleiteter Koppelungskoeffizient. *Euclides, Madrid* 3, 502—504 (1943) [Spanisch].

Kendall, M. G.: Note on the estimation of a ranking. *J. roy. statist. Soc.* 105, 119—121 (1942).

Greenwood, J. A.: A preferential matching problem. *Psychometrika* 8, 185—191 (1943).

Smith, B. Babington: Note on an alternant suggested by statistical theory. *Edinburgh math. Notes* Nr. 32, 19—22 (1941).

Lakshmanamurti, M.: Coefficient of association between two attributes in statistics. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 22, 123—133 (1945).

Wherry, Robert J. and Erwin K. Taylor: The relation of multiserialeta to other measures of correlation. *Psychometrika* 11, 155—161 (1946).

Andreoli, Giulio: Statistica di configurazioni. (Ricerche su coppie di variabili casuali in correlazione.) *Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli*, IV. Ser. 11, 150—158 (1941).

Es wird (hauptsächlich mit Bezug auf meteorologische Fragen) eine Problemstellung gesucht und skizziert, die vermutlich nichts anderes bedeutet als die Betrachtung der Übergangswahrscheinlichkeiten in einer Markoffschen Kette erster Ordnung.

*B. de Finetti.*

Anderson, R. L.: Distribution of the serial correlation coefficient. *Ann. math. Statistics* 13, 1—13 (1942).

Date  $n$  osservazioni  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , è noto che il coefficiente di correlazione seriale per un ritardo (lag)  $l$  è dato da

$${}_l R_n = \frac{x_1 x_{l+1} + \dots + x_{n-l} x_n}{\sum x_i} = \frac{\sum x_i x_{i+l}}{(\sum x_i)^2/n}$$

che serve nello studio delle serie storiche. L'Autore studia la distribuzione di  ${}_l R_n$  nell'ipotesi che i valori osservati siano indipendenti e appartengano ad una variabile casuale normale di assegnata media e varianza unitaria. Egli parte dal

caso  ${}_1R_n$  e da una tavola dei punti esatti di significatività per tutti i valori  $n \leq 70$ , mentre per  $n > 70$  usa l'approssimazione dei grandi campioni. Dimostra poi che la distribuzione di  ${}_1R_n$  coincide con quella di  ${}_1R_n$  se  $l$  ed  $n$  sono primi tra loro; se ciò non si verifica, dà modo di ricavare la detta distribuzione quando  $l$  è un fattore di  $n$ , e nei casi  $n/l = 2, 3$  e  $4$  dà pure i punti di significatività.

*T. Salvemini.*

**Jaspen, Nathan:** Serial correlation. *Psychometrika* 11, 23—30 (1946).

**Koopmans, T.:** Serial correlation and quadratic forms in normal variables. *Ann. math. Statistics* 13, 14—33 (1942).

L'A. prende in esame una successione probabilistica di valori il cui termine generico  $x_t$  sia legato al precedente dalla relazione  $x_t = \rho x_{t-1} + z_t$  con  $\rho$  incognito ed in valore assoluto minore di uno e con  $z_t$  appartenente ad una variabile casuale con media zero e scarto quadratico medio  $\sigma$ . Con i valori osservati  $x_1, x_2, \dots, x_t$  e usando il metodo della massima verosimiglianza l'A. ricava una stima  $\hat{\rho}$  di  $\rho$  in funzione delle quantità  $l = x_1^2 + x_T^2$ ,  $m = x_1 x_2 + \dots + x_{T-1} x_T$  ed  $n = x_2^2 + \dots + x_{T-1}^2$ . Successivamente egli studia la distribuzione del rapporto  $r = m/(l + n)$  quando le  $x_i$  sono distribuite normalmente con media zero e varianza unitaria, allo scopo di poter provare l'ipotesi  $\rho = 0$ . Se  $m$  è una forma quadratica qualsiasi, la distribuzione di densità  $h(r)$  è molto complicata, salvo il caso di  $T$  piccolo. L'A. considera anche il caso di  $\bar{r} = \bar{m}/(l + n)$  dove  $\bar{m} = x_1 x_2 + \dots + x_{T-1} x_T + x_T x_1$ , il quale si presta ad una trattazione nel continuo. Egli ricava in tal modo la seguente formula approssimata per la densità

di probabilità di  $\bar{r}$ :  $(\frac{1}{2} T - 1) 2^{T/2} \pi^{-1} \int_0^{\arccos \bar{r}} (\cos \alpha - \bar{r})^{T/2-2} \sin \frac{1}{2} T \alpha \sin \alpha d\alpha$  che è utile per ricavare la corrispondente formola nel caso più generale di  $r$ .

*T. Salvemini.*

**Dixon, Wilfrid J.:** Further contributions to the problem of serial correlation. *Ann. math. Statistics* 15, 119—144 (1944).

Sia  $a$  la media e  $\sigma^2$  la varianza di  $n$  osservazioni indipendenti  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; sia  $l$  il ritardo (lag). Posto  $x_x = a + b x_{x-l}$ , l'A. trova i criteri di verosimiglianza per provare alcuni tests. Egli ricava vari momenti delle quantità:

$$\sum_1^n (x_i - \bar{x}) (x_{i+l} - \bar{x}) / \sum (x_i - \bar{x})^2, \quad \sum x_x x_{x+l} / \sum x_x^2$$

i quali permettono di esprimere le funzioni di distribuzioni di queste stesse quantità e di altre espressioni utili per ulteriori ricerche sulla correlazione seriale. Tra l'altro egli fa pure cenno all'estensione di questa correlazione al caso di più variabili, senza peraltro addentrarsi nella trattazione.

*T. Salvemini.*

**Rubin, Herman:** On the distribution of the serial correlation coefficient. *Ann. math. Statistics* 16, 211—215 (1945).

In questo lavoro si dà una conferma ai risultati approssimati di Koopmans e Dixon (vedasi le due precedenti recensioni) riguardanti la distribuzione del coefficiente di correlazione seriale  $\bar{r}$ .

*T. Salvemini.*

**Madow, William G.:** Note on the distribution of the serial correlation coefficient. *Ann. math. Statistics* 16, 308—310 (1945).

L'autore riprende il problema trattato dall'Anderson nel 1942 (ibid. 13, 1—13) riguardante la distribuzione del coefficiente di correlazione seriale, e lo sviluppa nell'ipotesi di dipendenza tra i termini successivi anziché nel caso di indipendenza ( $\rho = 0$ ).

*T. Salvemini.*

● **Davis, Harold T.:** The analysis of economic time series. (The Cowles Commission for Research in Economics, Monograph No. 6.) Bloomington, Ind.: Principia Press, Inc. 1941. XIV, 620 p.; \$ 5,00.

● Davis, H. T.: The statistics of time series. Northwestern University Studies in Mathematics and the Physical Sciences, no. 1: Mathematical Monographs, vol. 1, p. 45—85. Graduate School, Northwestern University, Evanston, Ill., 1941. \$ 2,25.

● Kendall, M. G.: Contributions to the study of oscillatory time series. National Institute of Economic and Social Research, Occasional Papers IX. Cambridge: At the University Press; New York: The Macmillan Company 1946. VIII, 76 p.; \$ 1,75.

Pierce, Joseph A.: On the summation of progressions useful in time series analysis. J. Amer. statist. Assoc. 39, 387—389 (1944).

Niessen, A. M.: On the summation of certain progressions useful in time series analysis. J. Amer. statist. Assoc. 40, 98—100 (1945).

Glock, Waldo S.: A rapid method of correlation for continuous time series. Amer. J. Sci. 240, 437—442 (1942).

Derksen, J. B. D.: Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründungen der „Regressions-Analyse“. Nederl. Tijdschr. Natuurkunde 8, 37—54 (1941) [Holländisch].

Wei, Dzung-shu: Necessary and sufficient conditions that regression systems of sums with elements in common be linear. Nat. Math. Mag. 17, 151—158 (1943).

Tintner, G.: A note on rank, multicollinearity and multiple regression. Ann. math. Statistics 16, 304—308 (1945).

Vorgelegt sind die Gaußschen Vektoren  $\xi_t$  ( $t = 1, \dots, n$ ) mit unbekannten  $E(\xi_t) = m_t$  und bekannter Kovarianzmatrix  $\mathfrak{B}$  der  $\eta_t = \xi_t - m_t$ . Konstruktion eines Testes für die Anzahl  $R$  der linearen Bindungen  $f_r' m_t = k_r$ ;  $r = 1, \dots, R$ . Maximum-likelihood-Schätzung der  $f_r$  und  $k_r$  bei Vorgabe von  $R$ . H. Richter.

Wold, Herman: A theorem on regression coefficients obtained from successively extended sets of variables. Skand. Aktuarietidskr. 28, 181—200 (1945).

Wold, Herman: A comment on spurious correlation. Försäkringsmatematiska Studier tillägnade Filip Lundberg, 278—285. Stockholm: 1946.

These comments on regression analysis deal with the following question: when an additional explanatory variable is introduced, how will this change the regression coefficients formerly obtained? It is shown that  $b_{12.3\dots n}$ , on adding a new variable  $x_{n+1}$ , is in a certain sense equally likely to increase as to decrease; moreover, there is no inherent restriction on the values that  $b_{12.3\dots n+1}$  can assume.

G. Elfving.

Seares, Frederick H.: Regression lines and the functional relation. Astrophys. J. 100, 255—263 (1944).

Allgemeine Untersuchungen über den Fall einer linearen Beziehung  $Y_1 = A + B X_1$ , bei der sich die beobachteten Werte  $X$ ,  $Y$  von den wahren  $X_1$ ,  $Y_1$  durch Beobachtungsfehler unterscheiden. Wenn diese Fehler keine Gaußsche Verteilung haben, ist es möglich, daß die  $X$ ,  $Y$  nichtlineare Regressionen zeigen, auch wenn die Beziehung zwischen  $X_1$  und  $Y_1$  streng linear ist. K. Stumpff.

Lawley, D. N.: A note on Karl Pearson's selection formulae. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 62, 28—30 (1943).

Satterthwaite, F. E.: A generalized analysis of variance. Ann. math. Statistics 13, 34—41 (1942).

L'autore, dopo avere esposto in modo conciso l'analisi della varianza secondo gli schemi tradizionali, considera altri interessanti casi in cui essa può venire utilmente usata. L'esposizione degli schemi teorici è seguita da una interessante raccolta di applicazioni numeriche.

C. Benedetti.

Tsao, Fei: Tests of statistical hypotheses in the case of unequal or disproportionate numbers of observations in the subclasses. Psychometrika 7, 195—212 (1942).



Tsao, Fei: General solution of the analysis of variance and covariance in the case of unequal or disproportionate numbers of observations in the subclasses. *Psychometrika* 11, 107—128 (1946).

Chandra Sekar, C.: A note on the inverse sine transformation. *Sankhyā* 6, 195—198 (1942).

Curtiss, J. H.: On transformations used in the analysis of variance. *Ann. math. Statistics* 14, 107—122 (1943).

Prüfungsverfahren, das in der Erforschung der Streuung und im Regressionsproblem angewandt wird. *J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Paulson, E.: An approximate normalization of the analysis of variance distribution. *Ann. math. Statistics* 13, 233—235 (1942).

Date due variabili casuali distribuite quasi normalmente, l'A. ricava una funzione del rapporto delle due variabili casuali, che ha distribuzione quasi normale quando il numero dei casi  $n \geq 3$ . Illustra con alcuni esempi numerici la bontà dell'approssimazione. *T. Salvemini.*

Stevens, W. L.: Anwendung des  $\chi^2$ -Tests auf die Varianzanalyse. *Revista Fac. Ci. Univ. Coimbra* 13, 4—17 (1945) [Portugiesisch].

Nair, K. R.: The application of the technique of analysis of covariance to field experiments with several missing or mixed-up plots. *Sankhyā* 4, 581—588 (1940).

Irwin, J. O.: On the distribution of a weighted estimate of variance and on analysis of variance in certain cases of unequal weighting. *J. roy. statist. Soc.* 105, 115—118 (1942).

●Holzinger, K. J. and H. H. Harman: Factor analysis. A synthesis of factorial methods. Chicago, Ill.: Univ. of Chicago Press 1941. XII, 417 p.: \$ 5.00.

Herdan, G.: The logical and analytical relationship between the theory of accidents and factor analysis. *J. roy. statist. Soc., n. Ser.* 106, 125—142 (1943).

Holzinger, Karl J.: Factoring test scores and implications for the method of averages. *Psychometrika* 9, 155—167 (1944).

Holzinger, Karl J.: A simple method of factor analysis. *Psychometrika* 9, 257—261 (1944).

Guttman, Louis: General theory and methods for matrix factoring. *Psychometrika* 9, 1—16 (1944).

Thurstone, L. L.: A multiple group method of factoring the correlation matrix. *Psychometrika* 10, 73—78 (1945).

Delaporte, Pierre: Sur l'estimation des corrélations des caractères avec le facteur général et les facteurs de groupe et sur l'écart-type de cette estimation, en analyse factorielle. *C. r. Acad. Sci., Paris* 222, 525—527 (1946).

L'A. propose de remplacer l'emploi du coefficient de corrélation de Spearman (*The Abilities of Man*, London 1932) par celui d'une moyenne pondérée dont il indique l'écart type minimum. *A. Sade.*

Kishen, K.: On expressing any single degree of freedom for treatments in an  $s^m$  factorial arrangement in terms of its sets for main effects and interactions. *Sankhyā* 6, 133—140 (1942).

Hsu, P. L.: Some simple facts about the separation of degrees of freedom in factorial experiments. *Sankhyā* 6, 253—254 (1943).

Baten, William Dowell: Analyzing degrees of freedom into comparisons when the „classes“ do not contain the same number of items. *Nat. math. Mag.* 19, 221—228 (1945).

Harshbarger, Boyd: On the analysis of a certain six-by-six four-group lattice design. *Ann. math. Statistics* 15, 307—320 (1944).

Harshbarger, Boyd: On the analysis of a certain six-by-six four-group lattice design using the recovery of interblock information. *Ann. math. Statistics* 16, 387—390 (1945).

Plackett, R. L.: Some generalizations in the multifactorial design. *Biometrika* 33, 328—332 (1946).

Lindley, D. V.: On the solution of some equations in least squares. *Biometrika* 33, 326—327 (1946).

Cornish, E. A.: The estimation of missing values in quasifactorial designs. *Ann. Eugenics* 10, 137—143 (1940).

Cox, Gertrude M.: Enumeration and construction of balanced incomplete block configurations. *Ann. math. Statistics* 11, 72—85 (1940).

Nair, K. Raghavan and C. Radhakrishna Rao: A note on partially balanced incomplete block designs. *Science and Culture* 7, 568—569 (1942).

Nair, K. Raghavan and C. Radhakrishna Rao: Incomplete block designs for experiments involving several groups of varieties. *Science and Culture* 7, 615—616 (1942).

(1) Chowla, S.: A new case of a „complete  $I$ - $m$ - $n$  configuration“, *Proc. Lahore philos. Soc.* 6, Nr. 1, 13 (1944).

(2) Chowla, S.: Another case of a „complete  $I$ - $m$ - $n$  configuration“. *Proc. Lahore philos. Soc.* 6, Nr. 1, 14 (1944).

(3) Krishnaswamy Ayyangar, A. A.: A general theory of tactical configurations. *J. Mysore Univ., Sect. A* 1, 103—113 (1943).

(4) Nandi, H. K.: On the relation between certain types of tactical configurations. *Bull. Calcutta math. Soc.* 37, 92—94 (1945).

Un „balanced incomplete block design“ (BIBD) est un système de  $v$  éléments discernables, distribués avec répétition, dans  $b$  blocs de  $k$  éléments chacun, de manière que chaque paire d'éléments apparaisse dans  $\lambda$  blocs et que chaque élément soit répété  $r$  fois. Exemple:  $v = 8$  (1, 2, 3, ..., 8),  $b = 14$ ,  $k = 4$ ,  $\lambda = 3$ ,  $r = 7$ : 1234, 1256, 1278, 1357, 1368, 1458, 1467, 2358, 2367, 2457, 2468, 3456, 3478, 5678. Chaque élément figure dans 7 blocs (p. ex. 1 figure dans les 7 premiers blocs). Chaque paire figure dans 3 blocs (p. ex. 12 apparaît dans les 3 premiers blocs). Les BIBD sont un cas particulier des configurations abstraites [El. Has-Moore, *Amer. J. Math.* 18, 264—303 (1896)] étudiées par Chowla (1), (2), Krishnaswamy (3) et Nandi (4). Les BIBD ont été introduits par Yates [*Ann. Eugenics* 7, 121—140 (1936); *J. agric. Sci.* 26, 424—455 (1936)] pour l'essai des variétés (ou façons culturales) lorsque les  $v$  variétés ne peuvent pas être cultivées dans les  $k$  parcelles de chaque bloc (incomplete block:  $k < v$ ). Alors, pour que les différences de fertilité entre les sols des blocs soient compensées, il faut que chaque paire de variétés apparaisse dans un même nombre de blocs (balanced). Un album des BIBD usuels a été donné par R. A. Fisher et Yates en 1938 (ce Zbl. 28, 412). R. C. Bose a brossé un tableau d'ensemble en 1939 (ce Zbl. 23, 1). *A. Sade.*

Bhattacharya, K. N.: A new balanced incomplete block design. *Science and Culture* 9, 508 (1944).

Rao, C. Radhakrishna: On balancing parameters. *Science and Culture* 9, 554—555 (1944).

Rao, C. Radhakrishna: On the linear set up leading to intra and inter block informations. *Science and Culture* 10, 259—260 (1944).

Bhattacharyya, A.: A note on Ramamurti's problem of maximal sets. *Sankhyā* 6, 189—192 (1942).

(1) Bhattacharya, K. N.: A note on two-fold triple systems. *Sankhyā* 6, 313—314 (1943).

(2) Bhattacharya, K. N.: A new solution in symmetrical balanced incomplete block designs ( $v = b = 31$ ,  $r = k = 10$ ,  $\lambda = 3$ ). *Sankhyā* 7, 423—424 (1946).

(3) Bose, Raj Chandra: A note on two combinatorial problems having applications in the theory of design of experiments. *Science and Culture* 8, 192—193 (1942).

(4) Bose, R. C.: A note on two series of balanced incomplete block designs. *Bull. Calcutta math. Soc.* 34, 129—130 (1942).

(5) Bose, R. C.: On some new series of balanced incomplete block designs. *Bull. Calcutta math. Soc.* 34, 17—31 (1942).

(6) Bose, R. C.: A note on the resolvability of balanced incomplete designs. *Sankhyā* 6, 105—110 (1942).

(7) Nair, K. R.: Certain inequality relationships among the combinatorial parameters of incomplete block designs. *Sankhyā* 6, 255—259 (1943).

(8) Chowla, S.: A contribution to the theory of the construction of balanced incomplete block designs. *Proc. Lahore philos. Soc.* 7, 3 p. (1945).

(9) Husain, Q. M.: On the totality of the solutions for the symmetrical incomplete block designs:  $\lambda = 2$ ,  $k = 5$  or 6. *Sankhyā* 7, 204—208 (1945).

(10) Husain, Q. M.: Symmetrical incomplete block designs with  $\lambda = 2$ ,  $k = 8$ , or 9. *Bull. Calcutta math. Soc.* 37, 115—123 (1945).

(11) Husain, Q. M.: Impossibility of the symmetrical incomplete block design with  $\lambda = 2$ ,  $k = 7$ . *Sankhyā* 7, 317—322 (1946).

(12) Kerawala, S. M.: Note on symmetrical incomplete block designs:  $\lambda = 2$ ,  $k = 6$ , or 7. *Bull. Calcutta math. Soc.* 38, 190—192 (1946).

(13) Nandi, Hari Kinkar: Enumeration of non-isomorphic solutions of balanced incomplete block designs. *Sankhyā* 7, 305—312 (1946).

(14) Nandi, Hari Kinkar: A further note on non-isomorphic solutions of incomplete block designs. *Sankhyā* 7, 313—316 (1946).

Bhattacharya (1) applique la méthode de Bose au cas  $k = 3$ ,  $\lambda = 2$ ,  $vr = 3b$ ,  $v = r + 1$ . Bose (3) résoud plus simplement le même problème. puis (4) il utilise un champ de Galois pour construire le BIBD  $\lambda = 1$ ,  $k = 4; 5$ ,  $r = kt + 1$ ;  $4t + 1$  étant une puissance d'un nombre premier. En (5) il étend sa méthode à de nouveaux BIBD:  $\lambda = 2$ ,  $k = 4; 5$ ,  $r = kt; kt + 2$ , puis  $\lambda = k - 1$ ,  $k = 4; 5$ ,  $r = kt$ . En (6) il étudie les BIBD résolubles, c.-à-d. tels que les  $b$  blocs puissent être répartis en  $r$  ensembles de même effectif, chaque ensemble contenant la totalité des  $v$  éléments, et il donne la condition:  $b \geq r + r - 1$ . Nair (7) perfectionne la condition de possibilité obtenue par Bose. Chowla (8) admettant l'existence d'un BIBD pour tous  $k$  et  $b$ , établit celle du design:  $\lambda = 1$ ,  $b = pr/k$ ,  $r = (p - 1)/(k - 1)$  pour certains nombres premiers  $p$  assez grands. Husain (9) étudie les cas  $\lambda = 2$ ,  $k = 5; 6$  et l'isomorphisme entre deux designs. En (10) il traite le cas  $\lambda = 2$ ,  $v = b$ ,  $k = 8; 9$ . En (11) il établit l'impossibilité du BIBD:  $v = b = 22$ ,  $r = k = 7$ ,  $\lambda = 2$ . Bhattacharya (2) adapte la méthode de Bose au cas  $v = b = 31$ ,  $k = 10$ ,  $\lambda = 3$ . Kerawala (12) perfectionne le procédé de Husain. Enfin, Nandi (13) forme les designs non isomorphes pour  $r = 6$ ,  $k = 3$ ,  $\lambda = 2$ ;  $v = 10$ ,  $k = 4$ ,  $\lambda = 2$ ; puis (14) pour  $v = 15$ ,  $k = 7$ ,  $\lambda = 3$ ;  $v = 7$ ,  $k = 3$ ,  $\lambda = 2$ ;  $v = 8$ ,  $k = 4$ ,  $\lambda = 3$ . Sur ces questions voir les importants travaux de R. A. Fisher et son école, surtout dans *Ann. Eugenics* et l'excellent livre de H. B. Mann, *Analysis and design of experiments* (New York 1949). A. Sade.

Nair, K. Raghavan and C. Radhakrishna Rao: Confounded designs for asymmetrical factorial experiments. *Science and Culture* 6, 313—314 (1941).

Nair, K. Raghavan and C. Radhakrishna Rao: A general class of quasi-factorial designs leading to confounded designs for factorial experiments. *Science and Culture* 7, 457—458 (1942).

Ramamurti, B. and B. Sitaraman: On maximal sets of confounded interactions in a  $(2^n, 2^k)$  confounded design. *Sankhyā* 6, 183—188 (1942).

Rao, C. Radhakrishna: On the most efficient designs in weighing. *Sankhyā* 7, 440 (1946).



Rao, C. Radhakrishna: Confounded factorial designs in quasi-Latin squares. *Sankhyā* 7, 295—304 (1946).

Fisher, R. A.: The theory of confounding in factorial experiments in relation to the theory of groups. *Ann. Eugenics* 11, 341—353 (1942).

Fisher, R. A.: A system of confounding for factors with more than two alternatives, giving completely orthogonal cubes and higher powers. *Ann. Eugenics* 12, 283—290 (1945).

Soit  $E$  un ensemble de  $n$  éléments:  $a, b, c, \dots$ . Si  $U \subseteq V \subseteq E$  et si  $V - U$  est le complément du sous-ensemble  $U$  dans  $V$ , la loi de composition  $XY = (X \cup Y) - (X \cap Y)$  définit un groupe abélien  $(G)$  d'ordre  $2^n$ . Pour déceler l'action et les interactions de plusieurs traitements  $A, B, C, \dots$  (p. ex. des engrais à des taux donnés) on expérimente diverses combinaisons de ces traitements (p. ex.  $ACDE$ ). Le groupe  $(G)$  fournit une solution: On fait correspondre l'unité de  $G$  à une combinaison  $(e)$  choisie comme contrôle, puis, à chacune des autres combinaisons on associe les lettres par lesquelles elle diffère de  $(e)$ . P. ex. l'élément  $(abcd)$  de  $(G)$  correspondra à la combinaison différant de  $(e)$  par les lettres  $ABCD$ , mais dont les autres lettres figurent dans  $(e)$ . La méthode permet de réduire l'importance des blocs, en sacrifiant certaines interactions, qui manquent dans tous les plots d'un même bloc et sont dites „confounded“. P. ex. pour  $n = 3$  et avec 7 facteurs on peut prendre: (1)  $ABCD, ABEG, ACFG, ADEF, BCEF, BDFG, CDEG$ , où les interactions entre trois facteurs: (2)  $ABF, ACE, ADG, BCG, BDE, CDF, EFG$ , manquent. Chaque lettre apparaît dans 4 tétrades (1); chaque paire dans 2 tétrades, et chaque triade non confounded dans une.  $(G)$  est un sous-groupe du groupe engendré par les lettres  $A, B, C, \dots$ . Les triades (2) engendrent un groupe dit des „interactions confounded“. Condition pour qu'aucune interaction binaire ne soit confounded. Isomorphisme. Tables pour  $n = 7, 8, \dots, 15$ . Généralisation. Page 352, ligne 12, lire  $DEM$  au lieu de  $ABC$ , page 353 (v) lire  $ABDGJKMP$  au lieu de  $AB \dots MN$ . A. Sade.

● Deming, W. Edwards: Statistical adjustment of data. New York: Wiley and Sons, Inc., 1943. X, 261 p.; \$ 3,50.

Stephan, F. F.: An iterative method of adjusting sample frequency tables when expected marginal totals are known. *Ann. math. Statistics* 13, 166—178 (1942).

Questo lavoro si ricollega ad un precedente studio [questo Zbl. 24, 55] dell'autore e di W. E. Deming nel quale è esaminato il problema dell'addattamento di  $n$  coppie di valori in una tabella in modo che le distribuzioni marginali siano uguali a quelle previste. L'A. suppone noti i pesi da dare alle frequenze di ciascuna cella e indica un metodo iterativo, fondato sui minimi quadrati, per risolvere il sistema di equazioni normali. T. Salvemini.

Hoogland, J. J.: Note on the numerical calculation of the orthogonal polynomials. *Ann. Eugenics* 11, 77—79 (1941).

Nair, K. R. and K. S. Banerjee: A note on fitting of straight lines if both variables are subject to error. *Sankhyā* 6, 331 (1943).

Austen, A. E. W. and H. Pelzer: Linear „curves of best fit“. *Nature* 157, 693—694 (1946).

Haldane, J. B. S.: The fitting of binomial distributions. *Ann. Eugenics* 11, 179—181 (1941).

Shannon, S.: Comparative aspects of the point binomial polygon and its associated normal curve of error. *Record. Amer. Inst. Actuaries* 31, 208—226 (1942).

Vajda, S.: On the constituent items of the reduction and the remainder in the method of least squares. *Ann. math. Statistics* 16, 381—386 (1945).

Gegeben  $n$ -dimensionaler Vektor  $\eta$  und  $(n, s)$ -Matrix  $\mathfrak{B}$  vom Rang  $s$ ; gesucht  $s$ -dimensionaler Vektor  $b$  so, daß  $Z_{\min}^2 = |\eta - \mathfrak{B}b|^2 = \text{Min.}$  Explizite Lösung

durch Angabe eines Orthonormalsystems  $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$  mit  $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s \in \{\mathfrak{B} \mathfrak{b}\}$  und daher  $\chi_{\min}^2 = \sum_{v=s+1}^n (\tilde{f}_v, \eta)^2$ . Folgerung: Für Gaußsches  $\eta$  ist  $\chi_{\min}^2$  verteilt wie  $\chi^2$  mit  $n - s$  Freiheitsgraden (Satz von R. A. Fisher). H. Richter.

**Berjman, Elena:** Eine Lösung des Problems der kleinsten Quadrat-Ausgleichung durch Gaußsche Polynome mit Hilfe der Berechnung und Vertafelung der parametrischen Koeffizienten parabolischer Funktionen erster bis fünfter Ordnung für Reihen mit bis zu 100 Elementen. *An. Soc. ci. Argentina* 132, 34—48, 104—117, 212—217 (1941); 133, 208—215, 442—445 (1942) [Spanisch].

**Pailloux, H.:** Sur un problème de répartition. *Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math. phys.*, n. Sér. 21, 123—125 (1946).

**L'A.** applique le calcul symbolique à la recherche d'une valeur approchée de la fonction de répartition dans le cas d'un nombre élevé de mesures. *A. Sade.*

**Stoner, Paul Matthew:** Fitting the exponential function and the Gompertz function by the method of least squares. *J. Amer. statist. Assoc.* 36, 515—518 (1941).

**Hermann, C.:** Untersuchungen über die Trennung nahe benachbarter Maxima. *Ann. der Physik*, V. F. 42, 378—388 (1943)

**Burrau, Øjvind:** Über die Bestimmung von mittleren Fehlern. *Mat. Tidsskr. B* 1945, 97—109 (1945) [Dänisch].

**Bosworth, R. C. L.:** Bessel's formula in relation to the calculation of the probable error from a small number of observations. *J. Proc. roy. Soc. New South Wales* 78, 81—83 (1944).

**Ruist, Erik:** Standard errors of the tilling coefficients used in confluence analysis. *Econometrica* 14, 235—241 (1946).

**Bachmann, W. K.:** Théorie des erreurs de l'observation des variables secondaires. *Schweiz. Z. Vermessgswes. Kulturtech.* 43, 21—27, 45—51 (1945).

**Stihi, E. E.:** Sur la valeur réelle de la mesure d'une grandeur. *Ann. sci. Univ. Jassy, Sect. I* 26, 528—530 (1940).

**Cochran, W. G.:** The comparison of different scales of measurement for experimental results. *Ann. math. Statistics* 14, 205—216 (1943).

Analyse der Messungen, die mit verschiedenen Maßstäben ausgeführt worden sind. J. M<sup>a</sup>. Orts.

**Johansen, N. P.:** Freie Funktionen. *Geodaetisk Instituts Skr.*, III. Ser. 4, 30 S. (1944) [Dänisch].

**Silberstein, Ludwik:** On two accessories of three-dimensional colorimetry. I. The probable error of colorimetric tensor components as derived from a number of color matchings. II. The determination of the principal colorimetric axes at any point of the color threefold. *J. opt. Soc. Amer.* 36, 464—468 (1946).

**Malmquist, K. G.:** The elimination of the effects of accidental errors of measurement in statistical investigations. *Ark. Mat. Astr. Fys.* 27 A, Nr. 24, 13 p. (1941).

Bei der Behandlung des Problems: Welches ist die Verteilung der scheinbaren Helligkeiten der Sterne, wenn die absoluten Helligkeiten unabhängig von der Entfernung einer Gaußschen Verteilung gehorchen? [Meddelanden Astr. Obs. Lund, Ser. II, 22, 68 S. (1920)] hat Verf. eine ähnliche Methode benutzt, wie sie Eddington in einer statistischen Untersuchung (dies. Zbl. 24, 266) beschreibt. K. Stumpff.

**Mayot, Mareel:** Sur la détermination statistique des composantes cycliques d'un phénomène: application aux étoiles variables. *C. r. Acad. Sci., Paris* 223, 125—127 (1946).

Glivenko, V. L.: Studies on mathematical genetics. I. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. biolog. 1939, 615—635 (1939) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Novák, J.: Genetische Polynome als Grundlage zur Ableitung der Genotypen und Phänotypen und ihrer Häufigkeiten bei allen Arten genetischer Veranlagung. Z. indukt. Abstammungs- u. Vererbungslehre 81, 343—362 (1943).

Schelling, H. von: Zur Deutung auslesefreier Zwillingserhebungen. Z. menschl. Vererbungs- u. Konstitutionslehre 27, 778—781 (1944).

Unter  $s$  erfaßten Zwillingspaaren seien  $m$  Träger des betrachteten Merkmals,  $x_0$  Paare merkmalsfrei,  $x_1$  Paare besitzen 1 Merkmalsträger,  $x_2$ -Paare 2 solche. Wegen  $x + x_1 + x_2 = s$ ,  $x_1 + 2x_2 = m$  hat das System bei bekanntem  $s$  und  $m$  nur 1 Freiheitsgrad. Aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $x_2$ ,

$$w(x_2) = \binom{s}{x_2} \binom{s-x_2}{m-2x_2} \cdot 2^{m-2x_2} \left/ \binom{2s}{m} \right., \quad x_2 = 0, 1, \dots, \left[ \frac{m}{2} \right],$$

berechnet Verf. Erwartungswert und Streuung von  $x_2$  zu

$$E(x_2) = \frac{m(m-1)}{2(2s-1)}, \quad \sigma^2 = E(x_2) \cdot \frac{2s-m}{2s-1} \cdot \frac{2s-m-1}{2s-3}$$

und hieraus diejenigen von  $x_0$  und  $x_1$ .

M. P. Geppert.

Stevens, W. L.: Statistische Schätzung. Theorie der Schätzung von zwei und mehr Parametern, erläutert am Problem der Schätzung der Häufigkeit der Blutgruppengene. Revista Fac. Ci. Univ. Coimbra 12, 23—104, 175—221 (1944) [Portugiesisch].

Haldane, J. B. S.: The cumulants of the distribution of Fisher's „ $u_{11}$ “ and „ $u_{31}$ “ scores in the detection and estimation of linkage in man. Ann. Eugenics 13, 122—134 (1946).

Mann, H. B.: Note on a paper by C. W. Cotterman and L. H. Snyder. Ann. math. Statistics 16, 311—312 (1945).

Die Arbeit von C. W. Cotterman und L. H. Snyder ist besprochen in dies. Zbl. 22, 64.

Beall, G.: The transformation of data from entomological field experiments so that the analysis of variances becomes applicable. Biometrika 32, 243—262 (1942).

Nair, K. R.: Efficiency of the adjustment for concomitant characters in biological experiments. Sankhyā 6, 167—174 (1942).

Geppert, Maria-Pia: Mathematische Theorie der Zeit-Menge-Beziehungen bestimmter Vergiftungsvorgänge. Z. angew. Math. Mech. 23, 269—278 (1943).

Franckx, E.: L'évolution des collectivités. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 45, 279—288 (1945).

Hadwiger (dies. Zbl. 19, 177) hat Bedingungen für die Ausscheidelfunktion angegeben, unter denen die Erneuerungszahl in einem Bestande konstanten Umfanges gegen eine feste Grenzlage hinstrebt. Verfasser untersucht die gleiche Frage mittels Theorie der Markoffschen Ketten.

E. Zwinggi.

Nolli, P.: Zur mathematischen Darstellung wachsender Gesamtheiten. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 45, 311—321 (1945).

Verfasser überträgt das Urnschema auf durch Ansteckung oder Vermehrung wachsende Gesamtheiten und gelangt zu einer Verallgemeinerung der Theorie der Wahrscheinlichkeitsansteckung.

E. Zwinggi.

Lotka, Alfred J.: Population analysis as a chapter in the mathematical theory of evolution. Essays on growth and form presented to D'Arcy Wentworth Thompson (edited by W. E. Le Gros Clark and P. B. Medawar. Oxford: At the Clarendon Press 1945), 355—385.

Bedeutet in einer wanderungsfreien weiblichen Bevölkerung  $B(t)$  die Geburtenzahl,  $p(a)$  die  $a$ -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer 0-jährigen und



$m(a)$  die Intensität der Fruchtbarkeit (Mädchengeburten), so gilt für  $B(t)$  die Integralgleichung  $B(t) = \int_0^t B(t-a) p(a) m(a) da$ : Diese Integralgleichung wird über den Ansatz  $B(t) = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} e^{\alpha t}$  aufgelöst. *E. Zwinggi.*

Rhodes, E. C.: Population mathematics. II and III. J. roy. statist. Soc. 103, 218—245, 362—387 (1940).

Teil I der Arbeit *ibid.* 61—89; s. dies. Zbl. 23, 60.

Seal, H. L.: The mathematics of a population composed of  $k$  stationary strata each recruited from the stratum below and supported at the lowest level by a uniform annual number of entrants. Biometrika 33, 226—230 (1945).

Eine stationäre Gesamtheit mit einer gegebenen totalen, nur vom Alter abhängigen Ausscheideintensität soll derart in eine Anzahl Untergesamtheiten zerfallen, daß jeweils durch einseitiges Übertreten von einer Untergesamtheit in eine ranghöhere eine neue Untergesamtheit gebildet wird. Unter der Annahme, daß die Verbleibswahrscheinlichkeit in einer Untergesamtheit nur von der verfloßsenen Zugehörigkeitsdauer abhängt, werden Relationen angegeben für die Zahl der in eine Untergesamtheit eintretenden und die Zahl der in einer Untergesamtheit befindlichen Elemente. *E. Zwinggi.*

Leslie, P. H.: On the use of matrices in certain population mathematics. Biometrika 33, 183—212 (1945).

In einer nur durch Geburt zunehmenden und durch Tod abnehmenden weiblichen Bevölkerung seien die Sterbewahrscheinlichkeiten und Fruchtbarkeitsziffern zeitlich invariant. Aus den Sterbewahrscheinlichkeiten und den Fruchtbarkeitsziffern läßt sich eine Matrix bilden, durch welche die Altersstruktur der Bevölkerung in einem späteren Zeitpunkt und die stabile Bevölkerung formal einfach darstellbar sind. *E. Zwinggi.*

Schärf, Henryk: Über partielle Bestandsänderungen und eine Klasse neuer Integrationsprozesse. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 44, 233—249 (1944).

Verallgemeinerung der Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten nach Karup und Ausdehnung der Ergebnisse von Loewy durch Einführung multiplikativer und additiver Integrationsprozesse. *E. Zwinggi.*

Nolli, P.: Zur Bestimmung der Rücksehlußwahrscheinlichkeit einer geschlossenen Gesamtheit. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 44, 217—220 (1944).

Wenn in einem Bestand von  $n$  Personen  $r$  Todesfälle eingetreten sind, so ist die Rücksehlußwahrscheinlichkeit dafür, daß der wahre Werte der Sterbewahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen 0 und  $Q$  liegt, gleich der Wahrscheinlichkeit, daß im gleichen Bestand bei der Grundwahrscheinlichkeit  $Q$  mehr als  $r$  Todesfälle eintreten. *E. Zwinggi.*

Zwinggi, Ernst: Über den Vergleich von Verhältniszahlen. Beispiele für die Anwendung neuerer statistischer Verfahren im Gebiete der Versicherung. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 44, 71—93 (1944).

Verf. untersucht mittels moderner Prüfverfahren, ob festgestellte Unterschiede im Sterblichkeitsverlauf und in Belastungswerten der Unfall- und Haftpflichtversicherung wesentlich sind. *E. Zwinggi.*

Anderson, R. D.: On the application of quantum mechanics to mortality tables. J. Inst. Actuaries 71, 228—258 (1943).

Formale Übertragung der Vektorrechnung auf die Zerlegung der Selektionssterbeintensität  $\mu_{x+t}$  gemäß  $\mu_{x+t} = \frac{l_{x+t}^{(1)}}{l_{x+t}} \mu_{x+t}^{(1)} + \frac{l_{x+t}^{(2)}}{l_{x+t}} \mu_{x+t}^{(2)}$ , wobei  $\mu^{(1)}$  die Auslesewirkung und  $\mu^{(2)}$  die Alterszunahme seit der Selektion mißt. *E. Zwinggi.*

Baillie, Donald C.: On testing the significance of mortality ratios by the use of  $\chi^2$ . Trans. actuar. Soc. America 47, 326—344 (1946).

Um zu entscheiden, ob sich die nach einer bestimmten Sterbetafel berechnete Zahl der Todesfälle wesentlich von der beobachteten Zahl der Sterbefälle unterscheidet, wird gewöhnlich das  $\chi^2$ -Prüfverfahren verwendet. Verf. stellt das  $\chi^2$ -Prüfverfahren aus den Elementen heraus dar.

*E. Zwinggi.*

Zwinggi, Ernst: Über die Berechnung der unabhängigen Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten im ersten Versicherungsjahr. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 45, 57—66 (1945).

Berechnung der Ausscheidewahrscheinlichkeit, wenn Ausscheidefälle nicht als gleichmäßig über das Beobachtungsjahr verteilt angenommen werden. *E. Zwinggi.*

Wyss, H.: Beobachtungen über die Rentner-Sterblichkeit bei der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt. Mitt. Schweiz. Verein. Versicherungsmath. 43, 99—112 (1943).

Die Tafel stammt aus den Ergebnissen der Jahre 1927—37. Es werden die Vergleiche auf den älteren Tafeln gezogen und die versicherungstechnischen Konsequenzen aus der Sterblichkeitsabnahme gezogen.

*P. Riebesell.*

Picard, R.: Beitrag zur Konstruktion einer Sterbetafel bei kleinen Beständen. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 43, 181—187 (1943).

Verf. benutzt zur Ausgleichung der Sterblichkeitsbeobachtungen an einem kleinen Bestande eine Hilfstafel mit den einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x^I$  und setzt die gesuchten Sterbenswahrscheinlichkeiten  $q_x^{II}$  als lineare Funktionen von  $q_x^I$  voraus:  $q_x^{II} = \alpha + \beta q_x^I$ . Die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  werden nach der Methode der kleinsten Quadrate so bestimmt, daß sich die Zahl der mit  $q_x^{II}$  gerechneten Sterbefälle der Zahl der beobachteten, möglichst gut anpaßt. Die Berechtigung der Voraussetzung wird erörtert und ein Beispiel durchgerechnet. *J. Fuhrich.*

Greville, T. N. E.: Short methods of constructing abridged life tables. Record, Amer. Inst. Actuaries 32, 29—43 and Discussion 408—418 (1943).

Greville, T. N. E.: „Census“ methods of construction of mortality tables and their relation to „insurance“ methods. Record, Amer. Inst. Actuaries 31, 367—373 (1942); 32, 125—130 (1943).

Lang, Kermit: Analysis of net premium formulas for the income endowment policy. Record, Amer. Inst. Actuaries 31, 398—405 (1942).

Berechnung der Prämie einer kombinierten Todesfall-Versicherung, wobei die Erlebensfall-Leistung  $1 - k$  beträgt und die Todesfall-Leistung gleich dem Deckungskapital der Kombination, aber nicht kleiner als 1 ist.

*E. Zwinggi.*

Jecklin, Heinrich: Über den Zusammenhang zwischen gewissen Zusatzversicherungen, Prämienzerlegungen und Approximationen in der Lebensversicherungsmathematik. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 44, 221—232 (1944).

Näherungsformeln für die Zusatzprämie, wenn die ursprüngliche Kombination (z. B. gemischte Versicherung) derart ausgedehnt wird, daß Leistungen auch durch weitere (zusätzliche) Ausscheidursachen fällig werden (z. B. durch Erwerbsunfähigkeit).

*E. Zwinggi.*

Evans, A. W.: Further remarks on the relationship between the values of life annuities at different rates of interest, including a description of a method of first-difference interpolation and a reference to annuities-certain. J. Inst. Actuaries 72, 447—454 (1946).

Wiseman, Robert T.: The use of punched card equipment for the calculation of policy values and guarantees. Trans. actuar. Soc. Amer. 45, 83—88 (1944).

Humbert, F.: Verrechnung von Vermögen in Sterbegeld-Gruppenversicherungsverträgen. Bl. Vers.-Math. 5, 427—443 (1943).

Verf. behandelt die Verwendung eines bei Abschluß einer Sterbegeld-Gruppenversicherung vorhandenen Vermögens zugunsten der ältesten Mitglieder. Er be-

zeichnet diejenige Lösung als die günstigste, bei welcher für die Beitrittsalter  $x \geq x'$  die Versicherungssumme gegen laufenden Beitrag zu Lasten des Anfangsvermögens so weit gekürzt wird, daß der laufende Beitrag  $b_x = \bar{b}$  wird, wo  $\bar{b} = \sum L_x b_x / \sum L_x$  den Durchschnittsbeitrag für die Mitglieder  $L_x$  mit dem Beitrittsalter  $x < x'$  bedeutet. Ein Verfahren zur Bestimmung von  $x'$  wird entwickelt und an Beispielen erläutert. *J. Fuhrich.*

**Meier, J.: Kombinierte Einzel- und Gruppenrechnung zur Bestimmung des Bilanzdeckungskapitals in der Lebensversicherung (Ko-Methode).** Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 43, 75—88 (1943).

Interpolation der  $V_t$ -Kurve durch Bestimmung von Hilfsprämien.

*P. Riebesell.*

**Wolfenden, Hugh H.: On the formulae for calculating the „exposed to risk“ in constructing mortality and other tables from the individual records of insured lives.** Trans. actuar. Soc. Amer. 43, 234—277 (1942).

Berechnung der Zahl der Personen unter einjährigem Risiko nach den verschiedenen bei amerikanischen Lebensversicherungsgesellschaften gebräuchlichen Verfahren.

*E. Zwinggi.*

**Cramér, Harald: Lundbergs Risikotheorie und die Theorie der stochastischen Prozesse.** Försäkringsmatematiska Studier tillägnade Filip Lundberg, 25—31. Stockholm: 1946 [Schwedisch].

**Davidson, Åke: Über das Problem des Ruins in der kollektiven Risikotheorie unter der Annahme veränderlicher Sicherheitsbelastung.** Försäkringsmatematiska Studier tillägnade Filip Lundberg, 32—47. Stockholm: 1946, [Schwedisch].

**Simonsen, W.: Über die Begründung der kollektiven Risikotheorie.** Försäkringsmatematiska Studier tillägnade Filip Lundberg, 246—264. Stockholm: 1946. [Dänisch].

Die drei Arbeiten behandeln Grundlagen der von Lundberg begründeten kollektiven Risikotheorie, stellen sie in Gegensatz zur individuellen Risikotheorie und zeigen, daß kollektive Risikotheorie als ein Teil der diskontinuierlichen Markov-Prozesse anzusehen ist.

*E. Zwinggi.*

**Jeming, Joseph: Estimates of average service life and life expectancies and the standard deviation of such estimates.** Econometrica 11, 141—150 (1943).

Sei mit  $y_x$  der Inventarwert und mit  $\Delta y_x$  die jährliche Wertverminderung bezeichnet. Wird vorausgesetzt, daß die Regressionslinie von  $\Delta y_x / y_x$  eine Gerade  $\xi_x = \alpha + \beta x$  ist, so ist die „theoretische Überlebensordnung“  $\eta_x$  bestimmt durch  $\xi_x = (\eta_x - \eta_{x+1}) / \eta_x$ . Wird aus  $N$  gegebenen Werten für  $y_x$  und  $\Delta y_x$  die Regressionsgerade  $Z_x = a + b x$  berechnet, so gilt für die „ausgeglichene Überlebensordnung“  $Y_x$

die Relation  $Z_x = (Y_x - Y_{x+1}) / Y_x$ . Die „mittlere Lebensdauer“  $L = \int_0^\infty Y_x dx$  ist ein Maß für die „theoretische mittlere Lebensdauer“  $\lambda = \int_0^\infty \eta_x dx$ . Untersucht wird die Streuung von  $L$  für große  $N$ .

*E. Zwinggi.*

**Fischer, C. H.: The rate of interest in instalment contracts.** Amer. math. Monthly 50, 545—547 (1943).

● **Geus, W. de: Stetige Zinsrechnung.** Diss. 91 S. Amsterdam [Holländisch] (1943). Amsterdam, Citg. H. J. Paris.

**Bernardelli, Harro: The stability of the income distribution.** Sankhyā 6, 351—362 (1944).

Untersuchung über die Stabilität der Einkommensverteilung (Gesetz von Pareto); die Folgerungen des Verfassers werden vom Herausgeber der Zeitschrift skeptisch beurteilt.

*E. Zwinggi.*



Shannon, S.: A theory of automatic premium-loan approximations: Formulas derived and compared. *Record. Amer. Inst. Actuaries* 32, 74—82 and Discussion 427—435 (1943).

● Massé, Pierre: Les réserves et la régulation de l'avenir dans la vie économique. I. Avenir déterminé. (*Actualités Sci. Ind.*, Nr. 1007.) Paris: Hermann et Cie. 1946. V, 149 p.

● Massé, Pierre: Les réserves et la régulation de l'avenir dans la vie économique. II. Avenir aléatoire. (*Actualités Sci. Ind.*, Nr. 1008.) Paris: Hermann et Cie. 1946. 230 p.

● Davis, Harold T.: The theory of econometrics. Bloomington, Ind.: Principia Press, Inc. 1941. XIV. 482 p.

Sinha, H.: Role of mathematics in economic statistics. *Science and Culture* 6, 255—258 (1940).

Hoel, Paul G.: The accuracy of sampling methods in ecology. *Ann. math. Statistics* 14, 289—300 (1943).

## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

● Hauser, G.: Geometrie und Philosophie. Eine Einführung in die Grundlagen der Geometrie für gebildete Laien. 2. Aufl., Luzern: Rüsch u. Cie. 1946. 172 S. (Erste Auflage 1942.) „Eine gemeinverständliche Einführung in die erkenntnistheoretischen Probleme, welche den Zusammenhang der elementaren Geometrie mit der Philosophie beherrschen“. Über den Inhalt orientieren die Kapitelüberschriften. I. Was ist Geometrie? II. Die geometrischen Grundbegriffe. III. Die geometrischen Grundsätze. IV. Neuere Ergebnisse der Grundlagenforschung (Axiomatik). V. Das „skandalöse“ Parallelenaxiom. VI. Was ist eine Nichteuklidische Geometrie? VII. Geometrie und Wirklichkeit. — Die Verdienste von Gösseth um den axiomatischen Aufbau der Elementargeometrie werden besonders hervorgehoben. *M. Zacharias.*

● Greenwood, Thomas: Essais sur la pensée géométrique. Éditions de l'Université d'Ottawa 1943. 100 p.; \$ 1,00.

Hempel, C. G.: Geometry and empirical science. *Amer. math. Monthly* 52, 7—17 (1945).

Terracini, Alejandro: Ursprung einiger geometrischer Begriffe. *Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ.* 3, 157—199 (1941) [Spanisch mit franz. Zusammenfassg.].

Jessen, B.: Die axiomatische Methode. *Mat. Tidsskr. A* 1943, 1—21 (1943) [Dänisch].

Wiedergabe zweier Vorträge des Verf. in der Mathematiklehrer-Vereinigung. Der erste Vortrag gibt in historischer Übersicht eine Darstellung der axiomatischen Methode beim Aufbau der Geometrie und der Arithmetik. Im zweiten Vortrag entwickelt Verf. seine Ansicht darüber, wie weit diese Methode im mathematischen Schulunterricht zur Anwendung kommen kann. *M. Zacharias.*

● Malengreau, Julien: Précisions sur l'application des fondements de l'arithmétique aux fondements de la géométrie. Lausanne: F. Rouge and Cie. S. A., 1941. 72 p.

Didaktische Betrachtungen über den Aufbau des Raums aus Punkten.

*M. Zacharias.*

Coolidge, J. L.: Two dimensions. *Amer. math. Monthly* 52, 557—562 (1945).

Rosenthal, Artur: Verallgemeinerungen des Raumbegriffes. *Chr. Huygens* 18, 234—250 (1940).

**Robinson, G. de B.:** *The foundations of geometry.* Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal 1945, 241—251. Toronto: University of Toronto Press 1946. \$ 3,25.

● **Baker, H. F.:** *An introduction to plane geometry.* Cambridge: Cambridge University Press; New York. Macmillan 1943. VIII, 382 p.; \$ 4,00.

Die Kap. I—VI geben die Begründung der ebenen euklidischen Geometrie und die Einführung eines Koordinatensystems. Die folgenden Kapitel behandeln Punktreihen, Geradenbüschel und Kegelschnitte.

*M. Zacharias.*

● **Locher, Louis:** *Urphänomene der Geometrie.* Orell Füssli, Zürich 1939. XVI, 164 S.

Einführung in die projektive Geometrie. „Urphänomene“ = Axiome.

*M. Zacharias.*

● **Kerékjártó, Béla:** *Die Grundlagen der Geometrie. Band II. Projektive Geometrie.* Budapest: Magyar Tudományos Akadémia 1944. XXIX, 613 S.

● **Hjelmslev, J.:** *Grundlagen der projektiven Geometrie.* København: Nordisk Forlag 1943 [Dänisch].

Den Ausgangspunkt für den Aufbau der projektiven Geometrie bilden die drei „Kompositionsaxiome“: I. Zwei verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  bestimmen eine gerade Linie  $AB$ , die die beiden Punkte enthält. Sie enthält außerdem andere Punkte (mindestens einen), aber nicht alle Punkte, die den Gegenstand der Untersuchung bilden. II. Eine gerade Linie, die zwei Seiten eines Dreiseits schneidet, ohne durch eine Ecke zu gehen, schneidet auch die dritte Seite. III. Nicht alle Punkte, die den Gegenstand der Untersuchung bilden, liegen in derselben Ebene. — Die Herleitung der grundlegenden projektiven Sätze aus diesen Axiomen bildet den Inhalt des zweiten Kapitels. Ihm geht im ersten Kapitel, von Euklids Elementen ausgehend, eine Darstellung der Kongruenzlehre, der euklidischen Maßgeometrie und der beiden Formen der nichteuklidischen Geometrie voran. Die weitere Ausführung der projektiven Geometrie bringt das dritte Kapitel, in dem Kollineationen, Korrelationen, Involutionen, Nullsysteme, die von Staudtsche Imaginärtheorie, Flächen zweiter Ordnung, Raumkurven dritter und vierter Ordnung behandelt werden.

*M. Zacharias.*

**Visa, E.:** Über das Axiom von Pasch. *Gaz. mat.*, Bueurești 51, 124—127 (1946) [Rumänisch].

**Baer, Reinhold:** Homogeneity of projective planes. *Amer. J. Math.* 64, 137—152 (1942).

Die Geltung des Desarguesschen Satzes in der projektiven Ebene ermöglicht die Einführung eines Koordinatensystems, und die Geltung des Pappusschen Satzes hat die Kommutativität des Koordinatenkörpers zur Folge. Beide Sätze sichern die Existenz gewisser Kollineationen und Korrelationen.

*M. Zacharias.*

**Wedderburn, J. H. M.:** On Desargues theorem. *Edinburgh math. Notes* Nr. 34, 17—19 (1944).

**Hall, Marshall:** Projective planes. *Trans. Amer. math. Soc.* 54, 229—277 (1943).

Eine „teilweise projektive Ebene“ ist ein System von Geraden und Punkten derart, daß durch zwei Punkte höchstens eine Gerade geht und zwei Geraden höchstens einen Punkt gemein haben. Wird „höchstens“ durch „genau“ ersetzt und das Postulat hinzugefügt, daß es vier Punkte gibt, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so heißt die Ebene vollständig. Verf. untersucht die Erweiterungen der teilweisen zu den vollständigen Ebenen. Einführung gewisser Koordinaten in nichtdesarguessche Ebenen führt zu den Sätzen von Hessenberg und verschiedenen neuen Ergebnissen.

*M. Zacharias.*

**Suseela, M.:** Non Desarguesian geometry. *Math. Student* 14, 1—13 (1946).

Verf. untersucht die Möglichkeiten, in einer projektiven Ebene Koordinaten einzuführen, unter Voraussetzung von Sonderfällen des Desarguesschen Satzes und gewisser Verallgemeinerungen des Körperbegriffs.

*M. Zacharias.*

**Abellanas, Pedro:** Über die Anordnungspostulate im projektiven Raum von Steinitz-Rademacher. *Revista Acad. Ci. Zaragoza*, II. Ser. 1, 18—23 (1946) [Spanisch].

Das dritte Anordnungsaxiom in Steinitz und Rademachers Vorlesungen über die Theorie der Polyeder (dies. Zbl. 9, 365) ist eine Folge der anderen Anordnungsaxiome und der Inzidenzaxiome.  
*M. Zacharias.*

**Steck, Max:** Über ein dem schwachen E. P.-Axiom äquivalentes Stetigkeitsaxiom. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 3, 295—301 (1943) [Spanisch].

Das schwache E. P.-Axiom sagt aus, daß es außer Punkten im Äußern und auf der Peripherie eines nicht entarteten Kegelschnitts mindestens einen Punkt in seinem Innern gibt. Dual dazu sagt das äquivalente schwache H. G.-Axiom, daß es zu jedem nicht entarteten Kegelschnitt mindestens eine nichtschneidende Gerade gibt.  
*M. Zacharias.*

**Hirsch, Guy:** Sur la signification topologique des axiomes de la géométrie projective. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 223, 528—530 (1946).

Discussion des relations d'incidence de la géométrie projective du point de vue des espaces fibrés. Construction d'un plan projectif sur les octaves de Cayley.  
*H. Guggenheimer.*

● **Levi, F. W.:** Finite geometrical systems. Calcutta: University of Calcutta 1942. III, 51 p.

In sechs Vorlesungen wird dargestellt, was die Gruppentheorie, die Körpertheorie, die Theorie der hyperkomplexen Zahlen und die Topologie zur Konstruktion endlicher geometrischer Systeme beigetragen haben. Insbesondere wird der Existenzbeweis und die Konstruktion nichtdesarguesscher Geometrien behandelt. Nichtdesarguessche Geometrien, die für je drei Punkte in gerader Linie einen einzigen vierten harmonischen Punkt zulassen, können nicht endlich sein. Von den drei Sätzen von Pappos, Desargues und vom vierten harmonischen Punkt gelten in jeder endlichen Geometrie entweder alle drei oder keiner. *M. Zacharias.*

**MacNeish, H. F.:** Four finite geometries. *Amer. math. Monthly* 49, 15—23 (1942).

Aufstellung von Axiomensystemen und Unabhängigkeitsbeweise.

*M. Zacharias.*

**Hager, Anton:** Symmetrische Inzidenztafeln finiter Geometrien. *S.-Ber. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München* 1943, 25—47 (1944).

Verf. entwickelt eine Methode zur Bildung symmetrischer Inzidenztafeln für die Punkte und Geraden der Ebene und für die Punkte und Ebenen des Raums mit Hilfe einer Polarität.  
*M. Zacharias.*

**Mann, Henry B.:** On orthogonal Latin squares. *Bull. Amer. math. Soc.* 50, 249—257 (1944).

Einfacher Beweis des Satzes von C. R. MacInnes [*Amer. math. Monthly* 14, 171—174 (1907)], daß PG (2, 5) die einzige projektive ebene Geometrie mit sechs Punkten auf einer Geraden ist.  
*M. Zacharias.*

**Baer, Reinhold:** Polarities in finite projective planes. *Bull. Amer. math. Soc.* 52, 77—93 (1946).

Theorie der Polarität in der finiten projektiven Ebene ohne Voraussetzung des Desarguesschen Satzes.  
*M. Zacharias.*

**Rickart, C. E.:** The Pascal configuration in a finite projective plane. *Amer. math. Monthly* 47, 89—96 (1940).

Untersuchung der dreifachen Punkte (Punkte, in denen sich drei nicht-benachbarte Seiten eines Pascalschen Sechsecks schneiden) in einer Steiner-Pascal-Konfiguration einer endlichen Geometrie PG (2,  $p$ ).  
*M. Zacharias.*



Iwamura, Tsurane: On continuous geometries. I. Japanese J. Math. 19, 57—71 (1944).

The centre  $Z$  of a not necessarily irreducible continuous geometry is, as a Boolean algebra, representable as the closed-open subsets of a suitable bicomact space  $S$ . The author defines, for  $a \in L$  and  $p \in S$ , the congruence class  $a/p$  by  $\{x \in L; e x = e a \text{ for some } e \text{ with } p \in e \in Z\}$ . The  $a/p$  form a complemented modular lattice  $L/p$  in which perspectivity is transitive and any two elements are perspectively comparable. When  $L$  is of a type  $k = 1, 2, \dots, \infty$ , a dimension function  $d(a) = d(a/p)$  can be defined such that, for  $e \in Z$ ,  $d(e) = 1$  or  $0$  according as  $p \in e$  or  $p \notin e$ . The  $d(a)$ , as a function of  $p$ , form a complete lattice  $D$  of functions continuous on  $S$  such that  $d(a) < d(b)$ ,  $= d(b)$  or  $> d(b)$  according as  $a < b$ ,  $\sim b$  or  $> b$ .  $d(a)$  is, in both  $L$  and  $D$ , unrestrictedly additive and continuous in the sense of order convergence (Cf. I. Halperin, this Zbl. 22, 69). Then it is proved that the class  $\overline{a/p} = \{x \in L; d(a + x, p) = d(a, x, p)\}$  forms an irreducible continuous geometry  $\overline{L/p}$  ( $= L/p$  when  $k < \infty$ ) with the dimension function  $d(\overline{a/p}) = d(a/p)$ . In this way, the representation theorem is obtained:

$$a \leftrightarrow \sum \oplus \overline{a/p}, \quad p \in S.$$

Also, by making use of a theorem of J. von Neumann (Continuous Geometry. Part III. Princeton 1937), it is proved that  $L$  is a direct sum  $\sum_{k \leq \infty} L_k$  of geometries of type  $k$ . K. Yosida.

Kawada, Yukiyo, Kaneo Higuti und Yatarô Matusima: Bemerkungen zur vorangehenden Arbeit von Herrn T. Iwamura. Japanese J. Math. 19, 73—79 (1944).

Iwamura's representation theorem (see the preceding review) is obtained in terms of maximal  $p$ -ideals:  $I$  is a maximal  $p$ -ideal in  $L$  if it is maximal with respect to the conditions that  $a \in I$  and  $b \in I$  imply  $a + b \in I$ , and  $c < a$  or  $c \sim a$ ,  $a \in I$  imply  $c \in I$ . Then  $I \cap Z$  is a maximal ideal in  $Z$  and conversely every maximal ideal in  $Z$  is of such type with a unique  $I$ . Let the dimension function  $d(a)$  in  $L$  be such that  $d(e) = 0$  or  $1$  for every  $e \in Z$ . Then  $I(d) = \{a \in L; d(a) = 0\}$  is a maximal  $p$ -ideal and  $L/I(d)$  is an irreducible continuous geometry. If  $L$  is of a type  $k = 1, 2, \dots, \infty$ , then every maximal  $p$ -ideal is of this form and the representation theorem is proved:  $L/I(d)$  is Iwamura's  $L, p$ , where  $p$  is the point corresponding to in the closed-open representation of  $Z$ . K. Yosida.

Prenowitz, Walter: Partially ordered fields and geometries. Amer. math. Monthly 53, 439—449 (1946).

Eine Menge heißt ternär teilweise geordnet (t. t. o.) durch eine ternäre Relation [deren Bestehen zwischen den Elementen  $a, b, c$  durch  $(a, b, c)$  ausgedrückt sei], wenn die Bedingungen erfüllt sind: Es gibt  $a, b, c$  mit  $(a, b, c)$ : aus  $(a, b, c)$  folgt  $a \neq b \neq c \neq a$  und  $(c, b, a)$ ; aus  $(a, b, c)$ ,  $(b, c, d)$  folgt  $(a, b, d)$  und  $(a, c, d)$ ; aus  $(a, b, c)$ ,  $(a, c, d)$  folgt  $(a, b, d)$  und  $(b, c, d)$ . Diese Abschwächung der Zwischenbeziehung läßt sich nun i. allg. nicht durch eine teilweise Ordnung im üblichen Sinn ausdrücken. Ein Körper heißt t. t. o., wenn aus  $(a, b, c)$  stets  $(a + x, b + x, c + x)$  und  $(ax, bx, cx)$  für  $x \neq 0$  folgt. Jeder solcher Körper enthält den Körper der rationalen Zahlen, und für diese bedeutet  $(a, b, c)$  die übliche Zwischenbeziehung. Der Körper der rationalen Funktionen über dem Körper der rationalen Zahlen aber besitzt z. B. eine t. t. o., die keine Zwischenbeziehung ist. Ein affiner Raum über einem t. t. o. Körper wird durch  $C = \lambda A + \mu B$  mit  $\lambda + \mu = 1$ ,  $(0, \lambda, 1)$ ,  $(0, \mu, 1)$  als  $(A, C, B)$  zu einer t. t. o. Menge, und die Verbindungsgerade  $AB$  besteht genau aus den  $C$ , zu denen es  $X_i$  mit  $X_1 = A$ ,  $X_2 = B$ ,  $X_n = C$  so gibt, daß zu jedem  $i$  ( $= 3, \dots, n$ ) Indizes  $j, k < i$  mit  $(X_i, X_j, X_k)$  oder  $(X_j, X_i, X_k)$  vorhanden sind. G. Pickert.

Artin, E.: Coordinates in affine geometry. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 2, 15—20 (1940).

Zwei Klassen von Elementen, Punkte und gerade Linien, werden angenommen. Postulate: Je zwei verschiedene Punkte haben eine einzige Verbindungsgerade. Zu jeder Geraden  $l$  geht durch jeden nicht auf  $l$  liegenden Punkt eine einzige Parallele. Es gibt drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen. Definitionen von Dilatationen und Translationen führen zur Einführung von Koordinaten.

*M. Zacharias.*

(1) Walker, Richard: Die Hilbertschen Axiome der Geometrie und ihre gegenseitige Unabhängigkeit. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 95, 151—170 (1944).

(2) Abellanas, Pedro: Analytische Struktur der offenen Strecke, definiert durch Hilberts Postulate der Inzidenz und der Anordnung. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 6, 101—126 (1946) [Spanisch].

(3) Wylie jr., C. R.: Hilbert's axioms of plane order. Amer. math. Monthly 51, 371—376 (1944).

(4) Banning, J.: On the order in an Euclidean plane. Nieuw Arch. Wiskunde, II. R. 22, 115—122 (1946).

(5) Bachmann, Friedrich: Ein lineares Vollständigkeitsaxiom. J.-Ber. Deutsche Math.-Verein. 53, 49—56 (1943).

In (1) werden die Hilbertschen Axiome teilweise etwas modifiziert, und damit wird die Unabhängigkeit für alle bis auf zwei nachgewiesen. Das eine ist äquivalent der Kongruenz eines Winkels mit sich selbst. Das andere besagt: Ist  $AB \equiv A'B'$  und  $BC \equiv B'C'$ , und liegt  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  und  $B'$  zwischen  $A'$  und  $C'$ , so ist  $AC \equiv A'C'$ . In (2) werden die Operationen der Addition und Multiplikation unter alleiniger Voraussetzung der Axiome der Inzidenz und der Anordnung für Punkte einer offenen Strecke definiert, und die analytische Struktur des entstehenden Systems wird untersucht. In (3) wird die Unabhängigkeit der Hilbertschen Anordnungsaxiome behandelt. In (4) werden vier Sätze aus Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ über die Anordnung von Punkten in einer Geraden bewiesen, indem Verf. Hilberts drei ebene Verknüpfungsaxiome und seine Anordnungsaxiome mit Abänderung von II2 zugrunde legt. An die Stelle von Hilberts Axiom II2 tritt das folgende: Jede Gerade enthält wenigstens drei Punkte, und es existieren drei Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $P$ , von denen  $P$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt. In (5) wird das Vollständigkeitsaxiom so formuliert: Es ist nicht möglich, das System der Punkte auf einer Geraden so zu erweitern, daß in dem erweiterten System die Hilbertschen Axiome der linearen Ordnung, der linearen Kongruenz und das Archimedische Axiom insgesamt gelten.

*M. Zacharias.*

Baer, Reinhold: The fundamental theorems of elementary geometry. An axiomatic analysis. Trans. Amer. math. Soc. 56, 94—129 (1944).

Die Sätze von den Schnittpunkten der Seitenhalbierenden, Höhen, Seitenmittelsenkrechten und Winkelhalbierenden eines Dreiecks kommen auf die Mittelpunkt- und die Orthogonalitätsbeziehung hinaus, die vom Verf. axiomatisiert werden.

*M. Zacharias.*

Gillam, Basil E.: A new set of postulates for euclidean geometry. Revista Ci. 42, 869—899 (1940).

Greenwood, Thomas: Les fondements de la géométrie euclidienne. Revue trimest. Canad. 28, 195—223 (1942).

Beide Verff. gründen die dreidimensionale euklidische Geometrie auf die Begriffe Punkt und Entfernung. Gillam erhält durch ein algebraisches Verfahren alle Hilbertschen Axiome. Greenwood bestimmt die Eigenschaften der Geraden durch das Postulat der Krümmung Null.

*M. Zacharias.*

Abellanas, Pedro: Über die Orientierung in einem Strahlenbündel im euklidischen oder hyperbolischen Raum. *Revista Acad. Ci. Zaragoza*, II. Ser. 1, 24—31 (1946) [Spanisch].

Hjelmslev, Johannes: Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. IV, V. *Danske Vid. Selsk. mat.-fys. Medd.* 22, Nr. 6, 40 S.; Nr. 13, 37 S. (1945).

Teil III s. dies. Zbl. 26, 339. Verf. dehnt die Begriffe seiner ebenen Geometrie, in der zwei Punkte immer durch wenigstens eine gerade Linie verbunden werden können und zwei verschiedene gerade Linien entweder einen Punkt oder eine Strecke gemein haben können, auf den  $n$ -dimensionalen Raum aus. Mittels einer gewissen Bedingungen genügenden Gruppe von Transformationen, den Bewegungen, werden die Begriffe der Kongruenz und der Orthogonalität definiert. Für Unterräume  $R_m$  wird eine Spiegelung definiert, d. h. eine involutorische Bewegung, die alle Punkte von  $R_m$  und nur diese fest läßt. Bewegungen werden in Produkte von Spiegelungen zerlegt. — Eine Strecke  $S$ , die mehreren geraden Linien gemeinsam ist, wird singulär genannt. Auf einer durch  $S$  gehenden Geraden wird in einem Punkt, der nicht mit einem Punkt von  $S$  einer singulären Strecke angehört, die Normale errichtet. Die Schnittpunkte dieser Normale mit den Geraden durch  $S$  bilden eine zu  $S$  reziproke singuläre Strecke  $\Sigma(S)$ . Es gilt die Beziehung: Wenn  $S'$  kongruent zu  $\Sigma(S)$  ist, so ist  $\Sigma(S')$  kongruent zu  $S$ . Wenn keine zwei gerade Linien identische Mengen von Normalen haben, so sind zwei benachbarte Seiten eines Rechtecks immer reziprok, und zwei reziproke Strecken sind immer benachbarte Seiten eines Rechtecks. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist entweder (a) die Winkelsumme jedes Dreiecks gleich zwei Rechten oder (b) sie differiert von zwei Rechten nur um einen singulären Winkel, d. h. einen Winkel, dessen Seiten auf Nachbargeraden liegen. (Zwei Geraden heißen Nachbargeraden, wenn jeder Punkt der einen einen Nachbarpunkt auf der anderen hat. Nachbarpunkte sind Punkte, die auf einer singulären Strecke liegen.)

*M. Zacharias.*

Hjelmslev, Johannes: Beiträge zur nicht-Eudoxischen Geometrie. I. II. *Danske Vid. Selsk. mat.-fys. Medd.* 21, Nr. 5, 26 S. (1944).

Verf. beschäftigt sich mit einer Geometrie, in der nur die Hilbertschen Axiomgruppen I—III gelten. Insbesondere untersucht er die Begriffe der Äquivalenz und des Flächeninhalts in einer solchen Geometrie. Zwei Strecken oder Winkel  $a$  und  $b$  ( $a < b$ ) nennt er äquivalent, wenn ein angebbares endliches Vielfaches von  $a$  größer als  $b$  ist.

*M. Zacharias.*

Hjelmslev, Johannes: Der pythagoreische Lehrsatz. *Mat. Tidsskr. B* 1945, 49—57 (1945) [Dänisch].

Verf. stellt eine Reihe von Axiomen auf, die alle auf den Begriff der Spiegelung zurückgehen. Das Parallelenaxiom und das Archimedische Axiom werden nicht angenommen. Jene Axiome genügen einerseits zum Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes und sind andererseits verträglich mit dem Axiom, daß es eine Strecke gibt, die zu zwei verschiedenen Geraden gehört.

*M. Zacharias.*

● Malengreau, Julien: Étude critique du théorème de Pythagore. — 2. Aufl. Lausanne: F. Rouge & Cie. 1945. 127 p.

Verf. zeigt, daß die beiden Formen des pythagoreischen Satzes (Satz über Längen und Satz über Flächen) wesentlich verschieden sind, indem er die erste Form aus Postulaten herleitet, die zum Beweis der zweiten Form nicht genügen. Er betrachtet ferner eine Geometrie, in der der Stewartsche Vierpunktesatz grundlegend ist, und entwickelt aus diesem die entsprechende Relation für  $n + 2$  Punkte im Raum.

*M. Zacharias.*

Tschen, Y. Why: Algebraisation of plane absolute geometry. *Amer. J. Math.* 67, 363—388 (1945).



Verf. benutzt dieselben Axiome wie Bachmann (dies. Zbl. 15, 36) zur Einbettung der absoluten in eine projektive Ebene, aber ohne den von Bachmann eingeführten kinematischen Raum anzuwenden.  
*M. Zacharias.*

Hjelslev, Johannes: Die Geometrie der schwachen Figuren. Danske Vid. Selsk. mat.-fys. Medd. 20, Nr. 21, 64 S. (1943).

Eine schwache Figur im reellen projektiven dreidimensionalen Raum besteht aus einer veränderlichen Menge von Ebenen, Geraden und Punkten derart, daß alle Ebenen sich einer einzelnen festen Ebene, alle Geraden einer festen Geraden und alle Punkte einem festen Punkt nähern. Verf. betrachtet insbesondere schwache Figuren aus Tangenten und Sekanten eines ebenen oder räumlichen Bogens, deren Berührungs- und Schnittpunkte sich alle einem bestimmten Endpunkt des Bogens nähern. Wenn bei einem ebenen konvexen Bogen mit Endpunkt die Tangente in  $O$  von der Tangente in einem Punkt  $B$  in  $Q$  geschnitten wird, heißt  $\lim_{B \rightarrow O} (Q, B, OQ)$  der Index des Bogens in  $O$ . Für einen räumlichen Bogen werden

drei verschiedene Indizes definiert. Weiter werden für ebene Bogen ein Exponent der Krümmung, für räumliche Bogen Exponenten der Krümmung und der Torsion definiert. Weitere Grenzübergänge führen auf gewisse Begriffe, die als Krümmungs- und Torsionsverhältnis bezeichnet werden. Alle diese Begriffe werden auf gewisse Kurvensingularitäten angewendet.  
*M. Zacharias.*

Kerawala, S. M.: Euclidean aspect of Hjelslev's geometry. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 3, 39—53 (1941).

Die Genauigkeit der Lokalisierung eines Punktes in der Ebene sei durch eine Konstante  $\delta$  derart bestimmt, daß ein durch geometrische Bedingungen bestimmter physikalischer Punkt in einem Bereich vom Durchmesser  $\leq \delta$  und Inhalt  $\leq \frac{1}{4} \pi \delta^2$  um einen abstrakten Punkt  $P$  als Schwerpunkt liegt. Ein solcher Bereich wird „Punktoid“ ( $P$ ) genannt. Analog werden „Linoid“ und „Angloid“ usw. definiert. Verf. untersucht die Beziehungen zwischen diesen Begriffen.

*M. Zacharias.*

Birkhoff, George D.: One-dimensional metric geometry and the equation  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, 169—183, Zürich: Orell Füssli 1945.

Sechs Postulate für die euklidische eindimensionale Geometrie, in denen die Anordnungsbeziehungen außer acht gelassen werden und nur eine endliche Anzahl von Punkten betrachtet werden.

*M. Zacharias.*

Blumenthal, Leonard M.: Remarks on a weak four-point property. Revista Ci. 45, 183—193 (1943).

Ein metrischer Raum ist „ptolemäisch“, wenn für jeden Punktvierer  $p, q, r, s$  die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & (pq)^2 & (pr)^2 & (ps)^2 \\ (pq)^2 & 0 & (qr)^2 & (qs)^2 \\ (pr)^2 & (qr)^2 & 0 & (rs)^2 \\ (ps)^2 & (qs)^2 & (rs)^2 & 0 \end{vmatrix} \leq 0$$

ist. Ein metrischer ptolemäischer Raum genügt den linearen Anordnungsaxiomen mit Ausnahme des einen, daß von drei paarweise verschiedenen Punkten einer zwischen den beiden anderen liegt.  
*M. Zacharias.*

Birkhoff, Garrett: Metric foundations of geometry. Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 402—406 (1941).

Birkhoff, Garrett: Metric foundations of geometry. I. Trans. Amer. math. Soc. 55, 465—492 (1944).

Die Klasse aller endlich-dimensionalen euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Räume wird in der Klasse aller metrischen Räume durch zwei Eigen-

schaften gekennzeichnet: (1) Durch irgend zwei Punkte kann eine einzige Strecke gelegt werden. (2) Jede Isometrie zwischen Untermengen des Raumes kann zu einer Selbstisometrie des ganzen Raumes erweitert werden. Durch (2) wird der elliptische Raum ausgeschlossen. *M. Zacharias.*

Menger, Karl: Projective generalizations of metric geometry. I. II. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 5/6, 60—75 (1944).

Probleme der projektiven Abbildung und Einbettung gewisser Klassen projektiver Räume. *M. Zacharias.*

Menger, K.: On algebra of geometry and recent progress in non-Euclidean geometry. Rice Inst. Pamphlet 27, 41—79 (1940).

Jenks, F. B.: A new set of postulates for Bolyai-Lobachevsky geometry. II. III. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 2, 10—14 (1940); 3, 3—12 (1941).

Abbott, J. C.: The projective theory of non-Euclidean geometry. I. II. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 3, 13—27 (1941); 4, 22—30 (1943); 5/6, 43—52 (1944).

Teil I s. dies. Zbl. 21, 244. Bericht über neue Beiträge zur Axiomatik der projektiven, affinen, euklidischen und hyperbolischen Geometrie in Arbeiten Mengers und seiner Schüler Jenks und Abbott. Die Theorien der Anordnung und des Parallelismus in der ebenen hyperbolischen Geometrie werden von Jenks auf einige Postulate des Verbindens und Schneidens zurückgeführt. Abbott fügt ein Postulat zur Behandlung der Kongruenz hinzu. Durch ein weiteres Postulat wird der Ort der Fernpunkte zu einem Kegelschnitt gemacht. Senkrechtstehen, Spiegelung, Bewegung, überunendliche Punkte werden eingeführt.

*M. Zacharias.*

Menger, Karl: New projective definitions of the concepts of hyperbolic geometry. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 7, 20—28 (1946).

Die Begriffe der Kongruenz, des Senkrechtstehens und des Parallelismus werden nur mittels der Operationen des Verbindens und Schneidens definiert. Daraus sind die Eigenschaften der Kongruenz und des Parallelismus für die hyperbolische Ebene zu entwickeln.

*M. Zacharias.*

De Baggis, Henry F.: Hyperbolic geometry. I. A theory of order. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 7, 3—14 (1946).

Verf. stellt sechs Axiome für die ebene hyperbolische Geometrie auf, die nur von den Operationen des Verbindens und Schneidens Gebrauch machen. Sie bedingen die Geltung der Verknüpfungssaxiome Hilberts. Nach Einführung einer Definition für das Liegen eines Punktes zwischen zwei anderen wird die Geltung der Hilbertschen Anordnungsaxiome nachgewiesen.

*M. Zacharias.*

● Coxeter, H. S. M.: Non-Euclidean Geometry. Math. Expositions. Nr. 2. Toronto: University of Toronto Press 1942. XV, 281 p.; \$3,25.

Ausgehend von der projektiven Geometrie werden die Grundprinzipien der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie entwickelt. Zur elliptischen Geometrie führt die Einführung eines absoluten Polarsystems. Zur hyperbolischen Geometrie kommt Verf. durch Einführung des Kongruenzbegriffs und einer absoluten Geometrie, die durch Adjunktion des hyperbolischen Parallelenaxioms zur hyperbolischen Geometrie wird.

*M. Zacharias.*

Hjelmlev, J.: Eine Vorlesung über nichteuklidische Geometrie. Mat. Tidsskr. A 1945, 3—36 (1945) [Dänisch].

Rossier, P.: Sur l'équation de Chasles. C. r. Soc. Physiques Genève 62, 95—97 (1945).

Die Definition der nichteuklidischen Entfernung als Logarithmus eines Doppelverhältnisses beruht auf dem Satz: Wenn die Funktion  $f(x, y)$  der Gleichung  $f(a, b) + f(b, c) = f(a, c)$  genügt und partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzt, so ist  $f(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y)$ .

*M. Zacharias.*

Barankin, E. W.: Heat flow and non-Euclidean geometry. Amer. math. Monthly 49, 4—14 (1942).

Konstruktion einer ebenen hyperbolischen Geometrie mit Hilfe der Annahme eines gewissen Wärmeflusses. *M. Zacharias.*

Barbilian, D.: Aufbau der projektiven Geometrie in der absoluten Ebene. Monatsh. Math. 50, 298—316 (1943).

Die Gleichung des absoluten Kreises  $\Omega$  sei  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Die Gleichung eines  $\Omega$  berührenden Kreises lautet  $(h+k)(x^2 + y^2) - 2k a_1 x - 2k a_2 y - h + k = 0$  [ $a_1 = (\lambda^2 - \mu^2)/(\lambda^2 + \mu^2)$ ,  $a_2 = 2\lambda\mu/(\lambda^2 + \mu^2)$ ;  $h/k$ ,  $\lambda/\mu$  binäre Parameter]. Er ist ein parabolischer Kreis der hyperbolischen Geometrie, wenn er ganz innerhalb  $\Omega$  liegt, d. h. wenn  $h/k$  endlich und positiv ist. Legt man seinem Radius ein bestimmtes Vorzeichen  $r' = r h/(h+k)$  bei,  $r = \pm 1$ , so erhält man zwei getrennte Kontinuen  $H^+$ ,  $H^-$  parabolischer Zykeln. Durch Adjunktion der Irrationalität  $q^{1/2} = r_1 \sqrt{h k (\lambda^2 - \mu^2)}$ ,  $r_1 = \pm 1$ , entsteht der parabolische „Überzykel“  $H^{++}$ . Fügt man als Grenzfiguren die (zusammenfallenden) Überorientierungen von  $\Omega$  und die uneigentlichen Punkte der hyperbolischen Ebene hinzu, so werden  $H^{++}$  und  $H^{--}$  zwei abgeschlossene Mannigfaltigkeiten. Diese können auf die Punkte und Geraden der projektiven Ebene umkehrbar eindeutig abgebildet werden. — Dieses Modell der projektiven Geometrie in der hyperbolischen Ebene gestattet auch einen befriedigenden Aufbau der euklidischen Geometrie in der hyperbolischen. *M. Zacharias.*

Wu, Ta-Jen: Projectivities on a line and non-Euclidean motions in space. Sci. Record 1, 59—61 (1942).

Die auf die hyperbolische Geometrie bezüglichen Ergebnisse werden aus der elliptischen Geometrie abgeleitet, indem deren absolute Fläche durch eine komplexe Projektivität in die der hyperbolischen Geometrie transformiert wird. Dabei benutzt Verf. mit Vorteil eine von Stephanos [Math. Ann. 22, 299—331 (1883)] angegebene eindeutige Beziehung zwischen den Projektivitäten auf einer geraden Linie und den Punkten des projektiven Raumes. *M. Zacharias.*

Valeiras, Antonio: Das einem Dreieck einbeschriebene Dreieck kleinsten Umfangs und nichteuklidische Geometrien. Publ. Circ. mat. Inst. nac. Profesorado secund. Nr. 6, 14 p. (1942) [Spanisch].

Valeiras, Antonio: Das einem Dreieck einbeschriebene Dreieck kleinsten Umfangs in den nichteuklidischen Geometrien. Memorias sobre Matemáticas (1942—44) por Antonio Valeiras, p. 11—23. Buenos Aires 1944 [Spanisch].

Vom Euklidischen Parallelenaxiom unabhängiger Beweis für die Minimaleigenschaft des Höhenfußpunktdreiecks. *M. Zacharias.*

Nestorowitch, N. M.: Sur la puissance constructive d'un complexe  $E$  sur le plan de Lobatchevski. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 43, 186—188 (1944).

Probleme zweiten Grades können in der hyperbolischen Ebene mit Zirkel und Lineal gelöst werden. *M. Zacharias.*

Fabricius-Bjerre, Fr.: Über die Normalen von Quadriken in einem nichteuklidischen Raum. Mat. Tidsskr. B 1945, 75—80 (1945) [Dänisch].

Gegeben seien zwei einander nicht berührende Quadriken im projektiven dreidimensionalen Raum. Verf. wählt die eine als absolute Fläche einer nicht-euklidischen Metrik und untersucht die Eigenschaften der Normalen der andern in dem nichteuklidischen Raum. *M. Zacharias.*

Wunderlich, Walter: Darboux'sche Verwandtschaft und Spiegelung an Flächen 2. Grades. Deutsche Math. 7, 417—432 (1944).

Zwischen den Modellen von Cayley-Klein und von Poincaré zur Veranschaulichung der nichteuklidischen Geometrien stellt eine Darboux'sche ein-zweideutige quadratische Punkttransformation den Zusammenhang her. Verf.



erklärt diese durch einen räumlichen Projektionsvorgang und leitet aus diesem eine „verallgemeinerte“ Darboux'sche Transformation her. Eine Erweiterung führt zu einer „nichteuklidischen Darboux-Transformation“. Verf. weist dann das Vorkommen dieser verschiedenen Transformationen bei Spiegelungen am Drehparaboloid, Drehellipsoid und an der Kugel nach. *M. Zacharias.*

**Tomber, Marvin L.:** On perpendicularity in rational hyperbolic planes. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 7, 15—19 (1946).

Verf. untersucht die Existenz von zueinander senkrechten Geraden.

*M. Zacharias.*

**Topel, B. J.:** Bolyai-Lobachevsky planes with finite lines. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 5/6, 40—42 (1944).

Wenn eine hyperbolische Ebene finite Geraden hat, so muß sie, wie Verf. beweist, homogen mit zwei Punkten auf jeder Geraden sein. Die Gesamtzahl der Punkte der Ebene ist beliebig  $\geq 5$ . *M. Zacharias.*

**Landin, Joseph:** Axiomatic theory of a singular non-Euclidean plane. I. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 5/6, 53—59 (1944).

Sonderfall der hyperbolischen Geometrie mit einem in ein Geradenpaar entarteten absoluten Kegelschnitt, d. i. die Geometrie der affinen Halbebene.

*M. Zacharias.*

**Yaglom, I. M. and A. M. Yaglom:** Tangential Poincaré models of plane geometries of constant curvature. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 53, 401—404 (1946).

**Yaglom, I. M.:** On the groups of Moebius and Laguerre in planes of constant curvature. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 54, 297—300 (1946).

Eine orientierte Gerade  $L$  ist bestimmt durch ihren Winkel  $q$  mit einer festen Achse  $A$  und die Abszisse  $s$  des Schnittpunkts  $(A, L)$ . Drei Typen von komplexen Zahlen werden eingeführt:  $x + i y$  ( $i^2 = -1$ ),  $x + \varepsilon y$  ( $\varepsilon^2 = 0$ ),  $x + e y$  ( $e^2 = 1$ ). Dann heißt  $z = \operatorname{tg}(q/2)(\cos s K + i \sin s K)$  im ersten Fall oder  $z = \operatorname{tg}(q/2)(1 + \varepsilon s)$  im zweiten Fall oder  $z = \operatorname{tg}(q/2)(\cosh s K + e \sinh s K)$  im dritten Fall die komplexe Koordinate der Geraden  $L(q, s)$  in der elliptischen, euklidischen oder hyperbolischen Ebene ( $\pm K^2 =$  Krümmung der elliptischen bzw. hyperbolischen Ebene). Die Gruppen der Laguerreschen Transformationen der elliptischen, euklidischen und hyperbolischen Ebene sind isomorph den Gruppen der Punkttransformationen der euklidischen Ebene, die die Kreise, die Parabeln mit fester Achsenrichtung und die gleichseitigen Hyperbeln mit fester Achsenrichtung in sich transformieren. *M. Zacharias.*

**Rosenfeld, B. A.:** Die innere Geometrie der Geradenmannigfaltigkeit des elliptischen Raums. Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski (Mat.) 73, 49—58 (1944) [Russisch mit deutscher Zusammenfassg.].

Verf. benutzt die Abbildung der Geraden des  $R_3$  auf die Punkte einer vierdimensionalen Quadrik  $P$  im  $R_5$  unter Zugrundelegung einer elliptischen Metrik im  $R_3$ .  $P$  kann auf  $\infty^2$  Arten in  $\infty^2$  „Quadratiken“ gespalten werden. Diese sind die Bilder der Kongruenzen von Geraden des  $R_3$ , die auf einer Geraden senkrecht stehen. *M. Zacharias.*

**Kronsbein, John:** Elliptic geometry, conformal maps, and orthogonal matrices. Duke math. J. 13, 505—519 (1946).

Ein Punkt der Einheitskugel werde aus dem Mittelpunkt und Koordinatenursprung in  $(X, Y, 1)$  und stereographisch aus  $(0, 0, -1)$  in  $(x, y, 0)$  projiziert. Die Geraden  $X = \text{const}$  und  $Y = \text{const}$  werden in zwei Scharen koaxialer Kreise abgebildet. Verf. betrachtet verschiedene Transformationen und untersucht das Ergebnis einer beliebigen Rotation der Kugel. *M. Zacharias.*

**Perron, Oskar:** Neuer Aufbau der nichteuklidischen (hyperbolischen) Trigonometrie. Math. Ann. 119, 247—265 (1944).

Verf. baut die hyperbolische Trigonometrie ohne Benutzung von Grenzkreisbögen und ohne weitere axiomatische Annahmen einfacher als frühere Verff. auf. *M. Zacharias.*

Lalan, V.: Sur certaines équations fonctionnelles et les fondements de la géométrie. Bull. Soc. math. France **72**, 55—67 (1944).

Vektorbetrachtungen führen zur Theorie der Kreise, Horozykeln, Abstandslinien und zu den Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie und Differentialgeometrie. *M. Zacharias.*

Schilling, Friedrich: Die nichteuklidische Trigonometrie der hyperbolischen und elliptischen Dreiecke im Gebiete außerhalb des absoluten Kegelschnitts in der projektiven Ebene mit hyperbolischer Geometrie. Deutsche Math. **7**, 432—459 (1944).

Schilling, Friedrich: Die nichteuklidische Trigonometrie der allgemeinen rechtwinkligen Dreiecke in der hyperbolischen Geometrie. Deutsche Math. **7**, 460—476 (1944).

Schilling, Friedrich: Die nichteuklidische Trigonometrie der allgemeinen nichtrechtwinkligen Dreiecke und der rechtseitigen Dreiecke in der hyperbolischen Geometrie. Deutsche Math. **7**, 476—499 (1944).

Entwicklung der Trigonometrie der hyperbolischen Ebene unter der allgemeinen Voraussetzung, daß nicht alle Ecken des Dreiecks innerhalb des absoluten Kegelschnitts liegen. *M. Zacharias.*

Bruins, E. M.: Verallgemeinerung einiger elementarer Sätze in der  $n$ -dimensionalen  $Q$ -Geometrie. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. **48**, 198—205 = Indagationes Math. **7**, 3—10 (1945) [Holländisch].

Verf. entwickelt die Formeln für Winkel, Entfernungen und Rauminhalte in einer  $n$ -dimensionalen nichteuklidischen Geometrie. Er verallgemeinert den Stewartschen Satz und den sphärischen Kosinussatz. *M. Zacharias.*

Gutiérrez Novoa, L.: Relationen der ko-euklidischen Geometrie. Bol. mat. **12**, 226—231 (1939) [Spanisch].

Comét, S.: Hyperbolische Trigonometrie im Lorentzraum. Elementa **26**, 79—81 (1943) [Schwedisch].

Patterson, B. C.: The inversive plane. Amer. math. Monthly **48**, 589—599 (1941).

Vergleich der Methoden von E. Kasner [Trans. Amer. math. Soc. **1**, 430—498 (1900)] und F. Morley (Inversive geometry, London 1933). *M. Zacharias.*

Loong, Chi-Ho: Some analogs of the triangle geometry in the Kasner plane. Nat. Math. Mag. **17**, 8—12 (1942).

Definitionen der Höhenschnittpunkte, des Orthopols einer Geraden und der Wallace-Geraden in der Kasner-Ebene. *M. Zacharias.*

● Artzy, Rafael: Minimum nets in abstract webs. Summary of a thesis. Jerusalem: Hebrew University 1945. II, 3 p. [Hebräisch mit engl. Zusammenfassg.].

### Elementargeometrie:

Gentry, F. C.: Analytic geometry of the triangle. Nat. Math. Mag. **16**, 127—140 (1941).

Gulasekharan, F. H. V.: Mr. Gibbins' triangle. Math. Gaz. **23**, 360—363 (1939).

Berichtigungen und Ergänzungen zur Arbeit von Gibbins (dies. Zbl. **18**, 229).

*M. Zacharias.*

Lauffer, R.: Zyklische Korrelation eines Dreiseits. S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa **153**, 77—92 (1944).

Mit dem aus den drei gerichteten Speeren  $l$ ,  $m$ ,  $n$  zusammengesetzten Dreiseit (mit den Ecken  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) wird die Korrelation  $K$  verknüpft, in der jedem Speer

der Schnittpunkt mit dem vorhergehenden Speer (also  $l \rightarrow B$ ,  $m \rightarrow C$ ,  $n \rightarrow A$ ) und dem Mittelpunkt  $O$  des Berührzykels die unendlich ferne Gerade  $u$  zugeordnet ist. Diese Korrelation wird mit drei quadratischen Verwandtschaften in Zusammenhang gebracht: Der durch harmonische Würfe projektiv erklärten Verwandtschaft harmonikaler Punkte und Geraden, der durch Winkelgleichheiten metrisch erklärten Verwandtschaft der Winkelgegenpunkte und der durch Streckengleichheiten erklärten affin invarianten Verwandtschaft der Seitengegenpunkte. Dadurch ergeben sich neue Zusammenhänge zwischen bekannten merkwürdigen Gebilden. Insbesondere werden Beziehungen des Linielements von Stephanos zu anderen merkwürdigen Punkten und Geraden festgestellt. *M. Zacharias.*

**Mikusiński, Jan G.-:** Sur la notion de point remarquable dans la géométrie du triangle. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A, 1, 41—44 (1946) [Französisch mit poln. Zusammenfassg.].

Verf. nennt solche Punkte merkwürdig, deren baryzentrische Koordinaten gegebene homogene Funktionen der Dreiecksseiten sind, die gewisse Bedingungen erfüllen. *M. Zacharias.*

**Wood, P. W.:** Points isogonally conjugate with respect to a triangle. Math. Gaz. 25, 266—272 (1941).

**Fettis, H. E.:** The Fermat and Hessian points of a triangle. Amer. math. Monthly 53, 74—78 (1946).

Verf. beweist rein geometrisch einige weniger bekannte Eigenschaften dieser beiden Punktepaare. *M. Zacharias.*

**Bacchiani, R.:** Sulla geometria del triangolo. Periodico Mat., IV. Ser. 23, 37—39 (1943).

Ist  $V$  der Torricellische Punkt des Dreiecks  $ABC$  und sind  $\mu_1 = AV$ ,  $\mu_2 = BV$ ,  $\mu_3 = CV$ , so ist die Potenz von  $V$  bezüglich des Umkreises des Dreiecks  $p(V) = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3)^{-1}$ . *M. Zacharias.*

**Cavallaro, Vincenzo G.:** Sur les distances mutuelles des points remarquables de la géométrie du triangle. Anais Fac. Ci. Pôrto 29, 5—10 (1944).

**Dobrescu, A.:** Die Konfiguration, die von den Parallelen zu den Seiten eines Dreiecks durch einen Punkt gebildet wird. Gaz. mat. București 49, 272—279 (1944) [Rumänisch].

Die Parallele durch  $M$  zu  $BC$  schneide  $AB$  in  $C_1$ ,  $AC$  in  $B'$ ; die Parallele zu  $CA$  schneide  $BC$  in  $A_1$ ,  $BA$  in  $C'$ ; die Parallele zu  $AB$  schneide  $CA$  in  $B_1$ ,  $CB$  in  $A'$ . Ferner sei  $A_2 = (B'C', B_1C_1)$ ,  $B_2 = (C'A', C_1A_1)$ ,  $C_2 = (A'B', A_1B_1)$ . Dann sind die Dreiecke  $ABC$ ,  $A_2B_2C_2$  perspektiv. Ist  $A_0 = (A'B', A_1C_1)$ ,  $B_0 = (B'C', B_1A_1)$ ,  $C_0 = (C'A', C_1B_1)$ , so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $A_0B_0C_0$  ähnlich und perspektiv,  $A_0B_0C_0$  und  $A_2B_2C_2$  perspektiv bezüglich  $M$ . Sind  $a, b, c$  die Ecken des von  $B_1C'$ ,  $C_1A'$ ,  $A_1B'$  gebildeten Dreiecks, so sind die Dreiecke  $ABC$ ,  $abc$  perspektiv bezüglich  $M$ . *M. Zacharias.*

**Lauffer, R.:** Ein System von acht Symmetriedreiecken eines euklidischen Dreiecks. S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa 151, 277—291 (1942).

Eigenschaften von acht aus Schnittpunkten von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden gebildeten Dreiecken. *M. Zacharias.*

**Mikusiński, Jan G.-:** Sur quelques propriétés du triangle. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A, 1, 45—50 (1946) [Französisch mit poln. Zusammenfassg.].

Auf den Seiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  des Dreiecks  $ABC$  werden die Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  derart angenommen, daß  $BA':A'C' = p$ ,  $CB':B'A' = q$ ,  $AC':C'B' = r$  gegebene Größen sind. Verf. berechnet die Verhältnisse der Inhalte des Dreiecks  $A'B'C'$  und des von den Geraden  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  gebildeten Dreiecks zu dem Inhalt des Dreiecks  $ABC$  als Funktionen von  $p, q, r$ . Vgl. die ähnlichen Untersuchungen von J. Steiner (Ges. Werke I, 165—167, Berlin 1881). *M. Zacharias.*



Clausen, A. H.: Ein Dreieckssatz. Mat. Tidsskr. A 1943, 33—35 (1943) [Dänisch].

Verf. beweist den allgemeinen Fall eines von Hjelmslev als Aufgabe gestellten und für ein gleichseitiges Dreieck bewiesenen Satzes [Nyt. Tidsskr. Mat. 9, 23 (1898)]. *M. Zacharias.*

Alaci, V.: Bemerkenswerte Beziehungen im Dreieck. Revista mat. Timișoara 23, 87—91, 99—104 (1943) [Rumänisch].

Gewisse Identitäten zwischen komplexen Zahlen liefern metrische Beziehungen im Dreieck. *M. Zacharias.*

Cavallaro, Vincenzo G.: Eigenschaften eines Dreiecks, die im Grenzfall der kollinearen Scheitel erhalten bleiben. Bol. Mat. 13, 102—105 (1940) [Spanisch].

Cavallaro, V. G.: Geometria baricentrica del triangolo al limite collineare. Boll. Mat., IV. Ser. 4, 21—23 (1943).

Gheorghiu, S.: Grenzdreiecke. Gaz. mat. București 48, 543—546 (1943) [Rumänisch].

Ciamberlini, Corrado: Sulla condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia acutangolo, rettangolo o ottusangolo. Boll. Un. mat. Ital., II. Ser. 5, 37—41 (1943).

Escamard, V. d': Un teorema sul triangolo rettangolo. Boll. Un. mat. Ital., II. Ser. 4, 200—202 (1942).

Beweis der Umkehrung des Satzes: Der halbe Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe des Umkreisdurchmessers und des Inkreisradius. *M. Zacharias.*

Cattaneo, P.: Due teoremi sui triangoli. Boll. Un. mat. Ital., II. Ser. 5, 35—37 (1943).

Anderer Beweis des Satzes in der vorstehend besprochenen Arbeit und eines ähnlichen Satzes. *M. Zacharias.*

Musselman, J. R.: Some loci connected with a triangle. Amer. math. Monthly 47, 354—361 (1940).

In der Ebene eines Dreiecks  $A_1A_2A_3$  werden ein Punkt  $P$  und die Spiegelbilder  $B_i$  der Punkte  $A_i$  bezüglich  $P$  angenommen. Dann schneiden sich die Kreise  $B_2B_3A_1$ ,  $B_3B_1A_2$ ,  $B_1B_2A_3$  in einem Punkt  $D$  des Umkreises des Dreiecks. Verf. untersucht die Örter von  $P$  zu bestimmten Lagen von  $D$ . *M. Zacharias.*

Wong, Yung-Chow: Some properties of the triangle. Amer. math. Monthly 48, 530—535 (1941).

Thébault, V.: Contribution à la géométrie du triangle. C. r. Acad. Sci., Paris 218, 433—435 (1944).

M'Bride, J. A.: The equal internal bisectors theorem, 1840—1940. Many solutions or none? A centenary account. Edinburgh math. Notes Nr. 33, 1—13 (1943).

Kurze Geschichte des Lehmusschen Satzes. Mitteilung und Diskussion einiger Beweise. *M. Zacharias.*

Bors, C.: Considérations projectives sur la droite de Simpson. Bol. Mat. 13, 98—101 (1940).

Wallacescher Satz als Sonderfall einer projektiven Eigenschaft von fünf Punkten eines Kegelschnitts, die schon von Poncelet stammt (Propriétés projectives I, 468, Paris 1865). *M. Zacharias.*

Gambier, B.: Triangles en position isogonale. Bull. Soc. math. France 70, 31—39 (1942).

Lauwerier, H. A.: Einige Eigenschaften der Wallacegeraden eines Dreiecks. Nieuw Tijdschr. Wiskunde 28, 248—257 (1941) [Holländisch].

Sundet, K. Lage: Über den Simonschen Satz. Norsk. math. Tidsskr. 27, 112—114 (1945) [Norwegisch].

Patterson, B. C.: The triangle: its deltoids and foliates. Amer. math. Monthly 47, 11—18 (1940).

„Deltoid“ = dreispitzige Hypozykloide, „foliates“ = Fußpunktkurven einiger Punkte bezüglich der Wallacegeraden. *M. Zacharias.*

Gonzalez, M. O.: Verallgemeinerung des Satzes von Menelaus. Revista Ci. 44, 93—106 (1942) [Spanisch].

Erweiterung der trigonometrischen Form des Satzes von Menelaus auf ein Vieleck. — Vgl. die Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 14, 408). *M. Zacharias.*

Court, N. A.: On the Cevians of a triangle. Nat. Math. Mag. 18, 3—6 (1943).

Labra y Fernández, M.: Einige allgemeine Formeln betreffs der Ceva-Konfiguration. Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 1, 73—83 (1943) [Spanisch].

Cobb, R. H.: Some homothetic triangles related to the Euler-line. Math. Gaz. 26, 209—211 (1942).

Crain, K. W.: A locus related to the Euler-line. Nat. Math. Mag. 17, 163—164 (1943).

MacQueen, M. L. and R. W. Hartley: Elliptic Euleroids. Amer. math. Monthly 53, 511—516 (1946).

Ein Punkt  $P$  durchlaufe eine Ellipse mit den Brennpunkten  $F, F'$ . Die Euler-sche Gerade des Dreiecks  $PFF'$  umhüllt dabei eine Kurve, die Verff. als Euleroid bezeichnen und deren Eigenschaften sie untersuchen. *M. Zacharias.*

Thébault, V.: Concerning pedal circles and spheres. Amer. math. Monthly 53, 324—326 (1946).

Lauffer, R.: Beweis des Morleyschen Dreieckssatzes. Deutsche Math. 7, 405 (1944).

Vereinfachung und Erweiterung des von G. Kowalewski gegebenen Beweises (dies. Zbl. 23, 359). *M. Zacharias.*

Unger, Georg: Elementarer projektiver Beweis des Satzes von Morley. Math.-astron. Bl. Heft 3, 72—78 (1941).

Die Figur  $F$  der 27 gleichseitigen Dreiecke, deren Ecken die Schnittpunkte der den Seiten des Grunddreiecks  $ABC$  anliegenden Drittelnden der inneren, der äußeren und der überstumpfen Winkel des Grunddreiecks sind, ist die metrische Spezialisierung einer projektiven Figur  $F'$ . Verf. baut  $F'$  mit dem Lineal allein auf, ausgehend von einem Dreieck  $A'''B'''C'''$ , das dem Dreieck der Schnittpunkte der überstumpfen Winkel Drittelnden von  $F$  entspricht, dem Punkt  $A$  und einer Geraden  $\omega$ , die  $B'''C'''$  in  $A_0$ ,  $C'''A'''$  in  $B_0$  und  $A'''B'''$  in  $C_0$  schneidet. Wird  $\omega$  zur Ferngeraden und das imaginäre Doppelpunktpaar der zyklischen Projektivität  $A_0B_0C_0 \bar{\cap} B_0C_0A_0$  zum Paar der Kreispunkte gemacht, so geht  $F'$  in die Morley-Figur  $F$  über. *M. Zacharias.*

Schuh, Fred: Geometrischer Beweis der Erweiterung des Morleyschen Satzes. Mathematica, Zutphen, B 13, 1—8 (1944) [Holländisch].

Verf. baut die Figur des erweiterten Morleyschen Satzes von dem gleichseitigen Dreieck der Schnittpunkte der den Seiten anliegenden Innenwinkel-drittelnden aus auf, untersucht die Bedingungen für die Gleichseitigkeit der Schnittpunktedreiecke in den übrigen möglichen Fällen und entwickelt die bekannten Lagebeziehungen der gleichseitigen Dreiecke der Figur. *M. Zacharias.*

Lob, H.: A note Morley's trisector theorem. Proc. Cambridge philos. Soc. 36, 401—413 (1940).

Der Morleysche Satz mit Hilfe von räumlichen Betrachtungen.

*M. Zacharias.*

Peters, J. W.: The theorem of Morley. Nat. Math. Mag. 16, 119—126 (1941).

Grossman, H. D.: The Morley triangle: a new geometric proof. Amer. math. Monthly 50, 552 (1943).

Walls, Nancy: An elementary proof of Morley's trisector theorem. Edinburgh math. Notes Nr. 34, 12—13 (1944).

Gibbins, N. M.: The non-equilateral Morley triangles. Math. Gaz. 26, 81—86 (1942).

Rao, C. V. H.: On the Petersen-Morley theorem. I. II. Bull. Calcutta math. Soc. 37, 131—132 (1945), 38, 109—112 (1946).

Lebesgue, H.: Les  $n$ -sectrices d'un triangle; extension d'un théorème de Frank Morley. C. r. Congr. Sci. math. Liège 1939, 51—61 (1943).

Eves, H.: Concerning some perspective triangles. Amer. math. Monthly 51, 324—331 (1944).

Lineare Abhängigkeiten zwischen je zwei von drei Funktionen zweier Veränderlichen führen zur Aufstellung von Perspektivitäten zwischen einem gegebenen Dreieck und verschiedenen assoziierten Dreiecken. *M. Zacharias.*

(1) Loria, G.: Nota sulla geometria del triangolo rettilineo (da una lettera diretta ad un giovane studioso). Revista mat. Hisp.-Amer., III. Ser. 1, 15—20 (1943).

(2) Ciamberlini, C. und A. Marengoni: Triangoli che hanno in comune il circocirchio e l'incircchio. Boll. Mat., IV. Ser. 4, 17—18 (1943).

(1) Berechnung der Längen der gemeinsamen Tangenten des Umkreises und je eines der vier Berührungskreise sowie zweier Berührungskreise des Dreiecks und weitere bekannte Ausdrücke. In (2) wird die Umkehrung der Formel von W. Chapple (1746):  $OI^2 = R^2 - 2Rr$  ( $R, r$  Radien,  $O, I$  Mittelpunkte des Umkreises und des Inkreises) bewiesen. *M. Zacharias.*

Hamada, Takashi: Elementary modifications of Roger's and Aiyar's theorems. Tôhoku math. J. 49, 114—118 (1942).

Ableitung des Aiyarschen Satzes aus folgendem: Von zwei beliebigen Punkten  $P, Q$  einer Geraden  $x$  werden die Lote  $PM_1, PM_2, PM_3$  und  $QN_1, QN_2, QN_3$  auf die Seiten eines Dreiecks  $A_1A_2A_3$  gefällt. Dann schneidet der Orthogonalkreis der drei Kreise  $N_1(N_1M_1), N_2(N_2M_2), N_3(N_3M_3)$  den Orthopolarkreis von  $x$  bezüglich  $A_1A_2A_3$  orthogonal. *M. Zacharias.*

Galasekharam, F. H. V.: The orthopolar circle. Math. Gaz. 25, 288—297 (1941).

Nehring, O.: Über ein Dreiecksproblem J. reine angew. Math. 186, 70—77 (1944). Bekannte Sätze über die Apollonischen Kreise werden durch analytische Rechnung bewiesen. *M. Zacharias.*

Thébault, V.: Sur le théorème de Feuerbach. Rev. mat. Timișoara 23, 80—81 (1943).

Der Feuerbachsche Satz wird mittels der Lemoineschen Formel  $a^2(a-b)(a-c)(a+b-2c)(a+c-2b) = 16S^2(R-r)^2$  bewiesen ( $S$  Flächeninhalt,  $R, r$  Radien des Umkreises und Inkreises). *M. Zacharias.*

Doorenbosch, G.: Ein Satz über den Neunpunktekreis. Mathematica, Zutphen, A 11, 121—126 (1943) [Holländisch].

Die Schnittpunkte des Feuerbachschen Kreises mit den Dreiecksseiten seien der Reihe nach, wie sie auf dem Kreis aufeinanderfolgen,  $B_1, B_2, \dots, B_6, B_1$ . Von den drei Schnittpunkten  $(B_1B_3, B_2B_4), (B_3B_5, B_4B_6), (B_5B_1, B_6B_2)$  liegen, wie Verf. beweist, zwei auf der Eulerschen Geraden, und der dritte gibt, mit den beiden andern verbunden, zwei Geraden, die durch die beiden Ecken des Grunddreiecks gehen, die nicht auf derselben Seite der Eulerschen Geraden wie jener Punkt liegen. *M. Zacharias.*

Lu, Chin-Shi: Some new properties of the triangle. Nat. Math. Mag. 19, 398—405 (1945).

Eigenschaften von Punkten, die durch die Tangenten an den Neunpunktekreis in den neun Punkten bestimmt werden. *M. Zacharias.*



Krishnaswami Ayyangar, A. A.: The theorem of Feuerbach. *Math. Student* 9, 16—29 (1941).

Ramesam, V.: A further note on Feuerbach's theorem. *Math. Student* 9, 129—130 (1941).

Narayanamurthy, T.: Feuerbach's theorem. *Math. Student* 13, 43—46 (1945).

Thébault, V.: Sur le cercle des orthopôles. *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* 14, 299—307 (1945).

Bilo, J.: Bemerkungen über zwei Beiträge zum Studium des Orthopols und des Isopols. *Wis- en Natuurk. Tijdschr.* 12, 14—17 (1944) [Holländisch].

Bouvaist, Robert et Victor Thébault: Sur les triangles isopolaires. *C. r. Acad. Sci., Paris* 217, 223—225 (1943).

Gårding, L.: Einem Dreieck einbeschriebene Kegelschnitte, behandelt mittels komplexer Zahlen. *Elementa* 25, 1—10 (1942) = *Medd. Lunds Univ. mat. Sem.* 5, Nr. 13 (1943) [Schwedisch mit französ. Zusammenfassg.].

Goormaghtigh, R.: Sur un groupe de paraboles associées au triangle. *Inst. grand-ducal Luxembourg. Sect. Sci. natur. phys. math., Arch., n. Sér.* 16, 96—97 (1946).

Cavallaro, V. G.: Sulla deduzione d'un elegante relazione pei fuochi di Steiner. *Boll. Mat., IV. Ser.* 4, 5 (1943).

Die Formel von R. Deaux (dies. Zbl. 17, 178)  $OF \cdot OF' = R \cdot OG$  ( $R, O$  Radius und Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks,  $G$  Schwerpunkt;  $F, F'$  Brennpunkte der Steinerschen Inellipse, d. h. der einbeschriebenen Ellipse mit dem Mittelpunkt  $G$ ) wird aus dem Satz von Weill-Aiyar gefolgert: Für zwei isogonal konjugierte Punkte  $F, F'$  ist  $OF \cdot OF' = 2R \cdot OM$  ( $M$  Mitte von  $FF'$ ,  $O_9$  Mittelpunkt des Neunpunktekreises).  
M. Zacharias.

Cavallaro, Vincenzo G.: Formules brocardiennes pour le triangle singulier ayant les côtés en progression arithmétique. *Anais Fac. Ci. Porto* 29, 11—14 (1944).

Cavallaro, Vincenzo G.: Sur les triangles spéciaux dont les distances brocardiennes sont singulières. *Mathesis* 54, 422—428 (1945).

Cavallaro, Vincenzo G.: Su le direttrici dell'ellisse di Brocard. *Period. Mat., IV. Ser.* 23, 40—48 (1943).

Die Brocardsche Ellipse ist dem Grunddreieck  $ABC$  umbeschrieben und hat die Brocardschen Punkte  $\Omega, \Omega'$  zu Brennpunkten. Die Projektion von  $\Omega, \Omega'$  aus dem Umkreismittelpunkt auf die trilineare Polare des Lemoineschen Punktes ist eine zu  $\Omega, \Omega'$  parallele Strecke  $MM'$ , die gleich der Entfernung der Leitlinien der Brocardschen Ellipse ist. Die Lote von  $M$  und  $M'$  auf die Gerade  $\Omega, \Omega'$  sind die Leitlinien. Das konstante Verhältnis der Entfernungen eines Punktes  $P$  der Ellipse von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitlinie ist gleich dem Verhältnis der Radien des Brocardschen und des ersten Lemoineschen Kreises.

M. Zacharias.

Lauffer, R.: Eine Dualisierung der Brocardschen Punkte des ebenen Dreiecks. *Deutsche Math.* 7, 406—414 (1944).

Verf. gibt zwei duale Übertragungen an. Bei der einen benutzt er die schon von Brocard gebrauchten drei gleichsinnig ähnlichen Felder, in denen die Geraden  $l = BC, m = CA, n = AB$  ein Tripel entsprechender Geraden sind. Bei der andern dualisiert er die drei projektiven Geradenbüschel  $A, B, C$ , die im allgemeinen drei Punkte  $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$  als Träger je eines Tripels entsprechender Geraden bestimmen. Die Gerade  $\Omega_1, \Omega_2$  wird von den drei Büscheln in drei projektiven Punktreihen geschnitten, und  $\Omega_1, \Omega_2$  sind die Doppelpunkte für je zwei dieser Reihen.

M. Zacharias.

Thébault, Victor: Sur le cercle et la sphère de Hagge. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 15, 44—52 (1946).

Analog zur Konstruktion des Haggesehen Kreises findet Verf. eine Kugel im Tetraeder. *M. Zacharias.*

Peiser, A. M.: The Hagge circle of a triangle. Amer. math. Monthly 49, 524—527 (1942).

Thébault, V.: Sur la géométrie du triangle et du tétraèdre. Mathesis 51, Suppl. 49 p. (1941).

Die ersten beiden Artikel dieser Arbeit bringen im wesentlichen schon früher veröffentlichte Ergebnisse. Der dritte Artikel handelt von den Kreisen, die zwei Seiten eines Dreiecks berühren und durch den Nagelschen Punkt oder einen seiner Assoziierten gehen, und bringt entsprechende Sätze für ein besonderes Tetraeder. Artikel IV bringt alte und neue Eigenschaften des Nagelschen Punktes. Der fünfte Artikel handelt von antipedalen Dreiecken eines Punktes bezüglich eines Dreiecks. Artikel VI behandelt die Kugeln, deren Durchmesser die Verbindungsstrecken solcher Punkte sind, die zwei Gegenkanten eines Tetraeders in demselben Verhältnis teilen. Der letzte Artikel bezieht sich auf ein besonderes Tetraeder.

*M. Zacharias.*

Thébault, V.: Triangle et tétraèdre. Bull. sci. École polytechn. Timişoara 11, 54—61 (1943).

Sätze über gewisse Kreise, die durch je zwei Ecken eines Dreiecks gehen, und über Kugeln, die durch je drei Ecken eines Tetraeders gelegt werden.

*M. Zacharias.*

Thébault, V.: Nouvelles analogies entre le triangle et le tétraèdre. C. r. Acad. Sci., Paris 218, 262—264 (1944).

Court, N. A.: On the anharmonic associates of a point for a triangle and a tetrahedron. Bol. mat. 15, 25—28 (1942).

Labra, Manuel: Eine Verallgemeinerung des Stewartschen Satzes. Anwendung zur Berechnung der Seiten wichtiger Fußpunktdreiecke. Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 1, 13—18 (1942) [Spanisch].

Labra, Manuel: Berechnung der Seiten wichtiger Fußpunktdreiecke. Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 1, 48—57 (1942) [Spanisch].

Labra, M.: Berechnung der Seiten wichtiger kopedaler Dreiecke. Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 1, 177—187 (1944) [Spanisch].

Verf. berechnet die Seiten eines Miquel-Dreiecks des Schwerpunkts, Höhenschnittpunkts, Inkreismittelpunkts, Lemoinepunktes und der Brocardschen Punkte.

*M. Zacharias.*

Baiaff, B. I.: Die Stewartsche metrische Beziehung und eine Verallgemeinerung. Bol. mat. 15, 134—136 (1942) [Spanisch].

Tuchman, Z.: Ein einfacher Beweis des Satzes von der Summe der Maßzahlen der äußeren Winkel eines Tetraeders. Riveon Lematematika 1, 20 (1946) [Hebräisch].

Tuchman, Z.: Der dritte Kongruenzsatz für Tetraeder. Riveon Lematematika 1, 32—34 (1946) [Hebräisch].

Zwei Tetraeder  $A_1 B_1 C_1 D_1$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  sind kongruent, wenn die Dreiecke  $A_1 B_1 C_1$  und  $A_2 B_2 C_2$ ,  $D_1 B_1 C_1$  und  $D_2 B_2 C_2$  kongruent und die Winkel  $B_1$  und  $B_2$ ,  $C_1$  und  $C_2$  einander gleich sind.

*M. Zacharias.*

Court, N. A.: On the centroid. Nat. Math. Mag. 15, 271—277 (1941).

$G$  sei der Schwerpunkt (centroid) der Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  und  $G_k$  der Schwerpunkt der  $n-1$  Punkte mit Ausnahme von  $A_k$ .  $s$  sei die Summe der Quadrate der Strecken  $A_i A_j$ . Dann ist  $\sum A_k G_k^2 = n s^2 / (n-1)^2$  und  $\sum A_k G^2 = s^2 / n^2$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Anwendungen auf das Tetraeder.

*M. Zacharias.*

Yarden, D.: Klassen von Flächeninhalten sphärischer Dreiecke, die den Triederwinkeln eines Tetraeders entsprechen. Riveon Lematematika 1, 7 (1946) [Hebräisch].

Court, N. A.: The biratio of the altitudes of a tetrahedron. *Duke math. J.* **13**, 383—386 (1946).

Die Höhen einer Fläche eines Tetraeders bilden mit der Verbindungsgeraden des Höhenschnittpunkts der Fläche mit dem Höhenfußpunkt des Tetraeders in dieser Fläche ein Doppelverhältnis, das für alle vier Flächen denselben Wert hat. Das Doppelverhältnis der vier Höhen eines gleichseitigen Tetraeders ist gleich dem Doppelverhältnis der Höhen und der Eulergeraden einer Fläche.

*M. Zacharias.*

Ionescu, D. V.: Eigenschaften des Tetraeders. *Revista mat. Timișoara* **23**, 4 (1943) [Rumänisch].

Liegen auf den Kanten  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  des Tetraeders  $SABC$  die Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , so schneiden sich die Ebenen  $A'BC$ ,  $B'CA$ ,  $C'AB$  in einem Punkt  $M$ ,  $AB'C'$ ,  $BC'A'$ ,  $CA'B'$  in  $M'$ . Schneiden sich  $BC'$ ,  $CB'$  in  $A_1$ ,  $CA'$ ,  $C'A$  in  $B_1$ ,  $AB'$ ,  $BA'$  in  $C_1$ , und sind  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  die Schnittpunkte der Geraden  $SA_1$ ,  $SB_1$ ,  $SC_1$  mit der Ebene  $ABC$ , so schneiden sich die Geraden  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  in einem Punkt  $I$ , und die Punkte  $S$ ,  $M'$ ,  $M$ ,  $I$  bilden einen harmonischen Wurf.

*M. Zacharias.*

Bouvaist, R. et V. Thébault: Sur la géométrie du tétraèdre. *C. r. Acad. Sci., Paris* **217**, 418—419 (1943).

Thébault, V.: Sur la géométrie du tétraèdre. *C. r. Acad. Sci., Paris* **218**, 25—27, 820—822 (1944).

Bouvaist, Robert et Victor Thébault: Applications des déterminants à la géométrie du tétraèdre. *C. r. Acad. Sci., Paris* **220**, 32—34 (1945).

Thébault, V.: Sur la géométrie du tétraèdre. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles. I. Sér.* **60**, 207—212 (1946).

Thébault, V.: Tétraèdres associés à deux tétraèdres donnés. *Bull. sci. École polytechn. Timișoara* **12**, 175—178 (1946).

Court, N. A.: A skew quartic associated with a tetrahedron. *Duke math. J.* **13**, 123—128 (1946).

Der Ort der Schnittgeraden zweier veränderlicher orthogonaler Ebenen durch zwei feste windschiefe Achsen ist ein einschaliges orthogonales Hyperboloid. Die den drei Paaren von Gegenkanten eines Tetraeders zugeordneten Hyperboloide gehören einem Büschel von Quadriken an und schneiden sich in einer Quartik. Die Eigenschaften dieser auf dem Höhenhyperboloid liegenden und durch die Ecken und die Höhenfußpunkte des Tetraeders gehenden Quartik werden untersucht.

*M. Zacharias.*

Mandan, R.: Properties of mutually self-polar tetrahedra. *Bull. Calcutta math. Soc.* **33**, 147—155 (1941).

Zu einem gegebenen Tetraeder wird ein zweites konstruiert derart, daß jede Ebene des einen die tetraedrale Polarebene einer Ecke des andern ist. Verf. stellt fest, unter welcher Bedingung die beiden Tetraeder desmisch sind, und betrachtet die Beziehung zur Kummerschen Fläche.

*M. Zacharias.*

Hameed, A.: On mutually self-polar tetrahedra. *Bull. Calcutta math. Soc.* **33**, 157—186 (1941).

Verf. untersucht Paare gegenseitig selbstpolarer Tetraeder, die in dem ersten Tetraeder und einer Ecke des zweiten übereinstimmen, und betrachtet ihre Transformationen durch Homologie und Polarreziprozität bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung. — Erweiterung der Ergebnisse auf  $n$  Dimensionen.

*M. Zacharias.*

Hameed, A.: On mutually self-polar simplexes. *Bull. Calcutta math. Soc.* **35**, 43—53 (1943).

Humbert, P.: Bifétraèdre de l'espace attaché à l'opérateur  $J_3$ . *Bull. Sci. Math., II. Ser.* **68**, 50—59 (1944).



In einem Raum, in dem die Entfernung  $d$  eines Punktes  $P(x, y, z)$  vom Ursprung durch  $d^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  definiert ist, sei ein Tetraeder mit den Ecken  $S, O, A, C$  gegeben. Ein Punkt  $B$  der Strecke  $AC$  sei mit  $S$  und  $O$  verbunden. Diese Figur wird Bitetraeder genannt. Der Schwerpunkt gleicher Massen in  $S, O, A, B, C$  ist Schnittpunkt von 49 Geraden, deren Eigenschaften untersucht werden. Auch eine Kugel mit 65 interessanten Punkten wird betrachtet.

*M. Zacharias.*

Humbert, P.: Sur la géométrie plane dans l'espace attaché à l'opérateur  $\Delta_3$ . Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 4, 93 (1941).

Klug, L.: Über Tetraeder, deren Kanten eine Kugel berühren. Math.-naturw. Anz. Ungar. Akad. Wiss. 61, 23—35 (1942) [Ungarisch mit deutsch. Zusammenfassg.].

Thébault, V.: Sur les sphères de Tucker du tétraèdre. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 257—259 (1943).

Die Tuckerschen Kugeln des Tetraeders stehen zu dem Umkugelmittelpunkt und dem zweiten Lemoineschen Punkt des Tetraeders in Beziehungen, die denen der Tuckerschen Kreise des Dreiecks zu dem Umkreismittelpunkt und dem Lemoineschen Punkt analog sind.

*M. Zacharias.*

Thébault, Victor: Sphères de Taylor du tétraèdre. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 104—105 (1945).

Thébault, V.: Sur les sphères de Lemoine du tétraèdre. Bull. Soc. math. France 71, 67—77 (1943).

Thébault, V.: Sphères de Lemoine du tétraèdre. Bul. Polytech. București 16, 6—18 (1945).

Die Parallelen und die Antiparallelen zu den Seiten eines Dreiecks durch den Lemoineschen Punkt (den Schnittpunkt der Symmedianen, d. h. der Spiegelbilder der Seitenhalbierenden bezüglich der Winkelhalbierenden) schneiden die Seiten in je 6 Punkten eines Kreises, des ersten und zweiten Lemoineschen Kreises. Im Tetraeder gibt es zwei Punkte, die in gewissen Eigenschaften Analogien zum Lemoineschen Punkt des Dreiecks zeigen und daher als erster und zweiter Lemoinescher Punkt bezeichnet werden. Den Lemoineschen Kreisen entsprechen gewisse Kugeln.

*M. Zacharias.*

Thébault, V.: Sphères associées au tétraèdre. C. r. Acad. Sci., Paris 216, 21—23 (1943).

In dem Tetraeder  $ABCD$  sei  $(\omega, \rho)$  die Kugel, bezüglich deren die Ecken  $A, B, C, D$  die Potenzen  $kl^2, km^2, kn^2, kp^2$  haben, wo  $l, m, n, p$  gegebene Strecken sind und  $k$  ein beliebiger Parameter ist. Durch zyklische Permutation der Größen  $kl^2, \dots$  erhält Verf. drei zu  $(\omega, \rho)$  assoziierte Kugeln  $(\omega', \rho'), (\omega'', \rho''), (\omega''', \rho''')$ . Vgl. Verf. [Bull. sci. École polytechn. Timișoara 11, 220—262 (1944)].

*M. Zacharias.*

Thébault, V.: Sur une nouvelle sphère du tétraèdre orthocentrique. Bull. Soc. math. France 74, 26—30 (1946).

In einem Tetraeder  $T = ABCD$  legt Verf. durch jede Kante die Ebene, die die Gegenkante in zwei Abschnitte teilt, die den Quadraten der Inhalte der durch die erste Kante gehenden Flächen proportional sind. Diese vier Ebenen schneiden sich in dem ersten Lemoineschen Punkt  $K$ , für den die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Flächen ein Minimum ist. — Ein windschiefes Viereck  $Q_1 = A_1 B_1 D_1 C_1$  heiße dem Tetraeder  $T$  orthogonal einbeschrieben ( $A_1$  in  $BCD$ ,  $B_1$  in  $CDA$  usw.), wenn  $A_1 B_1$  auf  $CD$ ,  $A$ ,  $B_1 D_1$  auf  $CA$ ,  $D_1 C_1$  auf  $BD$ ,  $A$  und  $C_1 A_1$  auf  $BCD$  senkrecht steht. Solcher Vierecke gibt es (bei gewissen Vertauschungen der Ecken) sechs. Die 24 Ecken dieser Vierecke liegen auf einer Kugel mit dem Mittelpunkt  $K$ , wenn das Tetraeder  $T$  orthozentrisch ist (d. h. einen Höhenschnittpunkt besitzt). Verf. nennt sie die „zweite Lemoinesche Kugel“ des orthozentrischen Tetraeders.

*M. Zacharias.*

**Thébault, V.:** The Adams sphere. Amer. math. Monthly 49, 170—173 (1942).

Verf. erhält durch zur Konstruktion des „Adamsschen Kreises“ analoge Betrachtungen für das Tetraeder eine Kugel, die er „Adamssche Kugel“ nennt, die mit der Inkugel konzentrisch ist und durch gewisse 12 Punkte in den Flächen des Tetraeders geht. *M. Zacharias.*

**Court, N. A.:** On the theory of the tetrahedron. Bull. Amer. math. Soc. 48, 583—589 (1942).

Verf. führt zwei neue Kugeln ein, die die Zwölfpunktekugel des Tetraeders durch Inversion in die Umkugel transformieren. Ihre Mittelpunkte sind der Schwerpunkt und der Mongesche Punkt. *M. Zacharias.*

**Gerretsen, J. C. H.:** An analogue of the nine-point circle in the space of  $n$  dimensions. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 48, 535—536 = Indagationes Math. 7, 123—124 (1945).

**Vries, J. F. de:** Über den Schwerpunkt einer homogenen, überall gleich dicken viereckigen Platte. Nieuw Tijdschr. Wiskunde 27, 63—64 (1939) [Holländisch].

Konstruktion des Flächenschwerpunkts eines ebenen Vierecks, die sich schon bei Stoll [Arch. Math. Phys. 65, 445—446 (1880)] findet. *M. Zacharias.*

**Pompeiu, D.:** Un problème de géométrie. Bull. sci. École polytechn. Timisoara 11, 171—173 (1944).

Aufstellung der Bedingungsgleichung in komplexen Koordinaten für die Aufgabe, einem gegebenen ebenen Viereck ein Parallelogramm einzubeschreiben. Lösung für den Fall, daß die Parallelogrammseiten den Vierecksdiagonalen parallel sind. *M. Zacharias.*

**Thébault, V.:** Sur le point de Kantor-Hervey. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 13, 293—296 (1944).

Die Eulergeraden der vier aus den Seiten eines ebenen Vierseits gebildeten Dreiecke schneiden sich in dem Kantorschen oder Herveyschen Punkt (siehe Kantor, Bull. Sci. math. astron. 1879, p. 138; Hervey, Educat. Times 1891, p. 37). *M. Zacharias.*

**Thébault, V.:** Sur le quadrilatère complet. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 97—99 (1943).

Verf. teilt die Strecken zwischen den Höhenpunkten und den Schwerpunkten der vier in einem vollständigen Vierseit enthaltenen Dreiecke in einem und demselben Verhältnis  $k$  und zieht durch die Teilpunkte die Parallelen zu den Seiten des Vierseits. Dadurch entstehen gewisse, jenen vier Dreiecken kongruente Dreiecke mit bemerkenswerten Eigenschaften. *M. Zacharias.*

**Thébault, V.:** Sur la géométrie du quadrilatère complet. C. r. Acad. Sci., Paris 218, 97—99 (1944).

**McBrien, V. O.:** Cardioids associated with a cyclic quadrangle. Amer. math. Monthly 51, 74—77 (1944).

Die Orthopole einer geraden Linie  $l$  bezüglich der vier Dreiecke aus den Ecken eines Schnenvierecks liegen auf der Kantorgeraden von  $l$  bezüglich des Schnenvierecks. Die Kantorgeraden eines Strahlenbüschels mit dem Scheitel  $P$  bezüglich eines Schnenvierecks umhüllen ein Deltoid (eine dreispitzige Hypozykloide). Die Orthopole des Büschels bezüglich der vier aus den Ecken des Vierecks gebildeten Dreiecke liegen auf vier Ellipsen. Jede Ellipse berührt das Deltoid mindestens einmal. Die Zahl der Berührungspunkte hängt ab von der Lage von  $P$  in bezug auf vier Kardioiden. *M. Zacharias.*

**Goormaghtigh, R.:** A study of a quadrilateral inscribed in a circle. Amer. math. Monthly 49, 174—181 (1942).

Thébault, V.: Quadrangolo orlato di quadrangoli simili. *Boll. Mat.*, IV. Ser. 4, 2—4 (1943).

Verf. untersucht die Figur, die entsteht, wenn man über den Seiten eines konvexen Vierecks  $ABCD$  nach außen Vierecke  $AB B_1 A_1$ ,  $BC C_1 B_2$ ,  $CD D_1 C_2$ ,  $DA A_2 D_2$  derart konstruiert, daß  $ABCD \sim A_1 B_1 B A \sim B B_2 C_1 C \sim C D D_1 C_2 \sim D_2 D A A_2$  ist. *M. Zacharias.*

Thébault, V.: Quadrangle bordé de triangles isocèles semblables. *Nat. Math. Mag.* 18, 7—13 (1943).

Motzkin, T.: The pentagon in the projective plane, with a comment on Napier's rule. *Bull. Amer. math. Soc.* 51, 985—989 (1945).

Beziehungen der Doppelverhältnisse von je vier kollinearen Schnittpunkten von fünf koplanaren Geraden in allgemeiner Lage. Fortgesetzte Spezialisierung führt zu der Napierschen Regel der sphärischen Geometrie. *M. Zacharias.*

Thébault, V.: Sur l'hexagone à côtés parallèles trois par trois. *Bul. Polytechn. București* 13, 5—9 (1942).

Gentile, G.: Punti diagonali e poligoni di divisione di un  $n$ -gono piano convesso. *Boll. Mat.*, IV. Ser. 1, 71—74 (1940).

Bekannte Eigenschaften eines konvexen ebenen  $n$ -Ecks und seiner Diagonalen. *M. Zacharias.*

Roborzh, L. J.: Der Sarronsche Satz. *Nieuw Tijdschr. Wiskunde* 26, 324—326 (1939) [Holländisch].

Formel für den Flächeninhalt eines ebenen  $n$ -Ecks, ausgedrückt durch  $n - 1$  Seiten und die Winkel zwischen diesen:  $2F = \sum a_i a_k \sin(a_i a_k)$ . Nicht erst bei Sarron 1845, sondern schon in S. Lhuiliers *Polygonometrie*, Genf 1789.

*M. Zacharias.*

Stewart, B. M.: Cyclic properties of Miquel polygons. *Amer. math. Monthly* 47, 462—466 (1940).

Nach den Seiten  $A_i A_{i-1}$  eines ebenen  $n$ -Ecks ( $0 \equiv A_i$ ) werden von einem Punkt  $P$  seiner Ebene aus Geraden gezogen, die diese in  $B_i$  unter konstantem Winkel  $\vartheta_1$  schneiden. Das  $n$ -Eck  $B_i = (1)$  heißt ein Miquel-Vieleck (M.-V.) von  $P$  bezüglich ( $0$ ). Alle M.-V. für veränderliches  $\vartheta_1$  sind einander direkt ähnlich mit  $P$  als selbstentsprechendem Punkt [dieser Satz schon bei O. Nehring und M. Zacharias (dies. Zbl. 21, 347)]. Bildet man mit einem Winkel  $\vartheta_2$  zu ( $1$ ) ein M.-V. ( $2$ ), zu diesem mit  $\vartheta_3$  ein ( $3$ ) usw., so gilt: Zwei M.-V. ( $i$ ), ( $j$ ) sind einander direkt ähnlich mit  $P$  als selbstentsprechendem Punkt, wenn  $i \equiv j \pmod{n}$ .

*M. Zacharias.*

Rao, A. Narasinga: On the metric geometry of a cyclic  $n$ -point. I. *Math. Student* 12, 91—97 (1945).

Verallgemeinerungen der Sätze vom Höhenschnittpunkt, von der Eulergeraden, vom Neunpunktekreis, vom Schwerpunkt usw. für  $n$  Punkte auf einem Kreis. *M. Zacharias.*

Konnully, A. O.: Orthocentre of a cyclic polygon. *Math. Student* 11, 28—30 (1943).

Casaux, G.: Sur le quadrangle orthocentroïdal. *Mathesis* 54, 429—433 (1945).

Douglas, J.: On linear polygon transformations. *Bull. Amer. math. Soc.* 46, 551—560 (1940).

Gandini, A.: Una notevole applicazione del teorema di Tolomeo. *Period. Mat.*, IV. Ser. 23, 85—111 (1943).

Anwendung des Ptolemäischen Satzes auf die Gleichung zwischen Umkreisradius und Seite eines regelmäßigen  $n$ -Ecks. *M. Zacharias.*

Labra, M.: Berechnung der Seiten regelmäßiger einbeschriebener Polygone. *Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat.* 2, 47—67 (1945) [Spanisch].



Popoviciu, T.: Über regelmäßige Polygone. *Pozitiva* 2, 92—97 (1941) [Rumänisch].

$A_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$  seien die Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Ecks und  $P$  irgendein Punkt seiner Ebene.  $M_r(P)$  sei die  $r$ -te Wurzel aus dem arithmetischen Mittel der  $r$ -ten Potenzen der Entfernungen  $PA_i$ . Verf. bestimmt Grenzen für die Quotienten  $M_r(P)/M_s(P)$  für verschiedene Werte von  $r$  und  $s$ . *M. Zacharias.*

Mitra, A.: On affine regularity of polygons. *Bull. Calcutta math. Soc.* 33, 49—55 (1941).

Ein Polygon in der komplexen Ebene  $a_1, a_2, \dots, a_n (a_{n+i} \equiv a_i)$  ist dann und nur dann affin regulär, wenn keine drei Ecken kollinear sind, wenn jede Seite einer Diagonale  $a_i a_{i+3}$  parallel ist und wenn jede Diagonale  $a_i a_{i+2}$  einer Diagonale von der Form  $a_i a_{i+4}$  parallel ist. *M. Zacharias.*

Petr, K.: Sur les polygones donnés par leurs côtés qui sont inscrits dans un cercle. *Acad. Tchèque Sci., Bull. Int., Cl. Sci. math. natur. Méd.* 45, 325—335 (1945).

Bestimmung der Flächeninhalte und Umkreisradien aller Kreisvierecke mit gegebenen Seiten. *M. Zacharias.*

Goormaghtigh, R.: Extension au polygone inscriptible du théorème sur l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle. *Mathesis* 51, 362—365 (1943).

Goormaghtigh, R.: A theorem of a cyclic polygon. *Amer. math. Monthly* 47, 466—468 (1948).

Goormaghtigh, M.-R.: Orthopôles et droites orthopolaires dans les polygones. *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* 15, 119—133 (1946).

Goormaghtigh, M. R.: Isopôles et droites isopolaires dans les polygones. *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* 15, 213—220 (1946).

Popoviciu, T.: Quelques remarques sur un théorème de M. Pompeiu. *Bull. math. Soc. Roumaine Sci.* 43, 27—43 (1941).

Sind  $A_1, A_2, \dots, A_n$  die Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Ecks und  $P$  irgendein Punkt seiner Ebene, so beweist Verf., daß  $n^{-1}(PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n) \geq C_n \cdot \max \overline{PA_i}$ , wo  $C_n = n^{-1} \operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\pi/n)$  für gerades und  $= n^{-1} \operatorname{cosec}(\frac{1}{2}\pi/n)$  für ungerades  $n$  ist.  $n = 3$  gibt den Satz von Pompeiu. — Sind  $A_1, A_2, A_3, A_4$  die Ecken eines Quadrats und  $P$  ein Punkt seiner Ebene, so gibt es immer ein Viereck, dessen Seitenlängen gleich  $PA_i^2$  sind. Das Quadrat ist das einzige Viereck mit dieser Eigenschaft. *M. Zacharias.*

Constantinescu, G. G.: Über einige geometrische Sätze. *Pozitiva* 1, 257—263 (1941). [Rumänisch mit franz. Zusammenfassg.].

Der Satz von Pompeiu für das Quadrat gilt auch für ein beliebiges Parallelogramm und für ein ebenes  $n$ -Eck  $M_1 M_2 \dots M_n$ , wenn entweder (für jedes  $i$ )  $M_{i-1} M_i = M_i M_{i+1}$  oder  $M_{i-1} M_{i+1} = M_i M_{i+2}$  ist. In diesen Fällen kann man immer, wenn  $M$  ein beliebiger Punkt der Ebene ist, aus den Strecken  $MM_i$  einen geschlossenen polygonalen Streckenzug bilden. *M. Zacharias.*

White, H. S.: Fourteen species of skew hexagons. *Bull. Amer. math. Soc.* 47, 764—768 (1941).

● Coxeter, H. S. M.: The nine regular solids. *Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal 1945*, 252—264. Toronto: University of Toronto Press 1946; \$ 3,25.

Nach Betrachtung der fünf Platonischen Körper leitet Verf. zwei Keplersche und zwei Poinsoische Körper durch Spiegelungen aus gewissen Fundamentalbereichen ab. *M. Zacharias.*

Jensen, Henry: Die zwölf regelmäßigen Polyeder. *Mat. Tidsskr. A* 1945, 72—77 (1945) [Dänisch].

Zu den fünf Platonischen Körpern und den vier Sternpolyedern von Kepler und Poinso fügt Verf. noch Keplers „stella octangula“ aus zwei einander

durchdringenden Tetraedern und zwei aus je fünf einander durchdringenden Tetraedern bestehende Körper hinzu.

*M. Zacharias.*

Hope-Jones, W.: The regular octohedron. *Math. Gaz.* 26, 41—46 (1942).

Zirwes, Albert: Konstruktion und Klassifikation des Achtzells 3<sup>1</sup>. *Acta Pont. Acad. Sci.* 9, 103—126 (1945).

Merz, K.: Vielfache aus Scheitelzellen und Hohlzellen mit Abbildungen und Netzen. *J.-Ber. naturforsch. Ges. Graubündens* 76—77, Beilage, 164 S. (1939).

Scheitelzellen sind Zellen, die eine Doppelstrecke gemeinsam haben. Eine Doppelstrecke ist die Schnittgerade zweier Ebenen, deren jede eine Fläche eines Polyeders auf jeder Seite der Schnittgerade ist. Klassifikation der im Titel genannten Vielfache.

*M. Zacharias.*

Behrend, F. A.: A polyhedral model of the projective plane. *J. Proc. roy. Soc. New South Wales* 77, 20—23 (1943).

Konstruktion eines Modells der projektiven Ebene in Form eines Polyeders ohne irgendwelche singulären Ecken.

*M. Zacharias.*

Alaoglu, Leonidas and J. H. Giese: Uniform isohedral tori. *Amer. math. Monthly* 53, 14—17 (1946).

Ein isohedraler Torus entsteht aus einem Ring von  $2n$  isohedralen Oktaedern oder Hexaedern. Seine Flächen sind 12 gleichschenklige Dreiecke ( $n \geq 3$ ) oder  $8n$  unregelmäßige Vierecke ( $n \geq 4$ ).

*M. Zacharias.*

Tchetyveroukhine, N.: Sur la „dureté affine“ des polyèdres. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. 42, 3—6 (1944).

Verf. gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die affine Starrheit eines Polyeders. Ein Polyeder  $P$  heißt affin starr, wenn jedes isomorphe Polyeder, dessen Flächen den entsprechenden Flächen von  $P$  affin sind, selbst zu  $P$  affin ist.

*M. Zacharias.*

Sanguinetti, Jeronimo: Einige Randbemerkungen. *An. Soc. ci. Argentina* 133, 461—465 (1942) [Spanisch].

Einfache bekannte Sätze von Polyedern und Kegelschnitten. *M. Zacharias.*

Emch, A.: Endlichgleiche Zerschneidung von Parallelotopen in gewöhnlichen und höheren Euklidischen Räumen. *Commentarii math. Helvet.* 18, 224—231 (1946).

Ausdehnung des Begriffs der Zerlegungsgleichheit von Parallelogrammen und Quadern auf  $n$  Dimensionen.

*M. Zacharias.*

Lebesgue, H.: Sur l'équivalence des polyèdres. *Ann. Soc. Polon. Math.* 18, 1—3 (1945).

Jessen, Borge: Über die Äquivalenz von Aggregaten regelmäßiger Polyeder. *Mat. Tidsskr. B* 1946, 145—148 (1946) [Dänisch].

Eine von Lebesgue angegebene notwendige Bedingung für die Äquivalenz zweier Aggregate regelmäßiger Polyeder ist nach Verf. auch hinreichend, wenn die Aggregate dasselbe Volumen haben.

*M. Zacharias.*

Jessen, Borge: Über den Rauminhalt von Polyedern. *Mat. Tidsskr. A* 1939, 35—44 (1939) [Dänisch].

Ausführlicher Beweis des Satzes von M. Dehn, daß es nicht möglich ist, ein regelmäßiges Tetraeder und ein rechtwinkliges Parallelepiped in paarweise kongruente Teilpolyeder zu zerlegen.

*M. Zacharias.*

Sydler, J.-P.: Sur la décomposition des polyèdres. *Commentarii math. Helvet.* 16, 266—273 (1944).

$P$  sei irgendein Polyeder im  $R_3$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  seien  $n$  positive Zahlen mit der Summe 1. Dann gibt es nach Verf.  $n$  zu  $P$  ähnliche Polyeder  $p_i$ , mit den Verhältnissen  $a_i$  zwischen entsprechenden Seiten von  $p_i$  und  $P$ , und ein einem Würfel äquivalentes Polyeder  $R$ , derart, daß  $P$  äquivalent zu  $\sum p_i + R$  ist

(zwei Polyeder heißen äquivalent, wenn sie in paarweise kongruente Teilpolyeder zerlegt werden können). — Folgerungen, die mit Sätzen von M. Dehn zusammenhängen. *M. Zacharias.*

Goormaghtigh, R.: Pairs of triangles inscribed in a circle. Amer. math. Monthly 53, 200—204 (1946).

Sen, D. K.: Pedal equations of a circle. J. Univ. Bombay, n. Ser. 9, Part 3, 11—15 (1940).

Wijk, U. H. van: Das Berührungsproblem von Apollonius. Mathematica. Zutphen, A 9, 157—159 (1940) [Holländisch].

Bodlund, C.: Ankreise eines Kreisvierecks. Elementa 26, 93 (1943) [Schwedisch].

Gheorghiu, S.: Über die Ähnlichkeitskreise. Gaz. mat., București 49, 329—335 (1944) [Rumänisch].

Verf. untersucht die Eigenschaften der Ähnlichkeitskreise je zweier von drei oder vier Kreisen und wendet die Ergebnisse auf Dreiecke und Vierecke an. *M. Zacharias.*

Vreken, W.: Kreise in der Ebene. Mathematica. Zutphen, A 12, 1—16 (1943) [Holländisch].

Untersuchung der Kreise, Kreisbüschel und Kreisbündel einer Ebene mittels einer stereographischen Projektion. *M. Zacharias.*

Daus, P. H.: Bisecting circles. Amer. math. Monthly 47, 519—529 (1940).

Untersuchung der Familien von Kreisen, die 1. zwei Kreise halbieren, 2. von zwei Kreisen halbiert werden und 3. einen Kreis halbieren und einen andern orthogonal schneiden. Anwendung auf Konstruktionen. *M. Zacharias.*

Fano, G.: Sui cerchi ortogonali a due cerchi dati. Univ. nac. Tucumán. Revista, Ser. A 2, 87—94 (1941).

Kesava Menon, P.: An extension of a theorem of Steiner. Math. Student 12, 78—79 (1945).

Gegeben seien zwei Tripel von Kreisen  $a, b, c$  und  $a', b', c'$ . Wenn die drei zu  $b, c; c, a; a, b$  koaxialen und zu  $a', b', c'$  orthogonalen Kreise koaxial sind, dann sind nach Verf. auch die drei zu  $b', c'; c', a'; a', b'$  koaxialen und zu  $a, b, c$  orthogonalen Kreise koaxial. *M. Zacharias.*

Queiroz, Augusto und Jayme Rios de Souza: Kreise, die in Kreise projiziert werden. Anais Fac. Ci. Porto 29, 177—211 (1945) [Portugiesisch].

Thébault, V.: Sur le tranchet d'Archimède. Bull. Soc. math. France 72, 68—75 (1944).

Thébault, V.: Sur le tranchet d'Archimède. Bull. sci. École polytech. Timișoara 11, 67—77 (1943).

Auf einer Geraden  $g$  einer Ebene liegen vier Punkte in der Reihenfolge  $A, C, D, B$ . In einer der beiden durch  $g$  bestimmten Halbebenen beschreibt man die Halbkreise über  $AB, AC, DB$ , in der andern Halbebene über  $CD$ . Die Potenzlinie der Halbkreise über  $AC$  und  $DB$  schneide die beiden andern Halbkreise in  $T$  und  $T'$ . Dann ist der Inhalt der von den vier Halbkreisen begrenzten Fläche gleich dem Inhalt des Kreises mit dem Durchmesser  $TT'$ . Fallen  $C$  und  $D$  zusammen, ergibt sich das „Schustermesser“ (Arbelos) des Archimedes. — Weitere Sätze handeln von den Papposschen Kreisen: Man beschreibe in den Arbelos den Kreis  $\omega$ . Dann sind die Papposschen Kreise die drei Reihen von sich berührenden Kreisen, die den Flächen zwischen  $\omega$  und je zwei der drei Halbkreise eingeschrieben werden. *M. Zacharias.*

Gaba, M. G.: On a generalization of the arbelos. Amer. math. Monthly 47, 19—24 (1940).

Zwei Kreise  $c_0(r_0)$ ,  $c'(r')$  berühren einander von außen, und es ist  $r'$  ein ganzes Vielfaches von  $r_0$ . Ein dritter Kreis  $c$  hat die Summe ihrer Durchmesser zum Durchmesser, und sein Mittelpunkt liegt auf ihrer Zentrale. Verf. beweist eine Eigen-



schaft der Reihe von Kreisen  $c_0, c_1, c_2, \dots$ , die  $c$  und  $c'$  und einander der Reihe nach berühren.

*M. Zacharias.*

Verkaart, H. G. A.: Figuren gleichen Flächeninhalts. Nieuw Tijdschr. Wetkunde 27, 62—63 (1943) [Holländisch].

Konstruktion eines einem gegebenen geradlinigen Dreieck flächengleichen Dreiecks, in dem zwei Seiten Kreisbogen sind und die dritte Seite geradlinig ist.

*M. Zacharias.*

Gambier, B.: Configurations récurrentes. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 61, 199—230 (1944).

Venkataraman, M.: Chain theorems in geometry. Chains of the Cox-Grace type. J. Indian math. Soc., n. Ser. 9, 1—28 (1945).

Verf. entwickeln im wesentlichen übereinstimmend den gemeinsamen Grundgedanken der verschiedenen Kettensätze von Cox, Richmond, Miquel-Clifford u. a.

*M. Zacharias.*

Venkataraman, M.: A new proof of the centre circle chain. J. Indian math. Soc., n. Ser. 10, 65—67 (1946).

Neuer Beweis des Satzes von de Longchamps: Der „Zentralkreis“ von drei Geraden einer Ebene ist der Umkreis ihres Dreiecks. Die Zentralkreise von je drei von vier Geraden einer Ebene schneiden sich in einem Punkt, und ihre Mittelpunkte liegen auf einem Kreis, dem „Zentralkreis“ der vier Geraden. Die Zentralkreise von je  $n-1$  von  $n$  Geraden einer Ebene ( $n = 5, 6, \dots$ ) schneiden sich in einem Punkt, und ihre Mittelpunkte liegen auf einem Kreis, dem „Zentralkreis“ der  $n$  Geraden.

*M. Zacharias.*

Rao, A. Narasinga and M. Venkataraman: On the Clifford and Grace chains. Math. Student 12, 98—101 (1945).

Venkataraman, M. and P. Kesava Menon: On B. R. Venkataraman's chain of theorems in circle geometry. Math. Student 11, 31—32 (1943).

Brown, L. M.: Some remarks on de Longchamps chain. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 7, 138—143 (1946).

Gehen vier Kreise  $S(A), S(B), S(C), S(D)$  durch einen Punkt  $P$ , so schneiden sich irgend zwei, wie  $S(A), S(B)$ , noch in einem Punkt  $(AB)$ . Die drei Punkte  $(AB), (AC), (BC)$  bestimmen einen Kreis  $S(ABC)$ . Die vier Kreise  $S(ABC), S(ABD), S(ACD), S(BCD)$  gehen durch einen Punkt  $P(ABCD)$ .  $A, \dots; (ABC), \dots$  seien die Mittelpunkte von  $S(A), \dots; S(ABC), \dots$ . Dann gilt der Satz: Liegen die Punkte  $A, B, C, D$  auf einem Kreis, so gilt dasselbe von  $(ABC), (ABD), (ACD), (BCD)$ . Analoge Sätze gelten für  $n$  Punkte auf einem Kreis.

*M. Zacharias.*

Brown, L. M.: On a chain of circle theorems. Edinburgh math. Notes Nr. 34, 19—20 (1944).

Court, N. A.: A porism on eleven spheres. Math. Student 10, 115—118 (1942).

Rossier, P.: Sur la géométrie des sphères et des cercles et la définition du plan et de la droite. C. r. Soc. Physique Genève 60, 284—286 (1943).

Vorteile und Nachteile der Kugel und des Kreises einerseits und der Ebene und Geraden andererseits hinsichtlich der Veranschaulichung werden gegenübergestellt.

*M. Zacharias.*

Mächler, W.: Folgen von Zyklen auf einer Kugel. Revista Un. mat. Argentina 9, 171—172 (1943) [Spanisch].

Verf. betrachtet Mengen sich gegenseitig berührender Kreise auf einer Kugel.

*M. Zacharias.*

Fabricius-Bjerre, Fr.: Die Theorie der sphärischen Kegelschnitte. Mat. Tidsskr. A 1945, 53—71 (1945) [Dänisch].

Vereinfachte Ableitung der Eigenschaften der sphärischen Kegelschnitte.

*M. Zacharias.*

Costăchescu, C. V.: Anwendungen der quadratischen Trigonometrie. *Revista mat. Timișoara* **23**, 39—40 (1943) [Rumänisch].

Die Eckenlinie  $AC$  teile in dem Dreieck  $ABD$  die Seite  $BD$  in die Abschnitte  $BC = p$ ,  $CD = q$ .  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle CAD = \beta$ ,  $\angle ACD = \gamma$ . Beweis der Gleichung  $(p + q) \operatorname{ctg} \gamma = p \operatorname{ctg} \alpha - q \operatorname{ctg} \beta$  (mit der „quadratischen Trigonometrie“ von Alaci) und Anwendungen auf zwei navigatorische Aufgaben.

*M. Zacharias.*

Brandsma, L.: Goniometrische Formeln für  $a + b + c + d = 180^\circ$ . *Nieuw Tijdschr. Wiskunde* **26**, 327—328 (1943) [Holländisch].

Armanini, A.: Sopra un problema di trigonometria sferica. *Atti Mem. Accad. Sci. Lett. Arti Padova, Mem. Cl. Sci. fis.-mat., n. Ser.* **58**, 41—57 (1942).

Der Bruch  $3d^2/4A$  ( $d$  die Seite,  $A$  der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks) ist in der euklidischen Geometrie gleich  $\sqrt{3}$ , in der hyperbolischen  $> \sqrt{3}$  und liegt in der sphärischen Geometrie zwischen den Grenzen  $\pi/6$  und  $\sqrt{3}$ . Für  $\pi/6$  ist das Dreieck ein größter Kreis.

*M. Zacharias.*

Tschlek, José: Professor Cesáro's Methode der Herleitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie. *Bol. mat.* **16**, 144—148 (1943) [Spanisch].

● Szökefalvi Nagy, Gyula: Die Theorie der geometrischen Konstruktionen. Univ. Kolozsvár, *Acta Sci. math. natur.*, Nr. **18**, VIII; 87 p. (1943) [Ungarisch].

Kurze Behandlung der Hauptergebnisse der Theorie der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Kreisteilung, Konstruktionen mit dem Zirkel allein, mit dem Lineal allein) und mit anderen Zeicheninstrumenten (Streckenabtrager, Parallellineal). Konstruktionen mit Zirkel und Lineal mit Benutzung eines gegebenen Kegelschnitts.

*M. Zacharias.*

Rossier, P.: Sur la géométrie du compas à pointes sèches et celle de l'empan. *C. r. Soc. Physique Genève* **59**, 47—58 (1942).

Bei allen Konstruktionsaufgaben, die mit Lineal und Zirkel lösbar sind, kann der Zirkel ersetzt werden durch einen Zirkel mit zwei Spitzen mit fester Öffnung.

*M. Zacharias.*

Hjelmlev, J.: Über Einschiebungen. *Mat. Tidsskr. B* **1943**, 1—8 (1943) [Dänisch].

Die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt  $C$  in der Ebene zweier sich schneidenden Geraden  $a$  und  $b$  eine Gerade derart zu legen, daß die auf ihr durch  $a$  und  $b$  ausgeschnittene Strecke  $PQ$  eine gegebene Länge hat, hat vier Lösungen. Nach einem Satz von Steiner [Werke II. 668 (1882)] liegen die Mittelpunkte der vier gleichen Strecken auf einem Kreis. Alle Kreise über den durch  $C$  gehenden Strecken  $PQ$  als Durchmesser gehören einem Netz an. Steiners Behauptung, daß das Potenzzentrum des Netzes eine Hyperbel durchläuft, wenn  $C$  eine Gerade beschreibt, berichtigt Verf. dahin, daß  $M$  ebenfalls eine Gerade durchläuft. — Erweiterungen für die Fälle, daß (1)  $P$  und  $Q$  zwei projektive Reihen auf  $a$  und  $b$  durchlaufen, daß (2)  $a$  und  $b$  windschief sind und daß (3) an die Stelle von  $a$  und  $b$  ein nicht entartender Kegelschnitt tritt.

*M. Zacharias.*

Bock, H.: Fehlerwahrscheinlichkeit bei geometrischen Konstruktionen. *Z. phys. chem. Unterr.* **54**, 41—44 (1941).

Veen, S. C. van: Konstruktionen auf einer massiven Kugel. Die Eckpunkte der fünf regelmäßigen einbeschriebenen Vielfläche. *Mathematica, Zutphen, A* **13**, 15—20 (1944) [Holländisch].

Sind der Kugelradius  $R$  und die Strecke  $R/\sqrt{2}$  bestimmt, so kann man auf der Kugel Großkreise und durch zwei beliebige, nicht diametral liegende Punkte den Großkreis zeichnen. Daraus folgen unmittelbar die Konstruktionen der Ecken der fünf regelmäßigen Körper.

*M. Zacharias.*

Schaafsma, M.: Elementare Berechnung und Konstruktion der Seite des regelmäßigen 17-Ecks. *Mathematica*, Zutphen, A 11, 116—121 (1943) [Holländisch].

Die Seite und die Diagonalen des regelmäßigen 34-Ecks, die nicht zugleich Diagonalen des 17-Ecks sind, genügen vier quadratischen Gleichungen, zwischen deren Koeffizienten gewisse Beziehungen bestehen. Diese Koeffizienten werden konstruiert, und aus ihnen erhält man die Wurzeln der Gleichungen.

*M. Zacharias.*

Löbell, F.: Betrachtungen zur Streckenübertragung bei Euklid. *Forsch. Fortschritte* 19, 320—321 (1943).

Ijzeren, J. van: Näherungstrisektionen. *Nieuw. Tijdschr. Wiskunde* 27, 64—69 (1943) [Holländisch].

Zwei Trisektionen, beruhend auf den Näherungsformeln

$$\sin(a/3) \approx \sin(a/2) [\cos(a/2) + 1] / [2 \cos(a/2) + 1],$$

$$\sin(a/3) \approx \sin(a/2) [\sin(a/2) - 2 \sin(3a/4)] [\sin a + 2 \sin(3a/4) + 2 \sin(a/4)].$$

*M. Zacharias.*

Durham, R. L.: A simple construction for the approximate trisection of an angle. *Amer. math. Monthly* 51, 217—218 (1944).

Gebelein, H.: Näherungsweise Konstruktion der Kreisbogenlänge. *Z. math. naturw. Unterr.* 74, 38—41 (1943).

Näherungsrektifikation auf Grund der für kleine Bogen  $\widehat{\varphi}$  geltenden Näherungsformel von N. Cusanus  $\widehat{\varphi} \approx 3 \sin \varphi / (2 + \cos \varphi)$ .

*M. Zacharias.*

Wayne, A.: A table for computing perimeters of ellipses. *Amer. math. Monthly* 51, 219—220 (1944).

Pólya, G.: Approximations to the area of the ellipsoid. *Univ. nac. Litoral Inst. Mat., Publ.* 5, 13 p. (1943).

Hadamard, J.: A known problem of geometry and its cases of indetermination. *Bull. Amer. math. Soc.* 50, 520—528 (1944).

Konstruktion eines Quadrates, dessen aufeinanderfolgende Seiten durch vier gegebene Punkte gehen, oder allgemeiner, eines einem gegebenen Vierseit ähnlichen Vierseits, dessen Seiten durch jene Punkte gehen.

*M. Zacharias.*

Mandan, Ram: Umbilical projection. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 15, 16—17 (1942).

Mandan, Ram: Umbilical projection. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 24, 433—440 (1946).

Terracini, A.: Über einige geometrische Örter. *Un. mat. Argentina, Publ. Nr. 22*, 11 p. (1941) [Spanisch].

Santaló, L. A.: Einige Ungleichungen zwischen den Elementen eines Dreiecks. *Math. Notae* 3, 65—73 (1943) [Spanisch].

Rosenblatt, A.: Über einige Ungleichungen in der Elementargeometrie. *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima* 4, 156—161 (1941) [Spanisch].

Rosenblatt, A.: Über einige elementare Ungleichungen für das Tetraeder. *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima* 4, 213—230 (1941) [Spanisch].

Beweise der Sätze von G. N. Watson (dies. Zbl. 35, 17): Für irgend drei Cevatransversalen  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  eines Dreiecks gilt wenigstens eine der drei Ungleichungen  $AA':BC \geq |3/2$ ,  $BB':CA \geq |3/2$ ,  $CC':AB \geq |3/2$ . — Analoge Ungleichungen für das Tetraeder.

*M. Zacharias.*

Pedoe, D.: An inequality for two triangles. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 38, 397—398 (1942).

Beweis der Ungleichung  $a'^2(-a^2 + b^2 + c^2) + b'^2(a^2 - b^2 + c^2) + c'^2(a^2 + b^2 - c^2) \geq 16\Delta\Delta'$ .

*M. Zacharias.*

Pedoe, D.: On some geometrical inequalities. *Math. Gaz.* 26, 202—208 (1942).



Verf. betrachtet Ungleichungen für Summen von Quadraten und Strecken, die mit  $n$  gegebenen Punkten verbunden sind. Für  $n = 3$  ergibt sich  $(AB^2 + BC^2 + CA^2)^2 \geq 48\Delta^2$  ( $\Delta =$  Inhalt des Dreiecks  $ABC$ ). M. Zacharias.

Neumann, B. H.: Some remarks on polygons. J. London math. Soc. 16, 230—245 (1941).

Verallgemeinerungen einiger Ungleichungen von Finsler und Weitzenböck. M. Zacharias.

(1) Rauter, H.: Eine räumliche Weiterführung der Extremalaufgabe von Regiomontan. Deutsche Math. 7, 373—377 (1944).

(2) Rauter, H.: Die Extremalaufgabe von Regiomontan in der hyperbolischen Geometrie. Deutsche Math. 7, 378—382 (1944).

Erweiterung der Extremalaufgabe von Regiomontan, die verlangt, die Stelle des als eben vorausgesetzten Erdbodens zu bestimmen, von der aus eine vertikale Strecke unter dem größten Winkel erscheint. In (1) wird an die Stelle der Strecke ein in einer Vertikalebene liegendes Dreieck gesetzt, in (2) die Lösung der Aufgabe in der hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie untersucht.

M. Zacharias.

Makai, E.: Über Gitterdreiecke und Gitterparallelogramme. Mat. fizik. Lapok 50, 47—50 (1943) [Ungarisch mit deutschem Auszug].

Elementarer Beweis der bekannten Tatsache, daß jedes Dreieck, dessen Eckpunkte ganzzahlige rechtwinklige Koordinaten haben, das aber weder im Inneren noch auf dem Rande weitere Gitterpunkte enthält, den Flächeninhalt  $\frac{1}{2}$  hat. Verwendet wird ein Prozeß, der aus einem solchen Gitterdreieck ein anderes ableitet, das gleiche Fläche, aber kleineren Umfang hat; hierbei fehlt allerdings der Nachweis, daß dieser Prozeß nach endlich vielen Schritten abbricht.

W. Wunderlich.

Erdős, P.: On sets of distances of  $n$  points. Amer. math. Monthly 53, 248—250 (1946).

Bestimmung der kleinsten Zahl verschiedener Entfernungen, des Maximums des Vorkommens einer gegebenen Entfernung, des Maximums des Vorkommens der größten oder der kleinsten Entfernung in einer Menge von  $n$  Punkten einer Ebene. M. Zacharias.

Fejes, L.: Extremale Verteilungen von Punkten in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum. Univ. Kolozsvár, Acta Sci. math. natur., Nr. 23, IV, 54 S. (1944) [Ungarisch].

Außer den Problemen der dichtesten Verteilung von Punkten werden auch die Aufgaben der Bedeckung einer gegebenen Fläche mit Kreisen von gegebenem Radius oder mit Ellipsen und die Ausfüllung eines Raumes mit Kugeln untersucht.

M. Zacharias.

Fejes, L.: Einige Bemerkungen über die dichteste Lagerung inkongruenter Kreise. Commentarii math. Helvet. 17, 256—261 (1945).

Zur Definition der Dichte  $D$  eines die Ebene bedeckenden Systems von Kreisen  $\{k_i\}$  mit den Flächeninhalten  $k_i$  wird eine gegen  $\infty$  strebende Folge ähnlicher konvexer Gebiete mit den Inhalten  $T_n$  betrachtet und  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} F(T_n)/T_n$  gesetzt, wo  $F(T_n)$  den  $T_n$  und dem System  $\{k_i\}$  gemeinsamen Flächeninhalt bedeutet. Verf. untersucht besonders die größte Dichte für nichtüberschneidende Kreise und die kleinste Dichte für überschneidende Kreise, die die Ebene vollständig bedecken.

M. Zacharias.

Fejes, L.: Über die Bedeckung einer Kugelfläche durch kongruente Kugelkalotten. Mat. fiz. Lapok 50, 40—46 (1943) [Ungarisch mit deutscher Zusammenfassg.].

Ausdehnung des Ergebnisses der Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 27, 419) von der Ebene auf die Kugelfläche. M. Zacharias.

Segre, B. und K. Mahler: On the densest packing of circles. Amer. math. Monthly 51, 261—270 (1944).

Ist  $A$  der Inhalt eines konvexen Polygons, von dessen Winkeln keiner  $120^\circ$  überschreitet, so können in dieses Polygon höchstens  $A/\sqrt{12}$  einander nicht überschneidende Kreise vom Radius 1 gelegt werden. M. Zacharias.

Goodman, A. W. und R. E. Goodman: A circle covering theorem. Amer. math. Monthly 52, 494—498 (1945).

Wenn  $n$  Kreise mit den Radien  $r_1, r_2, \dots, r_n$  in einer Ebene solche Lagen haben, daß keine Gerade die Kreise trennt, so können sie von einem Kreis mit einem Radius  $\leq \sum_{i=1}^n r_i$  bedeckt werden. M. Zacharias.

Rutishauser, H.: Über Punktverteilungen auf der Kugelfläche. Commentarii math. Helvet. 17, 327—331 (1945).

Auf der Fläche der Einheitskugel sollen  $n$  Punkte derart gefunden werden, daß die kleinste sphärische Entfernung je zweier von ihnen ein Maximum ist. Für  $n = 3, 4, 6, 12$  genügen die Ecken der regelmäßigen Polyeder der Bedingung, nicht aber für  $n = 8$  und 20. Verf. beschäftigt sich mit diesen beiden Fällen und findet Polyeder, die der Bedingung näher kommen als Kubus und Dodekaeder. Ob es die bestmöglichen sind, bleibt unentschieden. M. Zacharias.

Fukuzawa, S.: Eine Menge von Spiegelbildern. Tensor 4, 77—80 (1941) [Japanisch].

Untersuchung der Eigenschaften der Menge von Spiegelbildern von  $n$  Elementen aufeinander, unter der Voraussetzung, daß jedes Bild eines Elements als ein neues Element der Menge betrachtet wird. M. Zacharias.

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Kerawala, S. M.: A note on curves congruent to their evolutes. Proc. nat. Acad. Sci. India, Sect. A 11, 23—25 (1941).

Maxia, A.: Configurazioni metricamente legate ad un punto cuspidale di una curva piana. Boll. Un. mat. Ital., II. Ser. 5, 189—196 (1943).

Goormaghtigh, R.: Sur les centres de courbure des courbes définies par leur équation polaire. Mathesis 54, 406—408 (1945).

Scott, Winston M.: Some special roulettes. Bol. mat. 16, 102—108 (1943).

(1) Jackson, S. B.: Vertices for plane curves. Bull. Amer. math. Soc. 50, 564—578 (1944).

(2) Jackson, S. B.: The four-vertex-theorem for surfaces of constant curvature. Amer. J. Math. 67, 563—582 (1945).

(3) Scherk, Peter: The four-vertex-theorem. Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal 1945, 97—102. Toronto: University of Toronto Press 1946. § 3,25.

(1): Verf. gibt mit Hilfe von fast rein geometrischen Beweisen eine zusammenfassende Darstellung für die Anzahl von Scheiteln (relativen Extrema der Krümmung) von einfach und von mehrfach geschlossenen, ebenen Kurven und beweist dabei insbesondere: Eine einfach geschlossene Kurve ist entweder ein Kreis, oder sie enthält mindestens 4 Scheitel; sie enthält genau 4 Scheitel, wenn sie jeden beliebigen Kreis höchstens 4mal schneidet. Wird sie von einem gewissen Kreis  $2n$ -mal (mit gewisser Anordnung der Schnittpunkte auf der Kurve) geschnitten, so enthält sie mindestens  $2n$  Scheitel. Eine (mehrfach) geschlossene Kurve mit genau  $2n$  Scheiteln besteht notwendig aus  $2$  einfach geschlossenen Schleifen, von denen jede einen Scheitel enthält. Verf. bedient sich des wichtigen Hilfssatzes,

daß es zu jeder Zerlegung einer ebenen Jordankurve in 3 Bogen einen ganz in dem von ihr begrenzten Bereich liegenden Kreis gibt, welcher mit jedem Bogen Punkte gemein hat. Verallgemeinerung des gewöhnlichen Vierscheitelsatzes in (2): Die geodätische Krümmung jeder einfach geschlossenen Kurve auf einem einfach zusammenhängenden Bereich  $S$  einer Fläche konstanter Krümmung ist entweder konstant, oder sie besitzt mindestens 4 relative Extrema. Beweis erfolgt durch Zurückführung auf den ebenen Fall. Die Voraussetzungen der konstanten Krümmung der Fläche und des einfachen Zusammenhangs von  $S$  sind wesentlich. (3) enthält einen zusammenfassenden Bericht („The four-vertex theorem“) über Vierscheitelprobleme unter besonderer Berücksichtigung der Tatsache, daß solche Probleme zur Möbiusgeometrie gehören. *K. Leichtweiß.*

**Tietze, Heinrich:** Über Frenetsche Formeln, Poinsetsche Bewegungen und Gramsche Determinanten. J. reine angew. Math. 186, 116—128 (1944).

**Tietze, Heinrich:** Über Orthogonalisierung, Kurventheorie und allgemeine Drehbewegung. S.-Ber. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1943, 127—129 (1944).

Verf. behandelt im  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raum die Bewegung eines starren orthogonalen  $n$ -Beins um dessen Ursprung unter besonderem Hervorheben der Bedeutung der Gramschen Determinante hierfür und genauerem Eingehen auf Differenzierbarkeitseigenschaften der Krümmungsfunktionen. Als Sonderfall der Ableitungsgleichungen werden die bekannten Frenetschen Formeln einer Raumkurve im  $n$ -dimensionalen Raum erhalten. *H. R. Müller.*

**Silva, G.:** Contributo allo studio di alcuni enti geometrici nei punti di una linea sghemba. Ist. Veneto Sci. Lett. Arti, Atti, Cl. Sci. mat. natur. 104, 1053—1080 (1946).

Es werden analytische Kurven des 3-dimensionalen euklidischen Raumes in der Umgebung singulärer Punkte untersucht und dort der Tangenten-, Normalen- und Binormaleneinheitsvektor sowie die Krümmung und Torsion bestimmt. *W. Barthel.*

**Mineo, M.:** Sopra una classe di curve e sopra certe rappresentazioni equivalenti delle superficie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 62—65 (1946).

Weiterführung einiger Arbeiten von Vincensini (dies. Zbl. 3, 364; 8, 176; 20, 65). *W. Barthel.*

**Silva, G.:** Concavità, convessità e curvatura di una linea relative a un punto dato e a una data direzione. Ist. Veneto Sci. Lett. Arti, Atti, Cl. Sci. mat. natur. 104, 1081—1096 (1946).

**Silva, G.:** Curvatura relativa a una data direzione o ad un punto dato di una linea qualsiasi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 251—253 (1946).

**Silva, G.:** Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a punto fisso. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 466—471, 472—478 (1946).

Die Relativkrümmung  $K$  einer Kurve  $P(t)$  bezüglich eines festen Punktes  $O$  oder einer festen Richtung  $m$  wird durch  $|P'|^4 K = (P' \setminus P'') \setminus P' \cdot M$  definiert, wobei  $M$  der Einheitsvektor von  $\vec{PO}$  oder  $m$  ist. Sie ist die Projektion des gewöhnlichen Krümmungsvektors  $k_n$  auf  $M$ . Untersuchung des Zusammenhangs von  $K$  mit der Konkavität (Konvexität) von  $P(t)$  relativ zu dem festen Punkt  $O$  bzw. der festen Richtung  $m$ . — Klassifikation der Kurven mit  $K = \text{const.}$  *W. Barthel.*

**Gheorgiev, Gh.:** Sur certaines courbes dérivées d'une courbe gauche et applications. Bull. École polytechn. Jassy 1, 225—233 (1946).



Scherrer, W.: Über das Hauptnormalenbild einer Raumkurve. *Commentarii math. Helvet.* **19**, 115—133 (1946).

Verf. dehnt das Resultat Jacobis, daß das Hauptnormalenbild  $N$  einer geschlossenen Raumkurve  $C$  die Einheitskugel in 2 flächengleiche Teile teilt, auf den (von Jacobi nicht erwähnten) Fall aus, daß  $N$  mehrfache Punkte besitzt. Er definiert eine Umlaufszahl  $l$  von  $N$  als Anzahl aller einfach geschlossenen Schleifen, in die sich  $N$  zerlegen läßt, sowie eine Nutationszahl  $n$  von  $C$  als Anzahl der Drehungen des Darboux'schen Drehvektors um die Hauptnormale bei einem Umlauf von  $C$ . Dann gilt:  $N$  begrenzt eine (positiv umlaufende) Fläche vom Inhalt  $2(l - n)\pi$ . Verf. gibt weiter ein Beispiel einer Raumkurve mit bis auf die Einschränkungen  $l > 0$ ,  $-1 < n < -l$ ,  $(n, l) \neq (-1, 1)$  beliebig gewählten  $l$  und  $n$  ( $N$  ist der  $l$ -mal durchlaufene Parallelkreis mit der Poldistanz  $\arccos n/l$ ), bei welchem allerdings die Raumkurve  $C$  singuläre Punkte aufweist. *K. Leichtweiß.*

(1) Combes, Bernard: Une formule de géométrie sphérique et son application au calcul de l'aire d'une surface gauche de paramètre de distribution constant. *C. r. Acad. Sci., Paris* **218**, 926—927 (1944).

(2) Vidal, Enrique: Einige Eigenschaften sphärischer Kurven. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. **4**, 238—242 (1944) [Spanisch].

(3) Posniak, E.: Sur les courbes fermées à tangentes parallèles. *Mat. Sbornik*, n. Ser. **17** (59), 59—64 (1945) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

(1): Seien  $E$  und  $E_1$  zwei geschlossene Kurven auf der Einheitskugel, welche beide von den Großkreisen, die  $E$  unter dem festen Winkel  $V$  schneiden, Bogen der Länge  $\delta$  ausschneiden. Dann gilt:  $2\pi - a_1 = L \sin V \sin \delta + (2\pi - a) \cos \delta$  ( $a, a_1$  = Inhalte der von  $E$  und  $E_1$  begrenzten Flächen;  $L$  = Länge von  $E$ ). Als Spezialfall dieser Formel folgt: Das sphärische Bild einer geschlossenen Striktionlinie einer nicht abwickelbaren Regelfläche teilt die Einheitskugel in zwei flächengleiche Teile (ein Resultat, was auch direkt aus dem Jacobischen Satz gefolgert werden kann). (2): Vereinfachter Beweis des Satzes von Geppert, daß die Ebenen und die Kugeln durch das Verschwinden der Gesamtwindung aller geschlossenen, auf ihnen liegenden Kurven charakterisiert sind, und Folgerung: Jede geschlossene, sphärische Kurve besitzt zwei Punkte mit parallelen Tangenten und zwei Punkte mit parallelen Hauptnormalen. Hieran schließt sich in gewissem Sinne (3) an. *K. Leichtweiß.*

Vygodsky, M.: Sur les courbes fermées à indicatrice des tangentes donnée. *Mat. Sbornik*, n. Ser. **16** (58), 73—80 (1945) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Krein, M.: Sur un théorème de M. Vygodsky. *Mat. Sbornik*, n. Ser. **18** (60), 447—450 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Vygodsky beweist auf geometrische Weise, daß jede geschlossene, sphärische Kurve, welche weder in einer Halbkugel liegt noch Großkreis ist, Tangentenkurve einer geschlossenen, nicht ebenen Raumkurve ist, während M. Krein diesen Satz mittels eines analytischen Beweises auf Kurven im  $n$ -dimensionalen Raum ausdehnt. *K. Leichtweiß.*

Šnirel'man, L. G.: Über gewisse geometrische Eigenschaften geschlossener Kurven. *Uspechi mat. Nauk* **10**, 34—44 (1944) [Russisch].

Es werden die Beweise u. a. folgender Sätze des Verf. vereinfacht: Jeder einfach geschlossenen, stetig gekrümmten, ebenen Kurve ist ein Quadrat eingeschrieben; und jede solche Kurve enthält ein System  $S$  von nichtentarteten Rhomben mit folgender Beschaffenheit: Jeder Kurvenpunkt ist Ecke eines Rhombus aus  $S$ , und außerdem können zwei beliebige Rhomben  $R$  und  $R'$  von  $S$  durch eine stetige, einparametrische Schar von Rhomben aus  $S$  so verbunden werden, daß dabei irgend zwei Ecken von  $R$  und  $R'$  ineinander übergehen. *K. Leichtweiß.*

Popa, Ilie: Sur „l'aire“ des courbes gauches fermées. Bull. École polytechn. Jassy 1, 15—23 (1946).

Gheorghiev, Gh.: Sur le vecteur aréolaire d'une courbe gauche. Bull. École polytechn. Jassy 1, 32—45 (1946).

Comenetz, George: The limit of the ratio of arc to chord. Amer. J. Math. 64, 695—713 (1942).

Genauere Untersuchung des Bogen-Sehnen-Verhältnisses einer nicht isotropen analytischen Kurve  $C$  im komplexen 3-dimensionalen Raum im Falle einer isotropen Tangente  $t$  im Punkt  $O$ . Der Grenzwert des Verhältnisses in  $O$  ist abhängig von den Berührungsordnungen von  $C$  mit  $t$  und der durch  $t$  gehenden isotropen Ebene und von der Krümmung. G. Aumann.

Robinson, Charles V.: A simple way of computing the Gauss curvature of a surface. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 5—6, 16—24 (1944).

(1) Santaló, L. A.: Über den Begriff der Krümmung einer Fläche. Math. Notae 2, 165—184 (1942) [Spanisch].

(2) Levi, B.: Kurze Bemerkung. Math. Notae 2, 184—187 (1942) [Spanisch].

(1): Die „Krümmung“ einer Fläche kann folgendermaßen gemessen werden: 1) durch den Flächeninhalt  $A$  des Flächenstücks  $G$ , das man erhält, wenn man auf jedem Normalschnitt durch den Flächenpunkt  $P$  die gleiche Länge  $s$  abträgt, im Vergleich mit dem Flächeninhalt des Kreises vom Radius  $s$ . Es ist  $1/R_1 R_2 = \lim_{s \rightarrow 0} (12\pi s^2 - A)/\pi s^4$  ( $R_1, R_2$ : Hauptkrümmungsradien); 2) durch das Volumen  $V$ , das eine zur Tangentenebene im Abstand  $h$  parallele Ebene von der (elliptisch gekrümmten) Fläche abschneidet. Es ist  $1/R_1 R_2 = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2/V)^2$ ; 3) durch den Mittelwert  $\bar{\vartheta}$  des Winkels  $\vartheta$  zwischen den Flächennormalen in einem Punkt  $M$  des Gebiets  $G$  von 1) und in  $P$ . Es ist die „Krümmung von Casorati“

$$C = \frac{1}{2} (1/R_1^2 + 1/R_2^2) = \lim_{s \rightarrow 0} 2\bar{\vartheta}^2/s^2.$$

Die Ergebnisse werden z. T. als bekannt angegeben. (2) enthält einige Bemerkungen u. a. darüber, daß die Krümmungsdefinition unabhängig von einer Einbettung in einen Raum ist. H. Gericke.

Sispánov, Sergio: Bestimmung des Rauminhalts eines Körpers. Revista Un. mat. Argentina 10, 37—40 (1944) [Spanisch].

Let  $P$  be an elliptic point of the surface  $S$ , and let  $S_\alpha$  be the surface obtained by taking the surface which is symmetric to  $S$  with respect to the tangent plane at  $P$  and turning it through  $\alpha$  about the normal at  $P$ . Generalizing a result of Santaló [same Revista 9, 15 (1943), problem 44] the author shows that the volume  $V_\alpha(h)$  between  $S$  and  $S_\alpha$  satisfies the relation  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-2} V_\alpha(h) = \pi R_1 R_2 \{4 R_1 R_2 + (R_1 - R_2)^2 \sin^2 \alpha\}^{-\frac{1}{2}}$ . P. Scherk (M. R. 6, 85).

Myller, A.: Indicatrice de troisième ordre de la courbure des surfaces. Acad. Roumaine, Bull. Sect. Sci. 26, 147—150 (1943).

Die Normalform einer Fläche  $F$  in der Umgebung ihres Punktes  $O$  sei

$$z = \frac{1}{2} (a_{20} x^2 + a_{02} y^2) + \frac{1}{6} (a_{30} x^3 + 3a_{21} x^2 y + 3a_{12} x y^2 + a_{03} y^3) + \dots$$

Umschreibt man dann  $F$  einen durch  $O$  gehenden Zylinder, dessen durch  $O$  gehende Erzeugende mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  bildet, projiziert seine Berührungskurve mit  $F$  auf die Tangentialebene von  $O$ , d. h.  $z = 0$ , und bestimmt den Krümmungsmittelpunkt dieser Projektion zu  $O$ , so beschreibt dieser mit variablem  $\varphi$  die Kurve

$$a_{20} a_{02} (x^2 + y^2) + a_{02} a_{12} x^3 + (a_{20} a_{03} - 2a_{02} a_{21}) x^2 y + (a_{02} a_{30} - 2a_{20} a_{12}) x y^2 + a_{20} a_{21} y^3 = 0,$$

die als Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix aufgefaßt werden kann. H. Geppert.

Arghiriade, E.: Sur les points multiples de la ligne parabolique d'une surface. Bull. sci. École polytechn. Timişoara 12, 59—63 (1945).

**Winants, Marcel:** Nouvelle contribution à la théorie des lignes de courbure passant par un ombilic. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **31**, 33—38 (1946).

Hat eine Fläche in einem Nabelpunkt mit ihrer Tangentenebene eine Berührung  $i$ -ter Ordnung, so können mindestens  $i + 1$  (nicht notwendig reelle) Krümmungslinien durch den Nabelpunkt gehen [Verallgemeinerung und Korrektur eines Satzes von Picard, *Traité d'analyse*, 2. ed., III (Paris 1909), insbes. p. 231—234].  
*H. Gericke.*

**Fernandez Ayala, Francisco Javier:** Einige Eigenschaften orthogonaler Netze. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. **5**, 113—122, 164—182 (1945) [Spanisch].

Ein symmetrischer Tensor ordnet jedem Raumpunkt ein Ellipsoid zu. Es werden die Bedingungen dafür abgeleitet, daß dessen Hauptachsen Tangenten an eine dreifach orthogonale Flächenschar sind. Der Fall ebener Netze wird (z. T. mit Benutzung komplexer Funktionen) durchgerechnet, u. a. eine Reihe bekannter Resultate auf neuem Wege hergeleitet.  
*H. Gericke.*

**Bompiani, E.:** Piccoli contributi alla teoria gaussiana delle superficie. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **1**, 35—39 (1946).

Geometrische Deutung der Formeln von Mainardi und Codazzi unter Betrachtung der aus Krümmungslinien einer Fläche gebildeten infinitesimalen Rechtecke und der in ihren Eckpunkten errichteten Flächennormalen. Weiter werden zwei Invarianten gegenüber Flächenverbiegung mit Erhaltung der Krümmungslinien aufgestellt und eine Ausdehnung des Beltrami-Enneper Satzes über die Torsion der Asymptotenlinien auf Kurven vorgenommen, die die Asymptotenlinien berühren.  
*H. R. Müller.*

**Thomas, T. Y.:** Algebraic determination of the second fundamental form of a surface by its mean curvature. *Bull. Amer. math. Soc.* **51**, 390—399 (1945).

Verf. stellt für eine in einen Euklidischen dreidimensionalen Raum eingebettete, zweidimensionale Fläche die Komponenten des zweiten Fundamentaltensors als algebraische Funktionen des Maßtensors, der mittleren Krümmung und deren Ableitungen dar. Umgekehrt werden mit Hilfe des Maßtensors zwei Ungleichungen und zwei Differentialgleichungen für eine skalare Funktion  $H$  als Bedingung dafür angegeben, daß  $H$  als mittlere Krümmung einer in einen Euklidischen dreidimensionalen Raum einbettbaren, zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit fungiert.  
*H. R. Müller.*

**Frucht, Roberto:** Ein Beitrag zur elementaren Flächentheorie. *Revista Un. mat. Argentina* **8**, 91—100 (1942) [Spanisch].

Verf. vertieft und verallgemeinert einen Satz von Vakselj und H. W. Alexander, wonach die mittlere Krümmung einer Fläche zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung genügt, deren Koeffizienten Funktionen von  $E$ ,  $F$ ,  $G$  und deren Ableitungen sind.  
*H. R. Müller.*

**Rozet, O.:** Sur certaines formes différentielles d'une surface. I, II. *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* **15**, 117—119, 188—191 (1946).

Verf. betrachtet neben den ersten beiden Grundformen der Flächentheorie eine (aus dem zweiten Fundamentaltensor gebildete) kubische Differentialform  $q_3$ , deren Verschwinden auf die Kurven von de la Gournerie führt. Diese werden für Kugeln, Dupinsche Zyklopen, Regelflächen und Quadriken untersucht. Für nicht abwickelbare Flächen wird die Riemannsche Krümmung der zweiten Fundamentalfarm mit der mittleren Krümmung und einer aus  $q_3$  gebildeten Invarianten in Zusammenhang gebracht.  
*H. R. Müller.*

**Löbell, Frank:** Differentialinvarianten bei Flächenabbildungen. *S.-Ber. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München* **1943**, 217—237 (1944).

Verf. betrachtet reguläre Abbildungen eines singularitätenfreien Gebietes einer Fläche auf ein ebensolches einer anderen Fläche und die so in entsprechenden



Punkten entstehende Zuordnung der Tangentialebenen. Zu deren Bestimmung werden vektorielle und skalare Differentialinvarianten gegenüber Parameterwechsel aufgestellt.  
*H. R. Müller.*

**Urisman, S.:** *L'involution et la théorie des surfaces*. Nauk.-doslidn. Inst. Mat. Mech. Charkiv. Univ., geometr. Zbirnik 2, 85—92 (1940) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Fragen der Flächentheorie unter Verwendung von Involutionen linearer Differentialformen, deren Doppelemente durch die beiden quadratischen Grundformen bestimmt sind.  
*H. R. Müller.*

**Neville, E. H.:** The genesis of the Codazzi function. J. London math. Soc. 19, 23—27 (1944).

Verf. betrachtet zu einer skalaren Funktion der Richtungen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , die längs einer Kurve eine Fläche ständig berühren, die von der Kurvenkrümmung unabhängige Laguerresche Ableitung und zeigt, daß diese für die Änderung einer beliebigen Ortsfunktion auf einer Fläche ein symmetrische bilineare Richtungsfunktion ist. Ein Sonderfall führt auf eine Deutung der Codazzischen Gleichungen.  
*H. R. Müller.*

**Wagner, V.:** On the Cartan group of holonomicity for surfaces. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 37, 6—8 (1942).

Verf. bezieht die Tangentialebenen an eine Fläche längs einer Kurve auf orthogonale Zeiger und faßt diese zu einer komplexen Zahl  $z$  zusammen. Die Differentialgleichung für Euklidische Punktbeziehung schreibt sich nun in Form einer einzigen Differentialgleichung in  $z$ , die durch Quadraturen lösbar ist. Für geschlossene Integrationswege ergeben sich Transformationen der Holonomiegruppe, die in Schiebungen und Drehungen aufgespalten werden: Erstere hängen nur vom Linienintegral der geodätischen Krümmung, letztere vom Flächenintegral der Gaußschen Krümmung ab.  
*H. R. Müller.*

**Germain, P.:** Sur divers points de géométrie infinitésimale et sur l'application des formules de Lelievre à l'étude d'une famille de surfaces. Revue sci. 79, 69—84 (1941).

Zum Aufbau der klassischen Differentialgeometrie der Flächen negativen Krümmungsmaßes  $K$  benützt Verf. die Lelievreschen Formeln und untersucht jene Flächen, für die der Lelievre-Vektor [in Richtung der Flächennormale, vom Betrage  $(-K)^{1/4}$ ] Ortsvektor einer Schiebfläche ist.  
*H. R. Müller.*

**Bernstein, S.:** Nouvelles généralisations du théorème de Liouville et son extension aux équations du type parabolique. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 42, 103—107 (1944).

**Bernstein, S.:** Renforcement de mon théorème sur les surfaces à courbure négative. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 6, 285—290 (1942) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

**Bernstein, S.:** Ergänzung zu meinem Artikel: „Verschärfung des Satzes über die Flächen negativer Krümmung“. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 7, 297—298 (1943) [Russisch].

Für  $z = f(x, y)$  ( $f$  zweimal stetig differenzierbar) gelte  $\lim z/\varrho \rightarrow 0$  für  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ . Für ein  $P > 0$  gelte weiter für alle  $(x, y) \in S_p$  mit  $p^2 + q^2 \leq P$  ( $p = z_x$  usw.):

$$(*) \quad A r + 2 B s + C t = 0, \quad AC - B^2 \geq 0.$$

( $A, B, C$  Funktionen von  $x, y, z, p, q, r, s, t$ .) Die Punktmenge, auf der  $A, B, C$  unstetig sind, bzw. in (\*) das Gleichheitszeichen gilt, sei in  $S_p$  nirgends dicht. Dann gilt:  $z = \text{konst.}$  Gilt in (\*) identisch das Gleichheitszeichen, so ist  $z$  eine Zylinderfläche mit horizontalen Erzeugenden.  
*Joachim Nitsche.*

Charrueau, André: Sur la courbure et la torsion géodésique. Bull. Soc. math. France **71**, 20—26 (1943).

Die Normalkrümmung  $1/R_1$  und geodätische Windung  $1/T_1$  einer Flächenkurve werden zeichnerisch dargestellt, für zwei durch einen Punkt gehende Flächenkurven gemischte Größen  $1/R_{t,k}$ ,  $1/T_{t,k}$  eingeführt und kinematisch gedeutet.

H. Gericke.

Lalan, V.: Invariants géodésiques d'une courbe minima tracée sur une surface. C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 569—570 (1946).

Einer Minimalkurve auf einer Fläche wird im Punkte  $M$  außer ihrem „inneren“ Dreiein  $MJ_1J_2J_3$  das folgende Dreiein zugeordnet:  $e_1$  = Tangentenvektor,  $e_3$  = Tangentenvektor an die zweite Minimalkurve durch  $M$ ,  $e_2$  = Einheitsvektor der Flächennormalen. Dann ist  $e_1 = J_1$ ,  $e_2 = J_2 + pJ_1$ ,  $e_3 = J_3 + pJ_2 - (\frac{1}{2}p^2)J_1$ . Die Invariante  $p$  wird geodätische Pseudo-Krümmung genannt und ihre Beziehung zu anderen Invarianten der Fläche angegeben.

H. Gericke.

Ling, Donald P.: Geodesics on surfaces of revolution. Trans. Amer. math. Soc. **59**, 415—429 (1946).

Für Drehflächen, deren Meridiankurven durch eine eindeutige Funktion  $y = f(x)$  mit überall (evtl. außer in  $x = 0$ ) stetiger positiver Ableitung gegeben sind, werden die Doppelpunkte und die Anzahl der Windungen der geodätischen Linien untersucht. Die zugelassenen Flächen lassen sich in folgende Klassen einteilen: „zylindrische“, bei denen jede geodätische Linie unendlich viele Windungen hat, „konische“, bei denen die Anzahl der Windungen aller geodätischen Linien eine feste obere Grenze hat, „semizylindrische“, bei denen zwar jede geodätische Linie nur endlich viele Windungen hat, diese Anzahl aber nicht beschränkt ist. Diese Klassen werden analytisch durch das Verhalten gewisser Integrale gekennzeichnet. Beispiele.

H. Gericke.

Santaló, L. A.: Flächen, deren  $D$ -Kurven geodätische Linien oder isogonale Trajektorien der Krümmungslinien sind. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. **5**, 255—267 (1945) [Spanisch].

Springer, C. E.: Dual geodesics on a surface. Bull. Amer. math. Soc. **48**, 901—906 (1942).

Jedem Punkte einer Flächenkurve ist zugeordnet: 1) der Schnittpunkt  $T$  dreier aufeinanderfolgender Tangentenebenen, 2) die zur Flächennormalen in der „Greenschen Relation  $R$ “ stehende Gerade  $l_2$ . Eine Flächenkurve, für deren Punkte jeweils  $T$  auf  $l_2$  liegt, heißt „dualgeodätisch“. Differentialgleichung und einige Sätze.

H. Gericke.

Springer, C. E.: Union curves and union curvature. Bull. Amer. math. Soc. **51**, 686—691 (1945).

Man kann die Begriffe geodätische Linie und geodätische Krümmung einer Flächenkurve dadurch verallgemeinern, daß man die Normalenkongruenz  $N$  der Fläche  $S$  durch eine beliebige Strahlenkongruenz  $C$  ersetzt. An die Stelle der geodätischen Linien treten dann auf  $S$  jene Kurven  $k$ , deren Schmiegeneben  $\sigma$  in jedem Punkte  $P$  von  $k$  den durch  $P$  laufenden Strahl  $c$  der Kongruenz  $C$  enthalten. Verf. bezeichnet diese Kurven als die auf  $S$  zu  $C$  gehörigen union curves (Vereinigungskurven, wegen der vereinigten Lage von  $\sigma$  und  $c$ ). Projiziert man eine Flächenkurve mittels der Kongruenzstrahlen  $c$  ihrer Punkte  $P$  auf die Tangentenebene  $\tau_0$  in  $P_0$ , so erhält man als Krümmung der Projektion  $c'$  ein Gegenstück der geodätischen Krümmung von  $c$ , die Verf. als Vereinigungskrümmung  $K_u$  (union curvature) von  $c$  in  $P_0$  bezeichnet. Für Vereinigungskurven ist natürlich  $K_u = 0$ .

K. Strubecker.

Vidal, Enrique: Über die äquivalente Darstellung eines Teiles einer krummen Fläche in einer Ebene. Portugalica Math. **4**, 199—202 (1945) [Spanisch mit französ. Zusammenfassg.].

Ein Flächenstück wird in Streifen längs geodätisch paralleler Kurven zerlegt. Diese Streifen werden auf die Ebene abgewickelt. Die Trägerkurven in der Ebene sind nur dann parallel, wenn die Fläche abwickelbar ist. *H. Gericke.*

**Dolaptschiew, Bl.:** Eine Art von Flächenkurven. Zylinderkettenlinien. Mat. fiz. Lapok 50, 24—28 (1943) [Ungarisch mit deutscher Zusammenfassg.].

Flächenkurven „gleicher Neigung“ werden durch die Eigenschaft definiert, daß die Hauptnormale mit der Flächennormalen einen konstanten Winkel  $\vartheta$  bildet. Ihre Differentialgleichung wird aus der Beziehung  $\operatorname{tg} \vartheta = \varrho_n / \varrho_g$  abgeleitet. Sie vereinfacht sich für Rotationsflächen. Sie wird für Rotationszylinder gelöst. Bei Abwicklung des Zylinders gehen die Kurven gleicher Neigung in Geraden und Kettenlinien über. Mechanisch sind sie die Kettenlinien auf dem Zylinder. (Aus der deutschen Zusammenfassung.) *H. Gericke.*

**Kasner, Edward and John DeCicco:** Scale curves in conformal maps. Proc. nat. Acad. Sci. USA 30, 162—164 (1944).

**Kasner, Edward and John DeCicco:** Geometry of scale curves in conformal maps. Amer. J. Math. 67, 157—166 (1945).

**DeCicco, John:** Conformal maps with isothermal systems of scale curves. Amer. J. Math. 68, 137—146 (1946).

**Kasner, Edward and John DeCicco:** Scale curves in general cartography. Proc. nat. Acad. Sci. USA 30, 211—215 (1944).

**Kasner, Edward and John DeCicco:** General theory of scale curves. Amer. J. Math. 68, 66—76 (1946).

**DeCicco, John:** Kartographie und Skalenkurven. Revista Un. mat. Argentina 12, 62—74 (1946) [Spanisch].

Gegeben sei eine eindeutige Punktabbildung einer Fläche  $\Sigma$  auf eine Ebene  $\pi$  durch gleiche Werte der Parameter  $(x, y)$ . [ $(x, y)$  seien cartesische Koordinaten der Ebene.] Betrachtet werden die „scale curves“ (s.c.), entlang denen das Verhältnis der Bogenlänge  $dS = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$  auf  $\Sigma$  und  $ds$  auf  $\pi$  konstant ist:  $ds/dS = \sigma = \text{const.}$  Es gibt im allgemeinen  $\infty^2$  bei konformer Abbildung und nur bei dieser  $\infty^1$  s.c. 1. Die Abbildung ist konform. Jede Kurvenfamilie  $f(x, y) = \text{const}$  kann als Familie von s.c. auftreten. Eine „quasi-isotherme Familie“ (q.F.) bilden definitionsgemäß solche s.c., längs denen die Gaußsche Krümmung auf  $\Sigma$  konstant ist. [ $f(x, y)$  genügt dann einer Differentialgleichung vierter Ordnung.] a) q.F. aus Geraden bzw. Kreisen sind notwendig Geraden- bzw. Kreisbüschel. b) q.F. aus Parallelkurven sind notwendig Parallelbüschel von Geraden oder Büschel konzentrischer Kreise. c) Ist eine q.F. isotherm, so ist entweder die Fläche  $\Sigma$  abwickelbar oder es liegt b) vor und  $\Sigma$  ist abwickelbar oder auf eine Rotationsfläche abwickelbar. Bestimmt werden die Linienelemente aller Rotationsflächen, bei denen die s.c. eine isotherme Familie bilden. Mercator-, stereographische und Lambert-Projektion sind die einzigen konformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene mit isothermen bzw. mit parallelen s.c. Erstere die einzige mit Geraden, letztere beiden die einzigen mit Kreisen als s.c. 2. Die Abbildung ist nicht konform. Die s.c. berechnen sich aus

$$y'' = \frac{(1 + y'^2) [E_x + y' (E_y + 2F_x) + y'^2 (2F_y + G_x) + y'^3 G_y]}{2 [-F + y' (E - G) + y'^2 F]}.$$

Es gibt im allgemeinen zwei Flächen mit demselben System von s.c. Durch einen Punkt gibt es  $\infty^1$  s.c.; drei Richtungen sind ausgezeichnet, in denen die Kurven Wendepunkte, zwei zueinander orthogonale Richtungen, in denen die Kurven Spitzen haben. Der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist eine Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt in dem betrachteten Punkt, deren Zweige die Spitzenrichtungen berühren. Entartet die Kurve dritter Ordnung in drei Geraden, so bilden die s.c. ein „velocity system“:  $y'' = \frac{1}{2} (1 + y'^2) (\psi - y' \phi)$ . [s. E. Kasner



and J. DeCicco, Bull. Amer. math. Soc. 49, 407—412 (1943)]. Sind die  $\infty^2$  s. c. die  $\infty^2$  Geraden der Ebene, so hängt die Figur von sechs Konstanten ab. Die zugehörige Flächenklasse  $\Sigma$  wird diskutiert. Unter den Flächen konstanter Krümmung sind hierunter nur abwickelbare enthalten.

M. Barner.

Wong, Yung-Chow: Scale hypersurfaces for conformal-Euclidean space. Amer. J. Math. 68, 263—272 (1946).

Verallgemeinerung von Begriffsbildungen von E. Kasner und J. DeCicco (vgl. vorstehendes Referat) für konforme Abbildungen eines  $\Sigma_n$  auf einen euklidischen  $R_n$ . Es gibt eine Schar „scale Hyperflächen“, die ein quasi-isothermes System bilden, wenn die skalare Krümmung längs einer jeden der Flächen auf  $\Sigma_n$  konstant ist. Die Ergebnisse a) und b) (vgl. vorstehendes Referat) übertragen sich sinngemäß. Außer Parallelbüschel von Hyperebenen und Büscheln konzentrischer Kugeln treten noch Büschel verallgemeinerter coaxialer Rotationszylinder als quasi-isotherme Familien in die Betrachtung ein. Die zugehörigen Linienelemente sind bestimmt.

M. Barner.

Kasner, Edward and John DeCicco: The distortion of angles in general cartography. Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 94—97 (1946).

Entsprechend den „scale curves“ (s. c.) sind die „azimuthal curves“ (a. c.) definiert als die Kurven, langs denen das Verhältnis der Winkeländerung auf  $\Sigma$  und  $\pi$  konstant ist (vgl. das vorletzte Referat). Es ist  $\alpha = H/\sigma^2$  mit  $H^2 = E/G - F^2$ . Es gibt im allgemeinen  $5 \cdot \infty^1$  s. c., die zugleich a. c. sind: die  $2 \cdot \infty^1$  Minimumkurven auf  $\Sigma$  bzw. auf  $\pi$  und die  $\infty^1$  Kurven  $H = \text{const.}$  Bei einer beliebigen Fläche  $\Sigma$  und einer geeigneten konformen Abbildung sind die a. c. die Gesamtheit der Geraden der Ebene. Die s. c. fallen mit den a. c. in die Gesamtheit der Geraden der Ebene zusammen, wenn eine abwickelbare Fläche in die Ebene abgerollt ist, und nur in diesem Fall.

M. Barner.

Kasner, Edward and John DeCicco: Converse theory of gnomonic and equiareal perspectivities. Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 16—19 (1946).

Eine Perspektivität einer Fläche  $\Sigma$  auf eine Ebene  $\pi$  führt (ebenso wie eine allgemeine Punktabbildung) höchstens  $3 \cdot \infty^1$  Geodätische in Geraden über. (Gibt es mehr, so gehen alle Geodätischen in Gerade über, die Fläche  $\Sigma$  hat nach Beltrami konstante Gaußsche Krümmung.) Man unterscheidet (1) die nicht-Rotationsflächen, (2) Rotationsflächen, nicht-Quadriken, (3) Quadriken, nicht-Kugeln, (4) Kugeln. Es gehen bei einer Perspektivität bei (1) höchstens  $\infty^1$ , bei (2) immer  $\infty^1$  aber höchstens  $2 \cdot \infty^1$ , bei (3) immer  $2 \cdot \infty^1$ , aber höchstens  $3 \cdot \infty^1$ , und bei Zentralprojektion der Kugel (4) alle Geodätischen in Geraden über. Es gibt bei (1) höchstens  $2 \cdot \infty^1$ , bei (2) immer  $\infty^1$ , aber höchstens  $3 \cdot \infty^1$ , bei (3) immer  $2 \cdot \infty^1$ , aber höchstens  $4 \cdot \infty^1$ , und bei (4)  $\infty^2$  ebene Geodätische. Es sei  $z = f(x, y)$  die Fläche  $\Sigma$  und  $z = c$  die Ebene  $\pi$ .  $\Sigma$  ist auf  $\pi$  durch eine Zentralprojektion von  $O$  aus flächentreu abgebildet, wenn die Differentialgleichung  $c(z^4 - p^2 x - q^2 y)^2 = z^6(1 + p^2 + q^2)$  mit  $p = z_x, q = z_y$  besteht. Die Lösungsflächen  $\Sigma$  — es handelt sich um Zylinder — werden diskutiert.

M. Barner.

Kasner, Edward and John DeCicco: Converse of Ptolemy's theorem on stereographic projection. Proc. nat. Acad. Sci. USA 31, 338—342 (1945).

Kasner, Edward and John DeCicco: Conformal perspectivities upon a sphere. Univ. nac. Tucumán, Revista A 5, 203—212 (1946).

Läßt sich eine Fläche durch eine Perspektivität konform auf eine Kugel oder Ebene abbilden, so ist die Fläche selbst eine Kugel oder Ebene, die Abbildung eine Inversion. [Man vgl. z. B.: M. Hilton, Messenger of Math. 57, 83—90 (1927/28)].

M. Barner.

**DeCicco, John:** The pseudo-angle in space of  $2n$  dimensions. Bull. Amer. math. Soc. 51, 162—168 (1945).

**Kasner, Edward and John DeCicco:** Bi-isothermal systems. Bull. Amer. math. Soc. 51, 169—174 (1945).

**Kasner, Edward and John DeCicco:** Multi-isothermal systems. Revista Un. mat. Argentina 11, 117—125 (1946) [Spanisch].

**Kasner, Edward and John DeCicco:** Pseudo-conformal geometry: Functions of two complex variables. Bull. Amer. math. Soc. 48, 317—328 (1942).

Eine Abbildung des  $R_{2n}$  ist pseudo-konform dann und nur dann, wenn sie die Pseudo-Winkel erhält. (Pseudo-konforme Abbildungen sind durch  $n$  analytische Funktionen in  $n$  komplexen Veränderlichen gegeben. Der Pseudo-Winkel ist erklärt zwischen einer Kurve und einer Hyperfläche der Dimension  $2n - 1$  des  $R_{2n}$ .) (Für  $n = 2$  siehe Kasner, dies. Zbl. 24, 124.) Das pseudo-konforme Bild eines Parallelbüschels von  $\infty^{2n-1}$  Geraden heißt multi-isotherm ( $K$ ): entsprechend sind die multi-isothermen Systeme von  $\infty^1$  Hyperflächen ( $F$ ) als Bild von  $\infty^1$  parallelen Ebenen definiert. Der Pseudo-Winkel zwischen ( $K$ ) und ( $F$ ) ist eine multi-harmonische Funktion. Eine konforme (analytische) Fläche schneidet ein System ( $F$ ) in einem System isothermer Kurven — diese Eigenschaft kennzeichnet sowohl die konformen Flächen, wie auch die Systeme ( $F$ ). M. Barner.

**Kasner, Edward and John DeCicco:** An extensive class of transformations of isothermal families. Univ. nac. Tucumán, Revista. Ser. A 3, 271—282 (1942).

**Kasner, Edward and John DeCicco:** Generalized transformation theory of isothermal families. Univ. nac. Tucumán, Revista. Ser. A 4, 91—104 (1944).

**Kasner, Edward:** Lineal element transformations which preserve the isothermal character. Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 406—409 (1941).

**Kasner, Edward:** Transformation theory of isothermal families and certain related trajectories. Univ. nac. Tucumán, Revista A 2, 17—24 (1941).

**DeCicco, John:** Lineal element transformations which preserve the dual-isothermal character. Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 409—412 (1941).

**Kasner, Edward and John DeCicco:** Generalized transformation theory of isothermal and dual families. Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 52—55 (1942).

Welche Abbildungen eines bestimmten Typus in der Ebene führen alle Familien isothermer Kurven in ebensolche über? a) Unter den Punktabbildungen sind die konformen die einzigen. b) Unter den Linienelementtransformationen treten außerdem die Abbildungen  $U = q(u)$ ,  $V = \psi(r)$ ,  $\Theta = a\theta + h(u) + K(r)$  mit  $u = x + iy$ ,  $v = x - iy$ ,  $\operatorname{tg} \theta = dy/dx$ ,  $a = \text{const}$  auf. Unter den Berührungstransformationen hierunter sind also ebenfalls die konformen Abbildungen die einzigen. c) Ein Feldelement der Ordnung  $n$  ist durch die Größen

$$u, v, \theta, \quad r_x, \quad \frac{\partial^\alpha \theta}{\partial u^\alpha}, \quad s_{x\beta}, \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta} \theta}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}, \quad t_\beta, \quad \frac{\partial^\beta \theta}{\partial v^\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha + \beta \leq n$$

definiert. Abbildungen der reellen Ebene, die die Feldelemente den Linienelementen zuordnen und isothermen Charakter erhalten, sind durch  $U = q(u, r_x, s_{x\beta})$ ,  $V = \psi(v, s_{x\beta}, t_\beta)$ ,  $\Theta = \theta + a(s_{x\beta}) + h(u, r_x, s_{x\beta}) + k(v, s_{x\beta}, t_\beta)$  gegeben. In der komplexen Ebene sind sieben verschiedene Typen zu unterscheiden. Für  $n = 1$  spalten sich die Berührungstransformationen unter den Feldelementtransformationen in neun Typen auf, die desgleichen wie die der reellen Ebene alle angegeben werden. Entsprechende Ergebnisse werden in der äquivalenten Geometrie erzielt. Auch die Abbildungen, die die Isogonaltrajektorien der isothermen Kurvenfamilien erhalten, werden untersucht. M. Barner.

**Kasner, Edward and John DeCicco:** An extension of Lie's theorem on isothermal families. Proc. nat. Acad. Sci. USA 31, 44—50 (1945).

Bei allgemeiner Gestalt des Linienelements einer Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes wird die charakteristische Bedingung dafür abgeleitet, daß eine Kurvenschar der Fläche aus isothermen Kurven besteht. *M. Barner.*

DeCicco, John: New proofs of the theorems of Beltrami and Kasner on linear families. *Bull. Amer. math. Soc.* 49, 407—412 (1943).

Unter den zweiparametrischen Kurvensystemen der Ebene sind ausgezeichnet: „natural-Familien“, „linear-Familien“, „isogonal-systems“, „velocity-systems“,  $I'$ - und  $I'_0$ -Familien (letztere sind das konforme Bild aller Kreise, die einen Kreis senkrecht durchsetzen, bzw. aller Geraden der Ebene). — Vergleich dieser verschiedenen Systeme gibt u. a. Beweise für den Satz von Beltrami, die Abbildung der Geodätischen einer Fläche konstanter Gaußscher Krümmung auf die Geraden der Ebene betreffend, und für den Satz von Kasner, wonach die Isogonaltrajektorien einer Kurvenschar genau dann ein lineares System bilden, wenn die Kurvenschar aus isothermen Kurven besteht. *M. Barner.*

Kasner, Edward: Geometric properties of isothermal families. *Univ. Nac. Litoral, Inst. Mat. Publ.* 5, 10 p. (1943).

Die im vorstehenden Referat genannten Kurvensysteme werden verwendet zur Charakterisierung der isothermen Kurvenfamilien (i. F.). Ferner:  $\frac{d\rho_1}{ds_1} + \frac{d\rho_2}{ds_2} = 0$  ( $\frac{d\rho_1}{ds_1} - \frac{d\rho_2}{ds_2} - \frac{d\rho_3}{ds_3} = 0$ ) kennzeichnet die Scharen eines orthogonalen Kurvennetzes (eines symmetrischen Drei-Gewebes) als i. F. ( $\rho_i$  sind die Krümmungen,  $s_i$  die Bogenlängen der sich in dem betrachteten Punkt treffenden Kurven. Die Kurven der drei Scharen eines symmetrischen Dreigewebes bilden jeweils den Winkel  $3\pi/2$  miteinander.) Der Winkel zwischen den Kurven zweier verschiedener i. F. ist eine harmonische Funktion der Koordinaten. *M. Barner.*

Kasner, Edward and John DeCicco: Geometry of the Fourier heat equation. *Trans. Amer. math. Soc.* 60, 119—132 (1946).

Kasner, Edward and John DeCicco: The Laplace equation. *Science, n. Ser.* 102, 256—257 (1945).

Kasner, Edward and John DeCicco: The Laplace equation in space. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 31, 247—249 (1945).

Es genüge  $\Phi(x, y, z, t)$  der Wärmeleitungsgleichung  $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \Phi_z$ . Die  $\infty^2$  Flächen des euklidischen  $R_3$   $\Phi(x, y, z, t) = c$  ( $t, c$  Parameter) heißen „heat surfaces“ (h. f.). Besteht das System von h. f. aus lauter Ebenen, so entartet es in die Ebenen eines Büschels oder die Schmiegebenen einer Minimalkurve. Besteht das System von h. f. aus lauter Kugeln, so liegen ihre Mittelpunkte auf einer Minimalgerade, oder das System entartet in  $\infty^1$  konzentrische Kugeln. — Diese Aussagen gelten auch im  $R_n$  (für  $n = 2$  vgl. Kasner, dies. Zbl. 4, 414; 6, 221). — Die einzigen Punktabbildungen, die alle Systeme isothermer Hyperflächen in ebensolche überführen, sind die konformen (hier unterscheiden sich die Fälle  $n = 2, n > 2$ ). — Die Charakterisierung der isothermen Familien der Ebene, wonach der Winkel zwischen den Kurven einer isothermen Familie und einem Parallelbüschel von Geraden eine harmonische Funktion ist, ist für  $n > 2$  nicht richtig. *M. Barner.*

Tsuji, Masatsugu: On a theorem of F. and M. Riesz. *Proc. imp. Acad. Tokyo* 18, 172—175 (1942).

$x_i(u, v)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mögen das Gebiet  $D\{u^2 + v^2 < 1\}$  konform auf eine von  $\Gamma$  berandete Minimalfläche  $S$  abbilden ( $\Gamma$  rektifizierbar). Die topologische Abbildung von  $C\{u^2 + v^2 = 1\}$  auf  $\Gamma$  ordnet jeder Nullmenge auf  $C$  eine solche auf  $\Gamma$  und umgekehrt zu. Außerdem ist die Abbildung  $D \rightarrow S$  in fast allen Punkten von  $C$  konform. *Joachim Nitsche.*

Richmond, Herbert W.: On minimal surfaces. *J. London math. Soc.* 19, 229—241 (1944).



Eine Fläche sei in Ebenenkoordinaten durch  $xL + yM + zN = P = F(L, M, N)$  gegeben. Es handelt sich um eine Minimalfläche, falls  $F$  der Laplace'schen Gleichung genügt. Damit läßt sich eine Klassifikation der bekannten Beispiele von Minimalflächen ableiten. Die gewonnene allgemeine Lösung wird mit der Weierstraßschen bzw. Lieschen verglichen. Klassen von Minimalflächen werden angegeben, die das Katenoid und die Ennepersche sowie Hessensbergsche Minimalfläche umfassen.

*Joachim Nitsche.*

**Kasner, Edward and John DeCicco:** A new characteristic property of minimal surfaces. *Bull. Amer. math. Soc.* **51**, 692—699 (1945).

U. a. bewiesener Satz: Außer den Kugeln sind die Minimalflächen die einzigen Flächen, für die es vier verschiedene Richtungen gibt derart, daß die von den Ebenen senkrecht zu einer solchen Richtung ausgeschnittenen Kurvenscharen isotherm sind.

*Joachim Nitsche.*

**Câmpan, Florica:** Surfaces parallèles et semblables. *Disquisitiones math. phys.* **3**, 85—117 (1943).

Gefragt wird nach Flächen, die zugleich parallel und ähnlich sind. Ihre Evolutenflächen müssen wegen der Ähnlichkeit der Ausgangsflächen ähnlich sein, wegen deren Parallelität zusammenfallen, also Ähnlichkeitstransformationen in sich zulassen; es sind also Spiralfächen. Zur Bestimmung der gesuchten Flächen sind die Evoluten von Spiralfächen zu berechnen. Das wird durchgeführt, insbesondere für geradlinige und abwickelbare Spiralfächen.

*H. Gericke.*

**Foster, Malcolm:** Note on autopolar surfaces. *Amer. math. Monthly* **49**, 589—595 (1942).

Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Fläche autopolar bezüglich  $2\zeta = \xi^2 + \eta^2$  ist. Es gibt mindestens einen selbstkonjugierten Punkt. Eigenschaften der Fläche in konjugierten Punktpaaren. Beispiele.

*H. Gericke.*

**Gambier, B.:** Système d'équations aux dérivées partielles d'ordre cinq vérifié par la surface générale de translation. *Bull. Soc. math. France* **71**, 1—19 (1943).

Alle Translationsflächen sind Integralflächen eines Systems von zwei partiellen Differentialgleichungen der Ordnung 5 (im Gegensatz zu einer unbewiesenen Bemerkung von Lie-Scheffers). Diese werden aufgestellt und die Sonderfälle diskutiert, daß eine oder beide der Schiebkurven eben sind.

*H. Gericke.*

**Su, Buchin:** On certain pairs of surfaces in ordinary space. *Bull. Amer. math. Soc.* **49**, 722—729 (1943).

**J. Douglas** (dies. Zbl. **24**, 76—77) hat die Form des Linienelements einer Fläche bestimmt, auf der es eine zweiparametrische Kurvenschar  $J$  mit folgenden Eigenschaften gibt: (1) der Winkellexzeß eines Dreiecks ist proportional der Dreiecksfläche, (2) die Schar  $J$  läßt sich durch eine Punkttransformation in die Geraden der Ebene transformieren. Verf. löst das entsprechende Problem für den Fall, daß an Stelle von (2) gefordert wird, daß  $J$  sich auf die geodätischen Linien einer gegebenen zweiten Fläche transformieren läßt.

*H. Gericke.*

**Pernet, Roger:** La cycloïde de Dupin à déferentes paraboliques. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* **2**, 63—75 (1939).

Zahlreiche geometrische Aussagen über Schnitte, Projektionen, Kreisscharen, einbeschriebene Kugeln usw. der genannten Fläche, für die im einzelnen auf die Arbeit selbst verwiesen werden muß.

*H. Gericke.*

**Bagehi, Haridas:** A note on cycloïdes. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* **4**, 120—124 (1940).

**Robert, P.:** Cycloïques et cycloïdes. *Bull. Soc. math. France* **71**, 198—205 (1943).

Eine anallagmatische Fläche ist die Einhüllende einer veränderlichen Kugel, die orthogonal zu einer festen Kugel ist und deren Mittelpunkt eine feste Fläche, die Deferente, beschreibt. Verf. untersucht den Fall, daß die Deferente eine nicht-abwickelbare Quadrik ist.

*M. Zacharias.*

Thomas, T. Y.: Simplification of a differential equation due to G. Darboux. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 5, 105—112 (1946).

Mit Hilfe der Tensoranalysis leitet Verf. die (Darboux'sche) Gleichung  $\Phi_{\alpha\beta} = (1 - g^{\gamma\delta} \Phi_{\gamma} \Phi_{\delta}) g_{\alpha\beta} K$  dafür her, daß die Fläche  $y^i = \Phi^i(x^1, x^2)$  die gegebene Metrik  $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  besitze ( $K$  Gaußsche Krümmung,  $\Phi_{\alpha\beta}$  kovariante Ableitung).  
Joachim Nitsche.

Vagner, V.: Über das Problem, die invarianten Charakteristiken Liouvillescher Flächen zu bestimmen. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 5, 246—249 (1941) [Russisch].

Jaeger, C. G.: A class of surfaces applicable to the sphere. Amer. math. Monthly 46, 410—416 (1939).

Bouligand, Georges: Sur la théorie des surfaces applicables. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 263—265 (1946).

Bouligand, Georges: Résolution opératoire de problèmes particuliers concernant les surfaces isométriques. Revue sci. 83, 131—144 (1945).

Ist bei der klassischen Methode zur Bestimmung isometrischer Flächen eine Quadratwurzel zu ziehen, so multipliziert man den betreffenden Ausdruck mit  $\epsilon(u, v)$  ( $\epsilon = \pm 1$ ,  $\epsilon$  meßbar). Auf diese Weise kann man Flächen erhalten, die zwar isometrisch, jedoch nicht ineinander durch stetige Verbiegung überführbar sind (allerdings brauchen die Flächen nicht mehr differenzierbar zu sein). — Besondere Betrachtung von Fällen, in denen die Koordinaten  $x^i$  der Flächen sich durch endliche Summen von Ausdrücken  $a(u) \cdot b(v)$  schreiben lassen. Joachim Nitsche.

Bouligand, Georges: Sur les liaisons isométriques. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1195—1197 (1946).

Bouligand, Georges: Sur les liaisons isométriques. Revue sci. 84, 220—223 (1946).

Zwei Kurvenscharen können so aufeinander bezogen sein, daß die von je einer einparametrischen Schar erzeugten Flächen isometrisch sind. Das führt auf quadratische Differentialgleichungen. Unter Berücksichtigung eines anderen Ergebnisses (vgl. vorstehendes Referat) gelingt so in speziellen Fällen die Bestimmung von isometrischen Flächen.  
Joachim Nitsche.

Efimoff, N.: Recherches sur les déformations d'une surface ayant un point d'aplatissement. Mat. Sbornik, n. Ser. 19 (61), 461—480 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Gambier, Bertrand: Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales. Systèmes cycliques. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 23, 249—304 (1944).

Silberstein, Ludwik: Infinitesimal bending of a surface. Philos. Mag., VII. Ser. 34, 549—554 (1943).

Charrueau, André: Sur la déformation infiniment petite des surfaces. Bull. Sci. math., II. Sér. 69, 92—108 (1945).

Die Arbeit von Efimow wurde in den Bericht des Verf. (s. dies. Zbl. 41, 488) einbezogen. — Gambier gibt eine „Synthese“ der über Bonnetsche Flächenpaare und stetige Bonnetsche Deformationen vorliegenden Arbeiten von Hazzidakis, E. Cartan und dem Verf. — Silberstein verwendet für infinitesimale Verbiegungen eine wohl zuerst von Jonas [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 29, 40—74 (1920)] angegebene Methode. Die Anwendungen auf Rotationsflächen, insbesondere die Kugel, liefern bekannte Resultate. Die allgemeinen Formeln für die Kugel hat in etwas anderer Form schon Darboux, Théorie des surfaces IV. Charrueau befaßt sich mit der Erweiterung des Darboux'schen (12-) Flächenkranzes zu einem System von 48 Flächen und zu einer zweiparametrischen Schar von Flächensystemen.  
E. Rembs.

Charrueau, André: Sur la déformation infiniment petite et sur des congruences qui s'y rattachent. C. r. Acad. Sci., Paris **219**, 107—108 (1944).

Gegeben sind zwei Paare von Flächen  $(S, S_1)$  und  $(S', S'_1)$ , die sich jeweils mit orthogonalen Tangenten entsprechen. Zu ihnen werden vier Strahlenkongruenzen  $C, C'_1, C', C_1$  nach folgendem Muster definiert: Durch den festen Punkt  $R(0, 0, -1)$  wird die Parallele zur Flächennormalen  $n'_1$  im Punkte  $P'_1$  von  $S'_1$  gezogen, mit der Ebene  $z = 0$  geschnitten und durch den Schnittpunkt die Parallele zur Flächennormalen  $n$  im korrespondierenden Punkte  $P$  von  $S$  gezeichnet, welche die Kongruenz  $C$  bilden.  $C'_1$  entsteht durch Vertauschen von  $S'_1$  und  $S$ . Es entstehen zwei Darboux'sche Flächenkränze, für welche eine Reihe von Eigenschaften angegeben werden (ohne Beweis). Ist insbesondere  $S$  ein aufrechtes Drehparaboloid und  $S_1$  eine beliebige, ihm durch orthogonale Tangenten entsprechende Fläche, so wird  $S'_1$  eine harmonische Fläche der Form  $z = \Re f(x + iy)$ , und  $C'_1$  wird eine schon von Vincensini [Bull. Sci. math., II. Sér. **68**, 60—72 (1944)] betrachtete Kongruenz.

K. Strubecker.

Vincensini, Paul: Sur la déformation des surfaces. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 630—632 (1946).

Verf. fragt nach Linienkongruenzen folgender Eigenschaft. Die Strahlen  $s$  der Kongruenz liegen in den Tangentenebenen  $\tau$  einer Fläche  $\Phi$ , und ihre Brennpunkte  $F_1, F_2$  geben, mit den Berührungspunkte  $M$  von  $\tau$  verbunden, Tangenten  $t_1, t_2$ , welche die Richtungen  $u_1, u_2$  eines auf  $\Phi$  liegenden invarianten Kurvennetzes  $N$  harmonisch trennen, und zwar auch dann noch, wenn die Fläche  $\Phi$  (unter Mitnahme der Tangentenebenen  $\tau$  und ihrer Strahlen  $s$ ) beliebig verbogen wird. Es wird gezeigt, daß es zwei Typen solcher Kongruenzen gibt. 1) Die Ribaucour'schen Kongruenzen, bei denen die Brennpunkte  $F_1, F_2$  der Strahlen  $s$  auf konjugierten Flächentangenten  $t_1, t_2$  liegen. 2) Eine neue Klasse von Kongruenzen, bei der das Netz  $N$  aus einer einzigen (doppelt zählenden) Schar von Kurven besteht, deren Richtung in  $M$  mit der Tangente  $t_1$  zusammenfällt, wobei der zugehörige Brennpunkt  $F_1$  bei beliebigen Deformationen der Fläche  $\Phi$  in  $\tau$  erhalten bleibt. Diese Eigenschaft ist für den zweiten Typus der fraglichen Kongruenzen kennzeichnend. Es werden noch einige weitere Eigenschaften dieser Kongruenzen angegeben.

K. Strubecker.

Vincensini, Paul: Sur une famille de congruences à angle des plans focaux constant. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér. **6**, 1—6 (1943).

Im Anschluß an eine frühere Note [dies. Zbl. **22**, 167], die allgemeinen Typen von Linienkongruenzen  $\Omega$  gewidmet war, deren Fokalebene mit einander einen festen Winkel  $\omega$  bilden, werden hier geometrisch jene besonderen Linienkongruenzen  $\Omega$  derselben Art untersucht, bei denen eine oder beide Brennflächen in Kurven ausarten. Im ersten Falle werden diese Kongruenzen erzeugt von den Mantellinien eines Loxodromenkegels (Projektion einer Kugelloxodrome aus dem Kugelmittelpunkt  $O$ ), dessen Scheitel  $O$  sich so bewegt, daß die Kegelachse (Verbindung von Nord- und Südpol der Kugel) ständig Tangente der Bahnkurve von  $O$  bleibt. Die zweite Brennfläche der Kongruenz ist die Einhüllende dieser Loxodromenkegel. Beschreibt z. B. der Kegelscheitel  $O$  eine Gerade  $a$  und ist die Bewegung des Kegels eine gewöhnliche Schraubung um  $a$ , so ist die zweite Brennfläche eine pseudosphärische Schraubfläche mit der Schraubachse  $a$ , und die Kongruenz besteht aus allen Tangenten der Meridiantraktizen dieser Fläche. — Sind jedoch beide Brennflächen in (eigentliche) Kurven entartet, so muß der Schnittwinkel  $\omega = \pi/2$  sein, und die Brennkurven sind Paare von Fokalkegelschnitten.

K. Strubecker.

Vincensini, Paul: Sur les congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. **61**, 119—147 (1944).



Die Note befaßt sich eingehend mit den Kongruenzen  $K$  der Berührungsebenen, welche die Paare der Berührungspunkte einer Kugelkongruenz mit der Hüllfläche erzeugen. Diese Berührungsebenenkongruenzen hat zuerst Ribaucour studiert [J. Math. pur. appl., IV. Sér. 7, 5—108, 219—270 (1891)]. Darboux hat sie u. a. für die Theorie der sphärischen Abbildung, Bianchi für Fragen der Verbiegungstheorie benutzt, Drach (C. r. Congr. Soc. Savantes 1925) hat sie bei einer systematischen Untersuchung der durch Verbiegung der Deferentenfläche (Mittenebene der Kugeln) entstehenden Transformationen der Kugelkongruenz studiert. — Es wird zuerst bewiesen, daß jede vorgegebene Linienkongruenz (sogar auf unendlich viele Arten) als Kongruenz der Berührungsebenen einer Kugelkongruenz aufgefaßt werden kann. Daraus folgt die Möglichkeit, (auf unendlich viele Arten) die Gleichungen jeder Linienkongruenz in einer invarianten Form zu schreiben, so wie man nach Weingarten die Gleichungen einer beliebigen Normalenkongruenz invariant schreiben kann. Man erhält diese Gestalt aus den Transformationen der Berührungsebenenkongruenzen in andere mit derselben Deferentenfläche. Man kann von diesen Transformationen verschiedene Anwendungen machen (geometrische Deutung der zweiten kovarianten Ableitung nach dem Bogenelement der Referentenfläche, invariante Gestalt der Gleichung eines Drachsehen Netzes). Besonders eingehend wird der Fall der Ebenenkongruenzen studiert, die Normalenkongruenzen sind und sphärische Deferentenfläche haben. Die Bestimmung der Normalenkongruenzen  $K$  hängt dabei von einer Laplace'schen Differentialgleichung 2. Ordnung ab, die identisch erfüllt ist, wenn eine Kugel Deferente ist. Jede Ebenenkongruenz  $K$  mit einer Kugel als Deferente ist also von selbst eine Normalenkongruenz. Das gilt nicht mehr, wenn die Kugel verbogen wird: man kommt dann zu den Ebenenkongruenzen  $K$  mit einer beliebigen Fläche konstanter positiver Krümmung als Deferente, deren Theorie in engem Zusammenhang steht mit der Transformationstheorie von Hazzidakis für diese Flächen. Verf. studiert dann ausführlich die Theorie der Einhüllenden der Kugeln solcher Ebenenkongruenzen  $K$ , die Normalenkongruenzen sind und beides bleiben, wenn man die Deferentenfläche endlich, stetig oder beliebig verbiegt. Es gibt Kugelkongruenzen aller drei Typen. Der Fall endlicher Verbiegung führt auf Paare assoziierter biegunsgleicher Deferentenflächen, welche dasselbe sphärische Krümmungslinienbild haben wie Kugelbiegeflächen. Im Falle beliebiger Verbiegung hat man Deferenten zu wählen, die Biegeflächen von Drehflächen sind. — Das Problem der Einhüllenden der Kugeln einer Normalenkongruenz  $K$  steht in engem Zusammenhang mit der Theorie der dreifachen Orthogonalsysteme und der Systeme der Kreise, die zu einer Kugel oder einer beliebigen Fläche orthogonal sind.

M. Strubecker.

Vincensini, Paul: Sur une relation entre les congruences isotropes et les congruences d'Appell. Bull. Sci. math., II. Sér. 69, 52—62 (1945).

Reelle isotrope Kongruenzen ( $J$ ) haben zu Brennflächen zwei (konjugiert-komplexe) isotrope Torsen. Appellsche Kongruenzen ( $A$ ) sind Normalenkongruenzen, deren Strahlsymmetrieebenen (Mittenebenen) einen festen Punkt  $O$  einhüllen. — Folgender Schwenkungsprozeß  $(O, \alpha)$  führt isotrope und Appellsche Kongruenzen in gleichartige Kongruenzen über: Man ziehe zu dem Kongruenzstrahl  $g$  durch  $O$  die Parallele  $g_0$  und drehe  $g$  um  $g_0$  durch den Winkel  $\alpha$ . — Bem. des Referenten: Die Gruppe dieser Schwenkungen  $(O, \alpha)$  ist aus der komplexen Geometrie wohlbekannt; sie findet sich schon bei A. Ribaucour [Étude des élassoïdes, Bruxelles Mém. cour. 11 (1880)], bei E. v. Weber [Leipziger Ber. 384—408 (1903)], bei J. Grünwald [Monatsh. Math. Phys. 17, 81—136 (1906)], bei W. Blaschke [Monatsh. Math. Phys. 21, 1—108 (1910) und Vorlesungen über Differentialgeometrie I (3. Aufl., Berlin 1930), S. 296—297.] — Ordnet man jeder isotropen Ebene ihre reelle (orientierte) Gerade  $g$  zu, so entsteht die Gruppe der Schwen-

kungen ( $O, \alpha$ ) einfach als reelles Abbild der Gruppe der zentrischen Ähnlichkeiten vom Zentrum  $O$  und Modul  $e^{i\alpha}$ . Die meisten Ergebnisse der Arbeit lassen sich sehr einfach aus dieser Idee gewinnen. Vor allem ist evident, daß einer isotropen Kongruenz wieder eine solche entspricht. Für die Appellsche Kongruenz gilt dasselbe. Dies folgt z. B. aus der folgenden Definition: Die beiden Brennflächen einer Appellschen Kongruenz haben die Eigenschaft, dem isotropen Kegel des Punktes  $O$  eingeschrieben zu sein. Der Autor wendet seine Ergebnisse insbesondere auf die isotrope Fokalkongruenz eines Kreises an. [Bem. des Ref.: Auch diese Ergebnisse sind aus der komplexen Geometrie wohlbekannt: es handelt sich um bekannte Eigenschaften der sogenannten Speergarben (vgl. W. Blaschke l. c.).] Einleitend gibt Verf. einen einfachen elementargeometrischen Zusammenhang zwischen isotropen und Appellschen Kongruenzen an, durch den man aus der isotropen Fokalkongruenz des Kreises die Appellsche Kongruenz der gemeinsamen Tangenten zweier kongruenter konfokaler Drehparaboloide erhält. Auch der Fall beliebiger Drehparaboloide ist von Interesse. — Schließlich wird im Anschluß an eine Arbeit von Gambier (dies. Zbl. 9, 130) und dem Verf. (dies. Zbl. 9, 130) noch gezeigt, daß eine Kreiskongruenz im Raum dann und nur dann zwei eigentliche Fokalfpunkte auf jedem ihrer Kreise hat, wenn die Kongruenz der Kreisachsen isotrop ist. *K. Strubecker.*

Vincensini, Paul: Sur certains types de congruences appartenant à un complexe linéaire, et sur les suites de Laplace des réseaux quadratiques de Wilczynski de période 4. Bull. Soc. math. France 73, 1—26 (1945).

Die Note stützt sich auf eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 26, 262), in der eine einfache Geraden-Transformation  $T[\tilde{\gamma}(Z)]$  studiert wird, die von einer willkürlichen Funktion des Winkels  $Z$  abhängt und die Eigenschaft hat, jede Normalenkongruenz zu verwandeln 1) in eine Kongruenz mit ebener Mittelfläche  $\omega$ , wenn  $\tilde{\gamma}(Z) = Z$  ist, 2) in eine Kongruenz mit einem festen Punkt  $O$  als Mitteneinhüllende, wenn  $\tilde{\gamma}(Z) = Z^{-1}$  ist, 3) in eine Kongruenz, deren zugeordnete Brennpunkte von einer Geraden  $o$  gleiche Abstände haben, wenn  $\tilde{\gamma}(Z) = Z^{-1} - Z$  ist. Diese drei Typen von Kongruenzen hängen eng miteinander zusammen. Verf. hat schon in einer Note (s. dies. Zbl. 26, 351) jene Kongruenzen der genannten drei Typen studiert, welche linearen Komplexen angehören: dabei wird als Mittenebene  $\omega$  bei 1) eine Ebene normal zur Gewindeachse  $a$ , als Zentralpunkt  $O$  bei 2) einen Punkt von  $a$  und als feste Achse  $o$  bei 3) die Gewindeachse  $a$  gewählt. In vorliegender Arbeit werden diese Einschränkungen fallen gelassen und allgemeine Lagenverhältnisse für  $\omega$ ,  $O$ ,  $o$  vorausgesetzt. Es zeigt sich, daß die Bestimmung der Normalenkongruenzen, deren mittels  $T[\tilde{\gamma}(Z)]$  transformierte Kongruenzen einem linearen Komplex angehören, von einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung abhängt, deren geometrische Deutung einfache Konstruktionen der oben genannten metrischen Sonderfälle liefert. — Es gibt eine Kongruenz des linearen Komplexes, die allen drei Typen gemeinsam ist. Deren Betrachtung liefert den Ausgangspunkt zum metrischen Studium von periodischen Folgen quadratischer Netze von Wilczynski mit der Periode 4. Es gelingt, alle diese Netze rein geometrisch zu bestimmen. Der Wilczynskische Charakter (das Zugehören zu linearen Komplexen) erweist sich dabei als eine Folge des quadratischen Charakters der Netze der Folge. Die vier Netze liegen dabei zu zweien auf derselben Quadrik, und jede der beiden sie tragenden Quadriken ist ihre eigene Polare bezüglich der anderen. Wählt man eine der Quadriken als Kugel  $\kappa$ , so gewinnt man Einblick in jene Kreissysteme, deren Kreise zu einer Kugel orthogonal sind und deren Kreisachsen (zyklische Kongruenzen bildend) in einem linearen Komplex liegen. *K. Strubecker.*

Vincensini, Paul: Congruences arbitrairement déformables avec fixité des points centraux sur les différents rayons. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1326—1328 (1946).

Im Anschluß an vorstehende Note wird nach jenen Kongruenzen gefragt, deren Strahlen  $s$  bei beliebigen Verbiegungen einer Fläche  $\Phi$  und Mitnahme der



Strahlen  $s$  in den Tangentenebenen  $\tau$  von  $\Phi$  Zentralpunkte haben, die auf ihren Strahlen  $s$  festbleiben. Es wird gezeigt, daß man die Fläche  $\Phi$  beliebig wählen darf und daß die Kongruenz eine Ribaucoursche ist (bei der die Brennpunkte  $F_1, F_2$  der Kongruenzstrahlen  $s$  auf konjugierten Tangenten  $t_1, t_2$  von  $\Phi$  liegen): die eine der beiden Kurvenscharen des invarianten Netzes von J. Drach (dessen Tangenten  $u_1, u_2$  die Verbindungslinien  $t_1, t_2$  nach den Brennpunkten harmonisch trennen) besteht aus Geodätischen von  $\Phi$ . Verschiedene Sonderfälle. Anwendungen auf die Kennzeichnung der Biegungsflächen von Drehflächen, von Minimalflächen, von Regelflächen mit isotroper Richtebene, von Quadriken, die den absoluten Kegelschnitt berühren.

K. Strubecker.

Simonart, Fernand: Sur une transformation généralisée de Ribaucour. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **30**, 353—364 (1945).

Durch die brechende Fläche  $\xi(\alpha, \beta)$  mit dem variablen oder konstanten Brechungsexponenten  $r(\alpha, \beta)$  werde die einfallende Strahlenkongruenz  $(C)$  in die ausfallende Kongruenz  $(C')$  gebrochen. Nach Malus ist bei konstantem  $r$  mit  $(C)$  auch  $(C')$  Normalenkongruenz. Dies gilt jedoch allgemeiner dann (und nur dann), wenn  $r(\alpha, \beta)$  für die Strahlen von  $(C)$  allein eine Funktion des Abstandes  $R$  des Brechungspunktes  $\xi(\alpha, \beta)$  von dem Schnittpunkt mit einer Orthogonalfläche  $\tau(\alpha, \beta)$  von  $(C)$  ist. Ist  $r$  konstant und entsprechen sich in den Normalenkongruenzen  $(C)$  und  $(C')$  außerdem noch die abwickelbaren Flächen, so schneiden sie die brechende Fläche  $\xi(\alpha, \beta)$  nach einem konjugierten Netz (Dupin), dem auf den Orthogonalflächen  $\tau(\alpha, \beta)$  und  $\tau'(\alpha, \beta)$  von  $(C)$  und  $(C')$  das Netz der Krümmungslinien entspricht (und umgekehrt). Zwischen den schon erklärten Abständen  $R$  und  $R'$  kann dann die Relation  $R' = -r R$  bestehen; in diesem Falle entsprechen sich die Flächen  $\tau$  und  $\tau'$  in einer verallgemeinerten Ribaucourschen Transformation [weil im Sonderfalle der Spiegelung ( $r = -1$ ) eine gewöhnliche Ribaucoursche Transformation entsteht]. — Verf. löst das Problem, zu einer vorgegebenen Fläche  $\tau$  alle verallgemeinerten Ribaucour-Transformierten  $\tau'$  zu finden. Dafür hatte L. Bianchi im Falle  $r = -1$  eine klassische Lösung gegeben [Lezioni di Geometria Differenziale II (Pisa 1923) I, § 340 ff.]. Verf. löst zuerst das Bianchische Problem auf vereinfachte Art, indem er es auf die Aufgabe zurückführt, eine Fläche aus dem sphärischen Bild ihrer Krümmungslinien zu bestimmen, und zeigt, daß diese Methode auch das verallgemeinerte Problem erledigt.

K. Strubecker.

Mishra, Ratan Shanker: A note on Bianchi congruence. Bull. Calcutta math. Soc. **38**, 141—142; Erratum 207 (1946).

Simonart, Fernand: Sur les congruences pseudosphériques. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. **60**, 202—206 (1946).

Bell, P. O.: Metric properties of a class of quadratic differential forms. Bull. Amer. math. Soc. **51**, 563—571 (1945).

Es handelt sich um die Klasse der quadratischen Differentialformen  $\Omega = (k d_{x\beta} - h_{x\beta}) du^\alpha du^\beta$ , wobei  $d_{x\beta}$  der zweite Fundamentaltensor einer Fläche  $S$  und  $h_{x\beta}$  der erste Fundamentaltensor ihres sphärischen Bildes ist, während  $k = k(u^1, u^2)$  eine beliebige Funktion der Flächenparameter ist. Man kann  $k$  mit der Wahl verschiedener Transversalflächen  $S'$  der Normalenkongruenz von  $S$  koppeln und erhält durch deren Spezialisierung verschiedene Aussagen über  $\Omega$ . Beispiel:  $\Omega$  ist dann und nur dann von der Form  $\Omega = K(u^1, u^2) ds^2$ , wobei  $ds^2 = g_{x\beta} du^\alpha du^\beta$  der metrische Fundamentaltensor von  $S$  ist, wenn  $S'$  die Fläche der mittleren Krümmungszentren von  $S$  ist;  $K(u^1, u^2)$  ist dann die Gaußsche Krümmung von  $S$ .

K. Strubecker.

Springer, C. E.: Rectilinear congruences whose developables intersect a surface in its lines of curvature. Bull. Amer. math. Soc. **51**, 990—996 (1945).

Eine gegebene Fläche  $S$  wird von den Torsen einer Strahlenkongruenz  $C$  nach einem Kurvennetz („Schnittnetz“) geschnitten. Verf. gibt notwendige und



hinreichende Bedingungen dafür an, daß das Schnittnetz auf der Fläche  $\alpha$ ) konjugiert,  $\beta$ ) orthogonal,  $\gamma$ ) konjugiert und orthogonal ist, also aus Krümmungslinien besteht,  $\delta$ ) mit den Asymptotenlinien von  $S$  zusammenfällt. Die Bestimmung von Kongruenzen mit der Eigenschaft  $\gamma$ ) führt auf eine partielle Differentialgleichung des Laplaceschen Typus.

K. Strubecker.

**Wunderlich, Walter:** Zur Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallen. Z. Phys. 122, 86—97 (1944).

Es wird die bei der Reflexion eines monochromatischen Röntgenstrahlbündels an der ebenen Oberfläche eines Einkristalls entstehende Regelfläche  $R$  untersucht, und ihre wichtigsten ebenen Schnitte, die als Diagrammkurven  $q$  auftreten können, werden gekennzeichnet. Ferner wird die Auswertung besonderer Diagrammkurven  $q$  besprochen. Damit werden Untersuchungen von H. Seemann [Ann. der Physik, VI. F. 7, 633 (1930); Z. Phys. 119, 374—396 (1942)] richtiggestellt. Die Regelflächen  $R$  erweisen sich als rationale Flächen 4. Ordnung, erzeugt durch zwei projektive Kegelschnitte, die eine doppelte Leitgerade und einen Doppelkegelschnitt besitzen, und somit der V. Art nach Sturm angehören. Die Doppeltorse besteht aus einem parabolischen Zylinder. Die Flächen  $R$  sind dabei affin zu den Normalflächen eines Drehkegels längs eines seiner ebenen Schnitte.

K. Strubecker.

**Tikhotzky, C.:** La transformation  $K$  des complexes. Mat. Sbornik, n. Ser. 16 (58), 87—100 (1945) [Französisch mit russ. Zusammenfassg.].

In einer älteren Note (dies. Zbl. 22, 262) hat Verf. eine Transformation  $K$  für Linienkongruenzen des Euklidischen Raumes von drei Dimensionen erklärt: hier handelt es sich um deren Verallgemeinerung für Linienkomplexe. Zwei Komplexe  $C$  und  $C'$  hängen dabei durch  $K$ -Transformation zusammen, wenn zwischen ihren Strahlen  $L, L'$  und den von ihnen gebildeten Regelflächen  $R, R'$  eine eindeutige Beziehung folgender Art besteht: man kann zu jedem Strahlenpaare  $L, L'$  eine solche Bewegung von  $C'$  angeben, daß erstens  $L'$  mit  $L$  zur Deckung kommt und zweitens jede Regelfläche  $R'$  durch  $L'$  dabei übergeht in eine Regelfläche  $R''$  (durch  $L$ ), welche längs  $L$  die ( $R'$  korrespondierende) Regelfläche  $R$  berührt. Wegen dieser Berührungseigenschaft heißen die beiden Komplexe  $C$  und  $C'$  nach G. Fubini in Berührung erster Ordnung. Die Transformation  $K$  kann aufgefaßt werden als eine Cartansche Abwicklung der Komplexe  $C$  und  $C'$ , wobei als Operationsgruppe die der räumlichen Ähnlichkeiten zugrunde liegt. Als methodisches Hilfsmittel dient der Cartansche Kalkül der alternierenden Differentialformen, die Methode des begleitenden Hauptdreiecks und das Heranziehen der Unbeweglichkeitsbedingungen. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Komplexe  $K$ -Transformierte voneinander sind, ergibt sich, daß ihre Fundamentalformen von Sannia mit demselben Proportionalitätsfaktor zueinander proportional sind. Die Existenz  $K$ -transformabler Komplexe wird erwiesen, indem das zugehörige Differentialsystem als vollständig integrabel nachgewiesen wird. Ist einer der Komplexe ( $C$ ) gegeben, so hängt der dazu  $K$ -transformable ( $C'$ ) noch von vier willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen ab.

K. Strubecker.

### Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

(1) Calugareanu, Georges et Gh. Th. Gheorghiu: Sur l'interprétation géométrique des invariants différentiels fondamentaux en géométrie affine et projective des courbes planes. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 43, 69—83 (1941).

(2) Santaló, L. A.: A geometrical characterization for the affine differential invariants of a space curve. Bull. Amer. math. Soc. 52, 625—632 (1946).

(3) Maeda, Jusaku: A characteristic property of space curves of constant first affine curvature. Tôhoku math. J. 48, 148—151 (1941).

In (1), (2) wird die geometrische Deutung affiner und projektiver Differentialinvarianten von ebenen und räumlichen Kurven untersucht. In (3) werden die Raumkurven mit konstanter, nichtverschwindender erster Affinkrümmung dadurch charakterisiert, daß sie Fleknodalkurven auf der durch ihre affinen (Winternitzschen) Binormalen erzeugten Regelfläche sind. *W. Süß.*

Kerawala, S. M.: A note on the affine evolute. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 4, 39—40 (1943).

Abramescu, N.: Sur la courbure affine de la développée affine d'une courbe plane. Mathematica, Timișoara 21, 12—18 (1945).

Abramescu, N.: Sur la développée affine d'une courbe plane. Mathematica, Timișoara 22, 69—73 (1946).

Verf. bestimmt ebene Kurven, deren Affinevoluten Kegelschnitte sind.

*W. Süß.*

Sen Gupta, B. K.: On the aberrancy curve. J. Indian math. Soc., n. Ser. 9, 77—79 (1945).

Gheorghiu, Gh. Th.: Sur les courbes de Tzitzéica. Mathematica, Timișoara 19, 97—105 (1943).

Niculescu, Alex: Rationale Tîțeica-Kurven. Pozitiva 1, 56—61, 125—131 (1940) [Rumänisch mit französ. Zusammenfassg.].

Verf. beweist, daß es weder rationale räumliche Kubiken noch unikursale Quartiken gibt, die Tzitzeica-Kurven sind, d. h. Kurven, die mit ihrem kovarianten Krümmungsbild zusammenfallen. *M. Zacharias.*

Hirakawa, Junkô: The relative differential geometry in affine space. Japanese J. Math. 17, 347—400 (1941).

Verf. verknüpft die Blaschkesche Affingeometrie mit der relativen Differentialgeometrie des Ref., indem er ein durch parallele Tangenten aufeinander bezogenes Kurvenpaar  $C, E$  [ $E$  konvex,  $C$  und  $E$  werden dargestellt durch  $\mathfrak{x}(t)$  und  $\mathfrak{c}(t)$ ] im affinen Raum betrachtet und den fundamentalen Begriff der „relativ affinen“ (abgekürzt r. a.) Entfernung  $r(t)$  des Koordinatennullpunkts von  $\mathfrak{x}(t)$  durch folgende Definition einführt:  $r = p/q$ , wobei  $p = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n}/\eta(\mathfrak{x})$  n bzw.  $q = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{n}/\eta(\mathfrak{c})$  n die Affinentfernungen des Nullpunkts von  $\mathfrak{x}(t)$  bzw.  $\mathfrak{c}(t)$  sind [ $\eta(\mathfrak{x})$  und  $\eta(\mathfrak{c})$  sind die Affinnormalen von  $\mathfrak{x}$  und von  $\mathfrak{c}$ ;  $\mathfrak{n}$  ist die gemeinsame gewöhnliche Normale]. Verf. baut zunächst eine relativ affine Theorie von  $C$  bezüglich  $E$  durch folgende Definitionen einer r. a. Bogenlänge  $s$  und eines begleitenden r. a. Zweibeins  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  auf:  $ds/dt = q(dx/dt, d^2x/dt^2)^{1/2}$ ;  $\mathfrak{a} = dx/ds$ ,  $\mathfrak{b} = q^3 d^2x/ds^2$ . Es gelten die Ableitungsgleichungen  $d\mathfrak{a}/ds = \mathfrak{b} q^3$ ,  $d\mathfrak{b}/ds = -k \mathfrak{a}$ , wobei  $k$  die r. a. Krümmung von  $C$  ist. Damit lassen sich kanonische Reihenentwicklungen und natürliche Gleichungen aufstellen, r. a. Kreise [das sind Kurven, von denen der (geeignet gewählte) Nullpunkt eine konstante r. a. Entfernung besitzt] als Kurven konstanter r. a. Krümmung charakterisieren, sowie r. a. Evoluten und Kurven konstanter r. a. Breite definieren. Weiter denkt sich Verf. einer Raumkurve  $C$  eine konvexe Eichfläche  $F$  so zugeordnet, daß jedem Kurvenpunkt ein Punkt auf  $F$  entspricht, dessen Tangentialebene zur affinen rektifizierenden Ebene des Kurvenpunktes parallel ist, und nennt die so entstehende Kurve  $D$  auf  $F$  Eichkurve von  $C$ . Er stellt auf analoge Weise wie im ebenen Fall eine r. a. Theorie von  $C$  bezüglich  $D$  auf und untersucht insbesondere r. a. Bertrandsche Kurvenpaare. Schließlich betrachtet er eine Fläche  $V$ , die auf die konvexe Eichfläche  $F$  durch parallele Tangentialebenen bezogen ist. Sei  $q$  die Affinentfernung  $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{n}(\mathfrak{f})$  n des Nullpunkts von  $F$  [ $\mathfrak{f}$  Ortsvektor von  $F$ ,  $\mathfrak{n}(\mathfrak{f})$  Affinnormale von  $F$ ,  $\mathfrak{n}$  gewöhnliche gemeinsame Normale]. Dann definiert Verf. die r. a. Normale  $\mathfrak{c}$  von  $V$  durch  $\mathfrak{c} = \frac{1}{2} g'^k \mathfrak{a}_{ik}$ , wobei  $g_{ik}$  der affine Fundamentaltensor von  $V$  und  $\mathfrak{a}_{ik} = q(dx^i/du_i)_k = (oq/ou_i)(ox^i/ou_k) = (oq/ou_k)(ox^i/ou_i)$  ist [ $\mathfrak{x}(u^1, u^2) =$  Darstellung von  $V$ ; die kovariante Ableitung  $(ox^i/ou_i)_k$  bezieht sich auf den Tensor  $g_{ik}$ ]. Es gilt Apolarität, d. h.

$r(u^1, u^2)$  und  $c(u^1, u^2)$  besitzen parallele Tangentialebenen: und mit Hilfe von  $c$  läßt sich die übliche Krümmungstheorie entwickeln und dabei insbesondere beweisen, daß bei Flächen  $V$ , die nur aus r. a. Nabelpunkten bestehen, die (entsprechend wie im ebenen Fall definierte) r. a. Entfernung des (geeignet gewählten) Nullpunkts von  $V$  konstant ist.

W. Süß.

Lasley jr., J. W.: On the equations of certain osculants. J. Elisha Mitchell sci. Soc. 61, 548—554 (1945).

Aufstellung der Gleichungen der eindeutig bestimmten  $k$ -parametrischen Schar von Kegelschnitten mit  $(5 - k)$ -punktiger Berührung in einem gegebenen Punkt einer Kurve  $y = f(x)$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

W. Barthel.

Hsiung, Chuan-Chih: Theory of intersection of two plane curves. Bull. Amer. math. Soc. 49, 786—792 (1943).

Hsiung, Chuan-Chih: Projective differential geometry of a pair of plane curves. Duke math. J. 10, 539—546 (1943).

Nel 1° lavoro l'A. considera due curve piane  $C, \bar{C}$  uscenti da un punto  $O$  con tangenti distinte  $t, \bar{t}$ : le coniche aventi contatto del 3° ordine con  $C$  in  $O$  formano fascio e rispetto ad esse  $\bar{t}$  ha un polo fisso  $O_1$ ; analogamente si introduce  $O_2$ , scambiando  $C$  con  $\bar{C}$  e  $t$  con  $\bar{t}$ . L'A. riferendosi al triangolo fondamentale  $OO_1O_2$  e a un conveniente punto unità determina mediante sviluppi locali i due invarianti proiettivi della coppia di elementi del 4° ordine di centro  $O$ . Nel 2° lavoro si svolge analoga ricerca considerando invece due elementi curvilinei con tangente comune e centri distinti.

P. Buzano.

Pascali, Justo: Projektive Erzeugung von  $W$ -Kurven. Univ. nac. Litoral. Inst. mat., Publ. 6, 25—39 (1946) [Spanisch].

Gegeben sind ein Dreieck  $XYZ$  und ein Punkt  $P$  seiner Ebene. Verf. bestimmt die Kurve, die  $P$  durchlaufen muß, damit die Schnittpunkte von  $XY$  mit  $ZP$  und mit der Tangente der Kurve in  $P$  projektive Punktreihen durchlaufen. Er betrachtet die Fälle, daß (1)  $X$  und  $Y$  reell und verschieden, (2) reell zusammenfallend und (3) die Kreispunkte sind. Sodann ersetzt er die Tangente durch die Normale in  $P$ .

M. Zacharias.

Fon, Te-Chih: Some new geometrical significances of the projective curvatures and the curvature form of a space curve. J. Chinese math. Soc. 2, 193—197 (1940).

Arghiriade, E.: Sur les cônes quadratiques osculateurs d'une courbe gauche. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 42, Nr. 2, 3—8 (1940).

Les seules courbes ayant en chaque point un cône quadratique osculateur 8-points, dont le sommet décrit une droite, sont les spirales biaxiales (ce Zbl. 19, 43). La sextique de Lane d'une telle courbe est tangente à la droite. On détermine toutes les courbes dont la sextique de Lane est tangente à une droite.

M. Haimovici.

(1) Hsiung, Chuan-Chih: An invariant of intersection of two surfaces. Bull. Amer. math. Soc. 49, 877—880 (1943).

(2) Hsiung, Chuan-Chih: Projective invariants of intersection of certain pairs of surfaces. Bull. Amer. math. Soc. 50, 437—441 (1944).

(3) Su, Buchin: A new invariant of intersection. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 4, 321—327 (1944).

Nel 1° lavoro si considerano due superficie  $S_1, S_2$ , aventi in comune un punto  $O$  con piani tangenti distinti, la cui intersezione  $t$  sia inoltre distinta dalle tangenti asintotiche in  $O$ . Siano  $K_1$  e  $K_2$  le curvature totali di  $S_1$  e  $S_2$  in  $O$  e siano  $R_1$  e  $R_2$  i raggi di curvatura in  $O$  delle curve in cui il piano tangente a ciascuna delle due superficie  $S_2, S_1$  sega la rimanente: si dimostra che  $R_2^4 K_2 R_1^4 K_1$  è un invariante proiettivo (dipendente dagli elementi del 2° ordine) e se ne dà un'interpretazione come birapporto di 4 piani. Nel 2° lavoro si esaminano i casi, precedentemente



esclusi, in cui qualcuna delle tangenti asintotiche di  $S_1, S_2$  coincide con  $l$ . Nel lavoro di Su si estende il 1° risultato di Hsiung al caso di due ipersuperficie di  $S_n$ .

*P. Buzano.*

Hsiung, Chuan-Chih: Projective invariants of a pair of surfaces. Duke math. J. 10, 717—720 (1943).

Hsiung, Chuan-Chih: A projective invariant of a certain pair of surfaces. Duke math. J. 12, 441—443 (1945).

Hsiung, Chuan-Chih: Some invariants of certain pairs of hypersurfaces. Bull. Amer. math. Soc. 51, 572—582 (1945).

La determinazione dell'invariante proiettivo di due calotte ordinarie nell'ipotesi che i piani tangenti fossero distinti e si intersecassero secondo la congiungente dei centri era stata fatta da Buzano (questo Zbl. 11, 224) e Bompiani (questo Zbl. 12, 276); ora l'A. considera il caso dei piani tangenti coincidenti e dimostra l'esistenza di un invariante proiettivo, di cui nel 2° lavoro dà un significato metrico per mezzo delle curvature totali delle due calotte e delle loro curvature normali nella direzione della tangente comune. Nel 3° lavoro si generalizzano i risultati precedenti nel caso di due elementi di ipersuperficie di uno  $S_n$ : se i piani tangenti coincidono si ritrova un unico invariante; se invece sono distinti e si segano secondo la congiungente i centri vi sono due invarianti, uno dei quali però si riduce all'unità per  $n = 3$ .

*P. Buzano.*

Hsiung, Chuan-Chih: Some invariants of certain pairs of hypersurfaces. Sci. Record 1, 332—336 (1945).

Wilkins jr., J. Ernest: The contact of a cubic surface with a ruled surface. Amer. J. Math. 67, 71—82 (1945).

Nach E. P. Lane [Trans. Amer. math. Soc. 29, 471—480 (1927)] gibt es zu einer (analytischen) Fläche  $S$  des projektiven  $R_3$  (die keine Regelfläche ist) eine vierparametrische Schar von kubischen Flächen, die sie in einem ihrer Punkte von vierter Ordnung berühren. In einem Punkte einer Fläche dritter Ordnung (die nicht Regelfläche ist) existiert sogar noch eine einparametrische Schar von fünfter Ordnung berührender kubischer Flächen. Verf. beweist: 1) In einem allgemeinen Punkt einer abwickelbaren Fläche  $S$  (die keine Ebene und kein Kegel ist) gibt es eine dreiparametrische Schar von kubischen Flächen, die sie von fünfter Ordnung berühren, ferner eine einzige kubische Fläche, die von sechster Ordnung, und keine, die von siebenter Ordnung berührt. — 2) Ist  $S$  eine nichtabwickelbare Regelfläche, so gibt es eine einparametrische Schar kubischer Flächen, die von fünfter Ordnung berühren. Nur bei den kubischen Regelflächen  $S_3$  gibt es von sechster Ordnung berührende Flächen, nämlich die Flächen  $S_3$  selbst. (Vgl. dazu dies. Zbl. 35, 376.)

*K. Strubecker.*

Abramescu, N.: Sur la relation entre les quadriques de Moutard et les sections d'une surface par de plans menés par une droite passant par un point de la surface. Mathematica, Timişoara 19, 16—18 (1942).

L'A. determina l'equazione della superficie di 9° ordine luogo delle coniche osculatrici in  $O$  alle sezioni piane di una superficie con piani di un fascio passanti per  $O$ : se l'asse del fascio è una tangente (non asintotica) alla superficie, il luogo si riduce a una quadrica di Moutard.

*P. Buzano.*

Hsiung, Chuan-Chih: Contributions to the projective differential geometry of a surface. Sci. Record 1, 62—65 (1942).

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind in der nachstehend besprochenen Arbeit veröffentlicht.

Hsiung, Chuan-Chih: Asymptotic ruled surfaces. Duke math. J. 10, 217—237 (1943).

Si consideri una superficie  $S$  descritta dal punto  $M(u, v)$ , essendo  $u, v$  coordinate asintotiche e  $\{M, M_1, M_2, M_3\}$  il tetraedro normale di Cartan. Se  $\Sigma_u = \Sigma_v$

sono le due rigate asintotiche relative al punto  $M$  di  $S$ , le sezioni di  $\Sigma_u$  con piani per  $M$   $M_1$  o per  $M_2$   $M_3$  hanno un punto di inflessione rispettivamente in  $M$  o in  $M_2$ ; analogamente per le sezioni di  $\Sigma_v$  con piani per  $M$   $M_2$  o per  $M$ ,  $M_3$ . Facendo uso dei punti di Bompiani [Boll. Un. mat. Ital., I. Ser. 5, 118—120 (1926)] rappresentanti l'intorno del 4° ordine di dette sezioni piane, l'A. perviene alla costruzione di due successioni di quadriche covarianti relative al punto  $M$  di  $S$ . Passa poi alla considerazione delle quadriche di Moutard di  $\Sigma_u$  e  $\Sigma_v$ , relative a una tangente  $t$  (non asintotica) ad  $S$  in  $M$  e per mezzo di esse ricostruisce vari enti proiettivi covarianti di  $S$ . Considera infine le sezioni di  $\Sigma_u$  e  $\Sigma_v$  con uno stesso piano per  $M$ : esse risultano avere un contatto del 3° ordine solo se il piano passa per una tangente di Segre, nel qual caso vi è un piano per cui l'ordine di contatto raggiunge il valore 4 e i tre piani siffatti si segano nel 1° asse di Bompiani.

*P. Buzano.*

**Hsiung, Chuan-Chih:** Plane sections of certain ruled surfaces associated with a curved surface. *Duke math. J.* 11, 59—64 (1944).

Dettagliato studio di generiche sezioni piane delle due rigate generate dalle tangenti asintotiche a una superficie nei punti di una sua curva. *P. Buzano.*

**Pa, Chen-Kuo:** An analogue of Darboux pencil of quadrics. *Sci. Record* 1, 65—69 (1942).

**Chang, Su-Cheng:** Some theorems on ruled surfaces. *Sci. Record* 1, 75—77 (1942).

L'A. dimostra che le successioni di quadriche associate alle due rigate asintotiche di una superficie coincidono con quelle di Godeaux (1927). *P. Buzano.*

**Chang, Su-Cheng:** On the quadric of Lie. *Bull. Amer. math. Soc.* 49, 257—261 (1943).

L'A. determina le caratteristiche delle quadriche di Lie relative ai punti di una linea di una data superficie: trova che esiste sulla superficie una famiglia  $\infty^1$  di linee per cui la caratteristica è spezzata in due coniche e prova che queste sono costruibili per mezzo della quadrica di Lie e del quadrilatero di Demoulin.

*P. Buzano.*

**Chang, Su-Cheng:** On the surfaces of coincidence. *Bull. Amer. math. Soc.* 49, 900—903 (1943).

L'A. servendosi dei procedimenti di Godeaux (questo Zbl. 9, 227) dimostra che per ogni punto  $M$  di una superficie vi sono 6 quadriche osculatrici ciascuna delle quali contiene 4 tangenti asintotiche di uno stesso sistema in punti consecutivi di una curva uscente da  $M$ : solo se la superficie è di coincidenza ciascuna di dette quadriche risulta osculatrice di una rigata asintotica lungo una curva di Darboux.

*P. Buzano.*

**Chang, Su-Cheng:** A generalization of quadrics of Moutard. *Sci. Record* 1, 337—340 (1945).

**Su, Buchin:** Osculating conics of the plane sections through a point of a surface. *Amer. J. Math.* 65, 439—449 (1943).

Siano  $t_1, t_2$  due tangenti generiche uscenti da un punto  $O$  di una superficie  $S$ : a ogni piano  $\pi_1$  scelto ad arbitrio per  $t_1$  risulta associato un piano  $\pi_2$  per  $t_2$  di guisa che resti determinata una quadrica  $Q$  contenente le tangenti asintotiche in  $O$  e le coniche osculatrici alle sezioni di  $S$  con  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .  $Q$  contiene una terza conica osculatrice in  $O$  e varia in un fascio quando  $\pi_1$  ruota attorno a  $t_1$ : ne segue la caratterizzazione di vari enti covarianti.

*P. Buzano.*

**Su, Buchin:** The characteristics of asymptotic osculating quadrics of a curve on a surface. *Bull. Amer. math. Soc.* 49, 904—912 (1943).

L'A. ritrova le equazioni delle quadriche osculatrici asintotiche  $Q_u$  e  $Q_v$  di un curva  $C$  sopra una superficie  $S$  e determina l'intersezione delle quadriche  $Q_u$

(o  $Q_v$ ) relative a due punti consecutivi di  $C$ : essa è costituita dalla tangente asintotica  $u$  (o  $v$ ) contata due volte e da due altre rette (incidenti a quella) che si chiamano le caratteristiche di  $Q_u$  (o  $Q_v$ ). Per mezzo di dette quadriche si costruisce una coppia di rette covarianti (analoghe alle direttrici di Sullivan) e una coppia associata di coni di 3° classe.

*P. Buzano.*

Su, Buchin: Moutard-Čech hyperquadrics associated with a point of a hypersurface. *Ann. of Math.*, II. Ser. **44**, 7—20 (1943).

Su, Buchin: Plane sections through an ordinary point of a hypersurface. *Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A* **4**, 329—362 (1944).

Il 1° lavoro contiene un'estensione alle ipersuperficie della nozione di fascio di Moutard relativo alle superficie ordinarie. Tali risultati vengono completati nel 2° lavoro che tratta dei seguenti argomenti: fasci di iperquadriche di Moutard-Čech; iperconi proiettivamente connessi con un'ipersuperficie; generalizzazioni del cono di Kubota; sezioni piane di un'ipersuperficie per una tangente asintotica.

*P. Buzano.*

Su, Buchin: A theorem on surfaces. *Sci. Record* **1**, 277—282 (1945).

L'A. dimostra che se tutte le quadriche di Lie associate ai punti di una superficie segano una quadrica fissa secondo quadrilateri, le asintotiche della superficie appartengono a complessi lineari.

*P. Buzano.*

Su, Buchin: On the surfaces whose Wilczynski quadrics all touch a fixed plane. *Univ. nac. Tucumán, Revista A* **5**, 363—373 (1946).

Le superficie considerate sono quelle per cui la trasformazione di Laplace che ordinariamente associa le due reti piane descritte dalle intersezioni di ciascuna coppia di tangenti asintotiche col piano fisso è un'applicabilità proiettiva.

*P. Buzano.*

Green, L.: The axial quadrics of a surface. *Duke math. J.* **10**, 557—564 (1943).

Una quadrica  $Q$  avente contatto del 2° ordine con una superficie  $S$  in un punto  $O$  sega  $S$  secondo una curva  $C$  avente un punto triplo in  $O$ : se i tre piani osculatori a  $C$  in  $O$  passano per una retta  $l$ , la quadrica  $Q$  si dice assiale e  $l$  ne è l'asse. L'A. considera le quadriche di Davis e le quadriche osculatrici asintotiche che sono pure assiali e dimostra che una retta assegnata per  $O$  è generalmente asse di 4 quadriche che possono ridursi eccezionalmente a due o una.

*P. Buzano.*

Wu, George: Systems of quadrics associated with a point of a surface. **I, II.** *Duke math. J.* **10**, 499—513, 515—530 (1943).

Partendo dalla definizione delle quadriche delle corde asintotiche, osculatrici a una curva di una superficie in un suo punto [cfr. E. Bompiani. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VI. Ser. **9**, 288—294 (1929)], l'A. sostituisce in essa alle quadriche osculatrici delle rigate delle corde asintotiche le quadriche di Moutard relative alle rigate medesime e se ne vale per dare una nuova costruzione del fascio di Darboux, della corrispondenza di Moutard e di vari enti collegati col fascio canonico.

*P. Buzano.*

Grove, V. G.: The transformation of Čech. *Bull. Amer. math. Soc.* **50**, 231—234 (1944).

MacQueen, M. L.: Conjugal quadrics and the quadric of Moutard. *Amer. J. Math.* **68**, 161—172 (1946).

Nel 1° lavoro, assegnato su una superficie  $S$  dello spazio ordinario un doppio sistema coniugato  $N$ , l'A. considera in ogni punto  $x$  di  $S$  un sistema  $\infty^2$  di quadriche (conjugal quadrics) associate ad  $N$ , ciascuna delle quali è caratterizzata dall'avere un contatto del 2° ordine con  $S$  in  $x$ , essendo inoltre polari rispetto ad essa rette canoniche dei due tipi: la corrispondenza fra un punto di una tangente a una curva di  $N$  (per  $x$ ) e il relativo piano polare rispetto a dette quadriche dà luogo alla trasformazione di Čech. Nel 2° lavoro si considera l'intersezione di una quadrica



del suddetto sistema  $\infty^2$  con la quadrica di Moutard relativa alla direzione  $\lambda$  del doppio sistema coniugato: essa consiste nella coppia di tangenti asintotiche per  $x$  e in una conica situata in un piano per  $x$ . L'intero lavoro è dedicato alla determinazione dell'involuppo di detto piano al variare di  $\lambda$ : esso risulta essere un cono di 6<sup>a</sup> classe di cui vengono studiate le polari e messe in relazione con varie rette canoniche. Precedenti risultati di Chang (questo Zbl. 60, 370) rientrano nei suddetti come casi particolari.

*P. Buzano.*

Grove, V. G.: Quadrics associated with a curve on a surface. Bull. Amer. math. Soc. 51, 281—287 (1945).

In un punto  $x$  di una superficie  $S$  e in relazione con una curva per esso l'A. introduce una famiglia di quadriche la quale contiene i più noti sistemi di quadriche associate a un punto di una superficie, comprese quelle dello stesso Grove e di Wu (v. le due precedenti recensioni) e ne dà una caratterizzazione entro la totalità delle quadriche aventi contatto del 2° ordine con  $S$  in  $x$ .

*P. Buzano.*

Wilkins jr., J. Ernest: The first canonical pencil. Duke math. J. 10, 173—178 (1943).

MacQueen, M. L.: The extremals of two invariant integrals. Bull. Amer. math. Soc. 50, 503—508 (1944).

Nel 1° lavoro si estendono alle estremali degli integrali  $\int \beta^n \gamma^{n-1} \rho^{1/2-3n} du$ ,  $\int \gamma^n \beta^{1-n} \rho^{1/2-3n-1} du$  i risultati ottenuti da Rasmussen per  $n=1$  (questo Zbl. 22, 262). Nel 2° si studiano le ipergeodetiche estremali di integrali invarianti del tutto analoghi ai precedenti.

*P. Buzano.*

Wilkins jr., J. Ernest: A special class of surfaces in projective differential geometry. Duke math. J. 10, 667—675 (1943).

Wilkins jr., J. Ernest: A special class of surfaces in projective differential geometry. II. Duke math. J. 12, 397—408 (1945).

Vengono prese in esame le superficie che soddisfano all'equazione  $[(\beta \gamma^2)^{1/3}]_u = [(\beta^2 \gamma^{1/3})_v]$ : di esse si danno nove differenti caratterizzazioni, costruendo poi esempi non banali di soluzioni. Nella 2<sup>a</sup> parte si mettono in relazione dette superficie con enti introdotti più recentemente quali le quadriche di Grove (questo Zbl. 60, 371) e le quadriche di Wu (questo Zbl. 60, 371).

*P. Buzano.*

Bell, P. O.: New systems of hypergeodesics defined on a surface. Bull. Amer. math. Soc. 49, 575—580 (1943).

Si consideri una superficie  $y(u, v)$ , riferita alle asintotiche e il cui sistema di equazioni a derivate parziali sia ridotto alla forma di Wilczynski. Si associno al punto  $y$  i due punti  $\varrho = y_u - \beta y$ ,  $\sigma = y_v - \alpha y$ , essendo  $\alpha, \beta$  funzioni analitiche arbitrarie di  $u, v$  e si faccia poi descrivere al punto  $y$  una linea  $C$  sulla superficie: la retta  $(y, y_u)$  genera una rigata e se la linea descritta su di essa dal punto  $\varrho$  risulta essere un'asintotica, la curva  $C$  viene chiamata  $\varrho$ -tangeodetica: analogamente si definisce una  $\sigma$ -tangeodetica. Le tangeodetiche sono ipergeodetiche, però non del tipo più generale in quanto i piani osculatori ad es. alle  $\varrho$ -tangeodetiche uscenti da un punto assegnato involuppano un cono quadrico anzichè un cono di 3<sup>a</sup> classe, come d'ordinario. Per mezzo delle tangeodetiche l'A. dà nuove caratterizzazioni degli spigoli di Green, delle direttrici di Wilczynski e della normale proiettiva.

*P. Buzano.*

MacQueen, M. L.: A note on hypergeodesics and canonical lines. Bull. Amer. math. Soc. 51, 400—404 (1945).

In ogni punto  $P$  di una superficie  $S$  si consideri il piano  $\pi(k)$  coniugato armonico del piano tangente ad  $S$  rispetto ai due piani focali di una retta canonica di 2<sup>a</sup> specie  $l_2(k)$  (determinata dalla coordinata  $k$  entro il relativo fascio). Le linee di  $S$  tali che in ogni loro punto le due quadriche osculatrici asintotiche risultino tangenti a  $\pi(k)$  sono ipergeodetiche: i piani osculatori a dette linee per un punto  $P$  di  $S$

involuppano un cono quadrico che si può utilizzare per la costruzione di rette canoniche di 1<sup>a</sup> specie a partire da quelle di 2<sup>a</sup> specie. *P. Buzano.*

Grove, V. G.: The transformation  $T$  of congruences. Ann. of Math., II. Ser. 43, 623—633 (1942).

Die Problemstellung der Note und die Ergebnisse des Autors sind in dem Referat der späteren Arbeit von F. Marcus (dies. Zbl. 44, 365) dargestellt, ebenso die von F. Marcus stammenden Berichtigungen der obigen Note.

*K. Strubecker.*

Godeaux, Lucien: Sur certaines congruences de Goursat. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 11, 328—331 (1942).

Nach G. Tzitzeica [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 7, 189—208 (1928) = Œuvres I (Bukarest 1911) p. 407—427] kann man vier aufeinanderfolgenden Punkten  $y_1, y, z, z_2$  einer Laplaceschen Kette zwei Quadriken zuordnen, die dann und nur dann zusammenfallen, wenn die Geraden  $[yz]$  eine Goursatsche Kongruenz bilden. Ähnlich wird hier gezeigt, daß man diesen Punkten zwei Raumkubiken zuordnen kann, die auf den Tzitzeicaschen Quadriken liegen und die dann und nur dann auf derselben Quadrik liegen, wenn diese Tzitzeicaschen Quadriken zusammenfallen, d. h. wenn die Geraden  $[yz]$  eine Goursatsche Kongruenz bilden. Die beiden Kubiken fallen insbesondere zusammen, wenn die Laplacesche Kette mit den Punkten  $y_2, z_2$  endet.

*K. Strubecker.*

Rozet, O.: Note sur les congruences de droites. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 11, 338—343 (1942).

Im Anschluß an eine frühere Note (s. dies. Zbl. 13, 280) behandelt Verf. ein Strahlensystem  $j(u, v)$  des projektiven  $R_3$ , das kein  $W$ -System ist und dessen Parameterflächen  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$  auf der einen (nichtabwickelbaren) Brennfläche  $(x)$  nach Asymptotenlinien berühren. Bei Deutung des Linienraumes auf der Kleinschen quadratischen Hyperfläche  $Q_2$  des  $R_5$  entspricht dem Strahlensystem  $j(u, v)$  eine Fläche  $J(u, v)$  auf  $Q_2$ , und den beiden Schmiegtangentsystemen des Brennmantels  $(x)$  entsprechen zwei Flächen  $U, V$ , wobei die Punkte  $J$  auf den Geraden  $[UV]$  liegen und die Kongruenz der Geraden  $[UV]$  die Flächen  $U, V$  als Brennflächen hat. Die Parameterlinien der Fläche  $J(u, v)$  bilden dabei nach B. Segre [Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. Ser. 20, 1—46 (1928)] einen hyperbolischen Rost (grille). Man kann dann auf  $J(u, v)$  bezüglich der Parameterlinien Laplacesche Transformierte zweiter Art  $J_1(u, v)$ ,  $J_{-1}(u, v)$  erklären, die je nach dem Verhalten gewisser Invarianten Punkte, Kurven oder Flächen sind und deren Eigenschaften die geometrische Deutung mehrerer Invarianten von  $J(u, v)$  ermöglicht.

*K. Strubecker.*

Rozet, O.: Sur les grilles hyperboliques. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 11, 432—436 (1942).

Die Überlegungen der vorstehenden Note werden auf  $r = 5$  Dimensionen verallgemeinert.

*K. Strubecker.*

Gheorghiu, Gh. Th.: Sur certaines transformations asymptotiques. Disquisitiones math. phys. 4, 131—173 (1945).

Zwei Flächen  $S, S'$ , deren Asymptotenlinien Parameterlinien sind, heißen asymptotisch transformierte, wenn sie so aufeinander bezogen sind, daß sich die Asymptotenlinien entsprechen. Eine solche Beziehung besteht bekanntlich zwischen den beiden Brennflächen einer  $W$ -Kongruenz, wenn man die Brennpunkte  $M, M'$  der Kongruenzstrahlen einander zuordnet. Jeder der Punkte  $M$  und  $M'$  der Brennflächen  $S$  und  $S'$  liegt dann in der Tangentenebene  $T, T'$  der anderen. — Verf. sucht diesen Zusammenhang dadurch zu verallgemeinern, daß er an die Stelle der Tangentenebenen in entsprechenden Punkten  $M, M'$  der beiden asymptotisch transformierten Flächen  $S, S'$  Darbouxsche Quadriken  $Q, Q'$  setzt, also das Problem stellt: Gegeben sei als Ort der Punkte  $M$  eine Fläche  $S$ ;

man suche auf der Darboux'schen Quadrik  $Q$  von  $S$  in  $M$  Punkte  $M'$ , deren Ort eine Fläche  $S'$  mit der Eigenschaft ist, daß die Darboux'schen Quadriken  $Q'$  von  $S'$  in  $M'$  stets die Punkte  $M$  enthalte. Um Vertauschbarkeit zu erreichen, müssen die Definitionsparameter der Darboux'schen Quadriken  $Q$ ,  $Q'$  gleich sein. Von den möglichen Ansatzpunkten 1) zu dem projektiven Linienelement von  $S$  jenes von  $S'$  so zu bestimmen, daß die beiden Flächen derselben Klasse angehören, 2) die Verbindungskongruenz der Punkte  $M$ ,  $M'$  problemgerecht einzurichten, bevorzugt der Autor den ersten. Als äquivalente Darboux'sche Quadriken können dabei insbesondere jene von Lie, Bompiani-Wilczynski und Fubini gewählt werden. Als Sonderfälle werden jene genauer untersucht, wo sich die Schmieg-tangenten entsprechender Punkte bei Vertauschung der Scharen stets schneiden oder die Lie-Quadriken in entsprechenden Punkten identisch sind [L. Godeaux, La théorie des surfaces et l'espace réglé (Actualités sci. ind., Nr. 138), Paris 1934; dies. Zbl. 9, 227]. Als Sonderfälle treten weitere Flächen auf, deren Asymptotenlinien beider Scharen in linearen Komplexen liegen. *K. Strubecker.*

**Rozet, O.:** Sur les complexes de droites dont un foyer inflexionnel décrit une surface non réglée. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 10, 296—300 (1941).

Auf jeder der  $\infty^3$  Geraden  $p = p(u, v, w)$  eines Linienkomplexes  $(p)$  des projektiven  $R_3$  gibt es nach G. Koenigs (Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé, Thèse, Paris 1882) im allgemeinen vier Inflexionspunkte, deren Komplexkegel  $p$  als Wendeerzeugende besitzen. In der Regel hängen diese vier Inflexionspunkte von allen drei Parametern  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ab. Verf. untersucht im Anschluß an P. Mentré [Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 16, 1404—1411 (1930)] den Sonderfall, daß einer der Inflexionspunkte  $x$  nur von zwei Parametern  $u$ ,  $v$  abhängt. Die Punkte  $x = x(u, v)$  bilden dann bloß eine Fläche, und sie sind die Scheitel von  $\infty^2$  Strahlbündeln, die den Komplex  $(p)$  erzeugen. Von besonderem Interesse sind dabei die Kongruenz  $[p]$  jener Komplexstrahlen  $p$ , welche die Fläche  $x(u, v)$  berühren, und die Hüllfläche der  $\infty^2$  Büschelebenen. Methodisch schließt die Arbeit an das Büchlein von L. Godeaux (dies. Zbl. 9, 227) an.

*K. Strubecker.*

**Rozet, O.:** Sur les complexes de droites formés par les génératrices rectilignes des quadriques de Lie d'une surface. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 10, 379—381 (1941).

Beschreibt der Punkt  $x$  eine Fläche  $(x)$ , so erzeugt jede Regelschar seiner Lie-Quadrik einen Linienkomplex  $(p_1)$ , dessen Strahlen  $p_1$  nach G. Koenigs je vier Inflexionspunkte tragen, für welche  $p_1$  Wendeerzeugende des Komplexkegels ist. Diese Inflexionspunkte sind verschieden, wenn eine gewisse Invariante  $h_1$  der auf Asymptotenparameter bezogenen Fläche  $(x)$  nicht verschwindet. — Eine einfache Schar  $(\gamma)$  linearer Komplexe  $\gamma$  erzeugt durch die  $\infty^1$  Schnittnetze  $N$  benachbarter Komplexe  $\gamma$  einen Strahlkomplex  $P$ , auf dessen Strahlen die Inflexionspunkte in zwei Paaren zusammengefallen sind und jeweils auf den beiden Leitgeraden  $s_1$ ,  $s_2$  der Schnittnetze  $N$  liegen, die ihrerseits zwei Regelflächen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  beschreiben. Die Komplexe  $\gamma$  sind Schmiegkomplexe einer  $W$ -Kongruenz mit den Brennflächen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . — Wenn die Invariante  $h_1 = 0$  ist, so ist der Komplex  $(p_1)$  ein spezieller Komplex  $P$ ; er wird dann eingehüllt von solchen linearen Komplexen  $\gamma$ , welche die eine Schar  $u$  der Asymptotenlinien einer Fläche  $(x)$  enthalten. Nach L. Godeaux [Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 17, 730—739 (1931)] bilden dann die Regelflächen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  zusammen mit der Fläche  $(x)$  die Einhüllende der Lie-Quadriken von  $(x)$ .

*K. Strubecker.*

**Rozet, O.:** Sur certains systèmes-points de Guichard et sur certains complexes de droites. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 10, 612—622 (1941).

Ausgehend von einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 11, 79) und der von C. Guichard [Systèmes triplement indéterminés (Collection Scientia, Nr. 25), Paris 1905] untersucht Verf. solche dreidimensionale Guichardsche Mannigfaltigkeiten  $G_3$  des



linearen  $R_5$ , die neben drei Guichardschen Differentialgleichungen noch einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen. Diese vier partiellen Differentialgleichungen, deren wichtigste Integrabilitätsbedingungen aufgestellt werden, sind so beschaffen, daß ihre Parameterlinien  $u, v, w = \text{const}$  mit den Hauptlinien der  $G_3$  zusammenfallen. Auch die Asymptotenlinien von  $G_3$  lassen sich leicht kennzeichnen. Bezüglich der drei Guichardschen Differentialgleichungen gehören zu  $G_3$  sechs Laplace-Transformierte im Sinne von Darboux. Die Guichardsche  $g_3$  kann in  $R_5$  speziell Kleinsches Bild eines Linienkomplexes  $g_3$  des  $R_3$  sein, wenn ihre Koordinaten auch noch der Plückerschen Relation genügen. Das führt zu neuen Differentialgleichungen. Den Parameterflächen  $u = \text{const}$  von  $G_3$  usw. entsprechen dann in  $R_3$  W-Kongruenzen von  $g_3$ , und den Hauptlinien auf  $G_3$  entsprechen Haupt(regel)flächen von  $g_3$ . Verf. untersucht insbesondere den Fall, daß diese Hauptflächen Reguli sind, und schließt mit zwei Beispielen.

*K. Strubecker.*

Carpenter, A. F.: Complexes invariant under reciprocal polar transformations. Univ. Washington Publ. Math. 2, Nr. 3, 29—32 (1940).

Rangachariar, V.: On the three conicoids of a tangential system which pass through a point. Math. Student 7, 97—100 (1939).

Purcell, Edwin J.: Flat space congruences of order one in  $[n]$ . Trans. Amer. math. Soc. 54, 57—69 (1943).

Eine  $[n - k]$ -Kongruenz der Ordnung 1 in einem  $n$ -dimensionalen projektiven Raum  $[n]$  ist ein algebraisches  $k$ -parametrisches System von linearen  $[n - k]$  des  $[n]$  der Art, daß durch jeden Punkt von  $[n]$  genau ein  $[n - k]$  des Systems geht. Ein Punkt mit mehr als einem  $[n - k]$  heißt Fundamentalpunkt. In jedem  $[n - k]$  der Kongruenz liegt eine  $V_{n-k-1}^k$  von Fundamentalpunkten ( $V_0^k$  bedeutet  $k$  Punkte), die auch zerfallen kann. Nach den Zerfallsmöglichkeiten gibt es  $2^{k-1}$  Typen von  $[n - k]$ -Kongruenzen der Ordnung 1 in  $[n]$ , für welchen die Fundamentalörter eines allgemeinen  $[n - k]$  alle verschieden sind. An Hand der verschiedenen Zerfallsmöglichkeiten wird eine eingehende Klassifikation der  $[n - k]$ -Kongruenzen in  $[n]$  aufgestellt und die Erörterung ihrer wichtigsten Eigenschaften angeschlossen. Der Autor selbst bemerkt jedoch, daß zwar die meisten bekannten Kongruenzen der Ordnung 1 in [3], [4], [5] und auch die bisher bekannten in  $[n]$  sich seiner Einteilung als Sonderfälle einfügen, jedoch wahrscheinlich nicht alle Fälle wirklich umfaßt werden; anscheinend fällt nämlich in [4] die Kongruenz der Trisekanten jener  $F^4$ , die durch Projektion der Veronesefläche in [5] entsteht, aus seinem Rahmen, ebenso zwei bekannte Kongruenzen in [5], bestehend aus den Bisekanten einer Regelfläche  $F^4$  und aus den Bisekanten der Del-Pezzo-Fläche. Einige Beispiele beschließen die Arbeit, die sich methodisch an das Werk von T. G. Room [The geometry of determinantal loci, Cambridge 1938; dies. Zbl. 20, 54] anschließt.

*K. Strubecker.*

Pantazi, Al: Sur la déformation projective des surfaces non holonomes de l'espace  $E_3$ . Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 45, 33—47 (1943).

Mihăilescu, Tiberiu: Sur les variétés non holonomes de l' $S_3$  projectif. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 44, 35—53 (1942).

Mihăilescu, Tiberiu: Sur les variétés non holonomes paraboliques. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 45, 139—155 (1943).

Les A. étudient les propriétés différentielles projectives des variétés  $V_3^2$  (variétés non holonomes au sens de Vranceanu) définies dans l'espace  $S_3$  par une équation de Pfaff, en employant la méthode du repère mobile de Cartan. A chaque point  $A_0$  d'une  $V_3^2$  à asymptotiques distinctes on associe un repère formé par les deux tangentes asymptotiques  $A_0 A_1$ ,  $A_0 A_2$  et par deux transversales projectives  $A_0 A_3$ ,  $A_1 A_2$  (droites correspondantes dans la projectivité cellulaire de Bompiani, relative au point  $A_0$ ), repère qui dépend de trois paramètres ines-

sentiels, le point unité n'étant pas fixé. Les équations du déplacement projectif infinitésimal du repère sont établies ainsi que les conditions d'intégrabilité. Les quadriques qui ont en  $A_0$  un contact ponctuel du troisième ordre avec la courbe asymptotique  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) qui y passe et telles qu'une droite quelconque passant par  $A_0$  ait une seule conjuguée par rapport à toutes ces quadriques forment une famille  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) à un paramètre. Les deux familles de quadriques  $Q_1, Q_2$  coïncident seulement si  $V_3^2$  est une variété holonome et dans ce cas forment la famille de quadriques de Darboux. Les transversales projectives  $A_0 A_3, A_1 A_2$  sont les seules droites qui se correspondent dans la projectivité cellulaire et dont les conjuguées par rapport à  $Q_1, Q_2$  coïncident. La transversale  $A_0 A_3$  est la normale projective de E. Bortolotti. Les cônes qui ont en  $A_0$  des contacts du troisième ordre avec les asymptotiques qui y passent servent à déterminer des directions situées dans le plan tangent  $A_0 A_1 A_2$  à la  $V_3^2$  et qui sont appelées directions de Darboux et de Sègre de première et de deuxième espèce. Les directions de Darboux de première espèce et celles de Sègre de deuxième espèce sont retrouvées en employant un procédé utilisé par Lane dans le cas holonome en appliquant d'une manière convenable la notion de réseau conjugué aux  $V_3^2$ . (Deux congruences de courbes d'une  $V_3^2$  forment un réseau conjugué si leurs tangentes en un point  $A_0$  divisent harmoniquement les tangentes asymptotiques  $A_0 A_1, A_0 A_2$ .) Les  $V_3^2$  paraboliques se répartissent en trois types:  $V_3^2$  à cône quadrique ( $I$ ) de Bompiani proprement dit et à asymptotiques curvilignes. L'existence de cette classe rectifie une affirmation de Voss [Math. Ann. 23, 45—82 (1884)], suivant laquelle toutes les  $V_3^2$  paraboliques ont des asymptotiques rectilignes;  $V_3^2$  à cône ( $I$ ) formé de deux plans distincts;  $V_3^2$  à cône ( $I$ ) formé d'un plan double et ces deux dernières classes sont à asymptotiques rectilignes. Une correspondance biunivoque entre les points de deux  $V_3^2$  est une applicabilité projective si pour chaque paire de points correspondants on peut trouver une homographie qui réalise la coïncidence des plans osculateurs de deux courbes correspondantes quelconques et la coïncidence des points de rebroussement associés. (Un point de rebroussement associé à un point  $A_0$  d'une courbe de  $V_3^2$  est la limite du point commun des trois plans tangents à la  $V_3^2$  aux trois points de la courbe, infiniment voisins de  $A_0$ .) Une applicabilité projective conserve les lignes asymptotiques et les valeurs de trois invariants projectifs, appelés invariants de déformation et cette propriété est caractéristique.

G. Vranceanu.

Su, Buchin: A generalization of the canonical quadric of Wilezynski in the projective theory of non-holonomic surfaces. Univ. nac. Tucumán. Revista. Ser. A 3, 351—362 (1942).

Die Bompianische Definition der Quadrik von Wilezynski [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. 6, 187—190 (1927); Math. Z. 29, 678—683 (1929)] für eine Fläche im  $R_3$  wird verallgemeinert für eine  $V_3^2$  im  $R_3$ . Auch die Quadriken von Darboux und die Quadrik von Fubini werden für  $V_3^2$  verallgemeinert und gedeutet.

J. A. Schouten.

Wang, Hsien-Chung: On the projective invariant of a non-holonomic surface. Ann. of Math., II. Ser. 44, 562—571 (1943).

Wang, Hsien-Chung: A projective invariant of a non-holonomic surface. Duke math. J. 10, 565—574 (1943).

Die Arbeiten sind identisch. In einem dreidimensionalen projektiven Raum ist ein 2-Richtungsfeld gegeben mittels einer Differentialform. Mittels eines Cartanschen Bezugssystems wird eine projektive Invariante entwickelt, die als „projektives Linienelement“ verwendet werden kann. Die Invariante ist analog derjenigen einer Fläche und läßt sich wie diese als Doppelverhältnis deuten. Sind die projektiven Linienelemente zweier 2-Richtungsfelder gleich, so sind die

Felder projektiv äquivalent entweder mittels einer Kollineation oder mittels einer Korrelation.

*J. A. Schouten.*

Wang, Hsien-Chung: On the projective linear element of a non-holonomic surface. *Sci. Record* 1, 84—86 (1942).

Su, Buchin: The projective differential geometry of a non-holonomic hypersurface. *Duke math. J.* 10, 575—586 (1943).

Eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 24, 79) enthielt die Verallgemeinerung der Moutardschen Quadrik für ein 2-Richtungsfeld im dreidimensionalen projektiven Raum  $P_3$ . Hier folgt die Verallgemeinerung für ein  $n$ -Richtungsfeld im  $P_{n+1}$ . Die Verallgemeinerung des Čechschen Theorems bezüglich der Schnitte einer  $X_n$  im  $P_{n+1}$  mit den  $P_\nu$  durch einen  $P_{n-1}$  im tangentiellen  $P_n$  wird angegeben für  $\nu = 2$  und  $\nu = 3$ .

*J. A. Schouten.*

Su, Buchin: Plane sections through a point of a non-holonomic surface. *Amer. J. Math.* 65, 701—711 (1943).

Eine Untersuchung desselben Autors über oskulierende Kegelschnitte der ebenen Schnitte durch einen Punkt einer Fläche im dreidimensionalen projektiven Raum (dies. Zbl. 60, 370) wird hier verallgemeinert.

*J. A. Schouten.*

Wang, Hsien-Chung: On the projective deformation of a family of elements of contact. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* 7, 51—57 (1943).

Es wird angegeben, wie sich im dreidimensionalen projektiven Raum zwei-parametrische Scharen von Kontaktelementen (Punkt - 2-Richtung) konstruieren lassen, die „projektiv deformabel“ sind.

*J. A. Schouten.*

Arghiriade, E.: Sur la Géométrie biaxiale des courbes gauches. *Bull. math. Soc. Roumaine Sci.* 44, 3—19 (1942).

Étude des propriétés infinitésimales des courbes gauches dans le sous-groupe du groupe projectif ayant deux droites fixes. Examen de quelques courbes particulières.

*L. Godeaux.*

Strubecker, Karl: Über die flächentreuen Abbildungen der Ebene. *Bull. math. Soc. Roumaine Sci.* 44, 59—70 (1942).

In each real plane not passing through the real point of the absolute of the isotropic space, a Euclidean metric is determined and the motions of the space (group  $G_6$ ) determines motions between two corresponding planes, or in one plane if the other is projected on it from the real point of the absolute. A subgroup  $G_5$  is determined by the condition that the motion so determined in one plane is a translation; this  $G_5$  contains two subgroups  $G_4^l$ ,  $G_4^r$  of left and right isotropic Clifford displacements. A surface element (Flächenelement) is brought by these displacements in  $\infty^2$  elements  $E^l$  or  $E^r$  belonging to linear complexes (the center corresponds to the polar plane in the null correlation of the complex);  $E^l$  is said to be left-paratactic to  $E$ ,  $E^r$  right-paratactic. In a given real plane, say  $z = 0$ ,  $E$  is represented by two points,  $E_l$ ,  $E_r$ , poles of the plane with respect to the two complexes. This procedure gives a „paratactic“ mapping of the surface elements on pairs of points of a plane, and a mapping of this plane onto itself ( $E_l$ ,  $E_r$  are corresponding points). The mapping in the plane is equiareal and conversely every equiareal mapping in a plane may be considered as obtained by this way. The isotropic theory of a surface is therefore equivalent to that of equiareal mappings of a plane; this gives a tool to discover properties of these mapping. E. i.: asymptotic lines of a surface correspond to pair of curves with parallel tangents at corresponding points. Interesting applications of properties of minimal surfaces and of surfaces of curvature  $\neq 1$  in the isotropic space to equiareal mappings are given.

*E. Bompiani.*

DeCicco, John: General comparison of conformal and equiangular geometries. *Nat. math. Mag.* 16, 275—279 (1942).



DeCicco, John: Equilong maps of the  $\infty^3$  circles. Trans. Amer. math. Soc. 59, 42—53 (1946).

DeCicco, John: The magnilong near-Laguerre transformations. Nat. math. Mag. 19, 229—235 (1945).

DeCicco, John: The affinilong near-Laguerre transformations. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 5, 301—319 (1946).

Die Geradenabbildungen der komplexen bzw. reellen Ebene werden eingeteilt: (I) allgemeine Abbildungen, nicht alle Geraden-Parallelbüschel gehen in ebensolche über; (II) affinilonge Abbildungen, die Geraden-Parallelbüschel gehen in ebensolche über, Streckenverhältnisse auf gemeinsamen Tangenten bleiben erhalten, es liegt aber nicht (III) vor; (III) magnilonge Abbildungen, es bleiben sogar die Abstände von Berührungspunkten auf gemeinsamen Tangenten bis auf eine Konstante  $\gamma$  erhalten; hierzu gehören die äquilongen Abbildungen (siehe Scheffers) mit  $\gamma = 1$ ; (IV) die weitere bzw. engere Gruppe der Laguerre-Abbildungen  $L_7$  bzw.  $L_6$ . Sehen wir von den Geraden-Parallelbüscheln ab, so gehen bei (I) höchstens  $2 \infty^2$ , bei (II) höchstens  $\infty^2$  und bei (III) höchstens  $\infty^1$  Kreise (im Sinne der Laguerre-Geometrie) in Kreise über, während (IV) alle  $\infty^3$  Kreise in Kreise überführt. Es folgen hieraus Kennzeichnungen der Laguerre-Gruppe. Gehen bei (III) genau  $\infty^1$  Kreise in Kreise über, so liegt eine „magnilong-near-Laguerre-transformation“ vor. Die  $\infty^1$  Kreise bilden eine gerade Kreisreihe. Sieht man von Laguerre-Abbildungen ab, so lassen sich die magnilong-near-Laguerretransformationen auf die Gestalt  $e^z$ ,  $\log z$ ,  $z^n$  bringen ( $z = x + jy$ ,  $j^2 = -1$  sind komplexe äquilonge Koordinaten,  $n = \text{const}$ ). Gehen bei (II) genau  $\infty^2$  Kreise in Kreise über, so liegt eine „affinilong-near-Laguerretransformation“ vor. Die Kreise bilden (A) das System aller Kreise, die eine Gerade berühren. (B)  $\infty^1$  gerade Kreisreihen mit gemeinsamem Kreis, wobei die Nullkreise in einer Geraden liegen. (C) die  $\infty^2$  Kreise, die einen festen Kreis berühren. — Die zugehörigen Abbildungen lassen sich in der Form wiedergeben:

$$(A) \rightarrow (A): X = x^{-1}, Y = y x^{-1},$$

$$(B) \rightarrow (A): X = x^2, Y = y; \quad X = (x^2 - 1)^{-1}, Y = y(x^2 - 1)^{-1},$$

$$(A) \rightarrow (C): X = x, Y = y^2,$$

$$(B) \rightarrow (B): X = (x^2 + 1)^{1/2}, Y = y; \quad X = (1 + a(x^2 - 1)^{-1})^{1/2}, Y = y(x^2 - 1)^{-1},$$

$$(B) \rightarrow (C): X = x^2, Y = y^2,$$

$$(C) \rightarrow (C): X = x, Y = y^{1/2} + y,$$

wobei noch die inversen Abbildungen hinzuzufügen sind. Es ist  $u$  der Winkel zu einer senkrechten und  $v$  der Abstand vom Ursprung zu der Geraden, ferner  $u = 2 \arctg x$ ,  $v = 2y(1 + x^2)^{-1}$ ,  $a$  eine Konstante. Das Bild der  $\infty^3$  Kreise der Ebene bei (III) ist eine  $\omega$ -Familie. Die  $\omega$ -Familien werden geometrisch gekennzeichnet. Die magnilongen Abbildungen sind unter den Geraden-Abbildungen dadurch gekennzeichnet, daß sie jede  $\omega$ -Familie wieder in eine solche überführen. Vgl. DeCicco (dies. Zbl. 23, 76), Kasner und DeCicco (dies. Zbl. 24, 423; 25, 84), ferner den vorstehend angezeigten Artikel von DeCicco, Nat. Math. Mag. 16, 275—279 (1946).

M. Barner.

Ladue, Mary Elizabeth: Conformal geometry of horn angles of higher order. Amer. J. Math. 65, 455—476 (1943).

Ladue, Mary Elizabeth: Note concerning the conformal and equilong geometries of fourth and fifth order horn sets. Amer. J. Math. 67, 155—156 (1945).

DeCicco, John: Differential geometry in the Kasner plane. Amer. math. Monthly 53, 305—313 (1946).

DeCicco, John: Equilong geometry of third order differential elements. Nat. math. Mag. 19, 276—282 (1945).

Kasner, Edward: The recent theory of the horn angle. Scripta Math. 11, 263—267 (1945).

Ein geordnetes Paar analytischer Kurven der Ebene, die sich in einem Punkt in  $n$ -ter Ordnung berühren, bilden ein „horn angle“ der Ordnung  $n$ . Bei konformer Abbildung der Ebene besitzt ein „horn angle“ der Ordnung  $n$  eine einzige Differentialinvariante endlicher Ordnung, und zwar der Ordnung  $2n + 1$ , das Maß des „horn angle“. (Für  $n = 2$  vgl. E. Kasner, dies. Zbl. 19, 86.) Hier werden mit Hilfe von Reihenentwicklungen die Differentialinvarianten der „horn angles“ der Ordnungen 3, 4, und 5 bestimmt; dies erfordert einen gewissen Rechenaufwand. Die Gesamtheit aller analytischen Kurven, die sich in demselben Punkt in  $n$ -ter Ordnung berühren, bilden eine Horn-Menge  $n$ -ter Ordnung. Ein Bogenelement dieser Menge ist durch  $n + 1$  Konstante bestimmt — man kann den Bogenelementen also die Punkte eines  $K_{n+1}$  zuordnen ( $n + 1$ , Kasner Ebene). Der „Abstand“ zweier Punkte ist das „Maß“ des zugehörigen „horn angle“ der Ordnung  $n$ . Die konformen Abbildungen der Ebene führen die Elemente der Horn-Menge in sich über und induzieren in dem  $K_{n+1}$  eine Gruppe, die von  $2n + 1$  Parametern abhängt. Für  $n = 3, 4, 5$  wird diese Gruppe angegeben [für  $n = 1, 2$  vgl.: Kasner und Comenetz (dies. Zbl. 14, 178), Kasner (dies. Zbl. 16, 367), Kasner und DeCicco (dies. Zbl. 19, 278; 22, 82)]. Die Differentialinvariante eines „horn angle“  $n$ -ter Ordnung gegenüber äquivalenten Abbildungen der Ebene wird ebenfalls für  $n = 3, 4, 5$  berechnet. Die Geometrie des  $K_{n+1}$ , die zu einer Horn-Menge der Ordnung  $n$  unter den äquivalenten Abbildungen gehört, ist mit der Geometrie des  $K_{n+1}$  des konformen Falles identisch. — Bei DeCicco wird die Geometrie des  $K_{n+1}$  ( $n = 1, 2$ ) behandelt, für  $n = 1$  wird auch die Kurventheorie untersucht.

M. Barner.

Kasner, Edward and Aida Kalish: The geometry of the circular horn triangle. Nat. Math. Mag. 18, 299—304 (1944).

Drei sich paarweise berührende Kreise bilden ein „circular horn triangle“. Elementargeometrische Eigenschaften der Figur werden behandelt. M. Barner.

DeCicco, John: Geometry of dual-velocity systems. Univ. nac. Tucumán, Revista A 3, 261—270 (1942).

Geometrische Charakterisierung der 2-parametrischen Lösungsschar der Differentialgleichung  $y'' = a(x, y) y' + b(x, y)$ . W. Klingenberg.

DeCicco, John: Circle-to-line transformations. Amer. math. Monthly 52, 425—433 (1945).

„Die einzige 2-parametrische Schar von Kreisen, definiert durch die Differentialgleichung  $y'' = A(x, y) + B(x, y) y' + C(x, y) y'^2 + D(x, y) y'^3$ , sind die linearen Systeme“. Hiermit wird die im Titel genannte Gruppe untersucht.

W. Klingenberg.

Haimovici, Adolf: Sur la géométrie d'un groupe de contact. Ann. sci. Univ. Jassy, Sect. I 29, 101—139 (1946).

Die Geometrie der 4-parametrischen Gruppe der um die Dilatationen erweiterten ebenen Bewegungen und die Geometrie der entsprechenden 7-parametrischen Gruppe im Raum. W. Klingenberg.

Feld, J. M.: Whirl-similitudes, euclidean kinematics, and non-euclidean geometry. Bull. Amer. math. Soc. 48, 783—790 (1942).

Eine Geometrie der orientierten Linienelemente der Ebene. W. Klingenberg.

Kasner, Edward and John DeCicco: Generalized dynamical trajectories in space. Duke math. J. 10, 733—742 (1943).

DeCicco, John: Dynamical and curvature trajectories in space. Trans. Amer. math. Soc. 57, 270—286 (1945).

DeCicco, John: Extensions of certain dynamical theorems of Halphen and Kasner. Bull. Amer. math. Soc. 49, 736—744 (1943).

Kasner, Edward: Dynamical trajectories in a resisting medium. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 263—268 (1943).

DeCicco, John: Dynamical trajectories of the curvature type. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 268—270 (1943).

Studium räumlicher dynamischer Trajektorien (siehe vorstehendes Referat) und deren Verallgemeinerungen. DeCicco charakterisiert diejenigen 5-parametrischen Scharen dynamischer Trajektorien, die gleichzeitig „Krümmungs-Trajektorien“, einer 4-parametrischen Schar sind.

W. Klingenberg.

Kasner, Edward and John DeCicco: Union-preserving transformations of differential-elements. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 271—275 (1943).

Kasner, Edward and John DeCicco: Union-preserving transformations of space. Bull. Amer. math. Soc. 50, 98—107 (1944).

Kasner, Edward and John DeCicco: A generalized theory of contact transformations. Univ. nac. Tucumán, Revista A 4, 81—90 (1944).

Kasner, Edward and John DeCicco: Comparison of union-preserving and contact transformations. Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 152—156 (1946).

Transformationen von Differentialen  $n$ -ter Ordnung  $(x, y, y', \dots, y^{(n)})$  in der Ebene in Differentiale 1. Ordnung  $(x, y, y')$  derart, daß die „vereinigte Lage“ aller Elemente  $n$ -ter Ordnung dabei erhalten bleibt („union-preserving transformation“ für  $n \geq 2$ ). Also Verallgemeinerung der ebenen Berührungstransformationen ( $n = 1$ ). Entsprechende Transformationen im Raum werden untersucht. Es wird gezeigt: Verallgemeinerungen auf den Fall einer Abbildung der Elemente  $n$ -ter Ordnung auf Elemente  $m$ -ter Ordnung ist nur für  $m = 1$  so möglich, daß die vereinigte Lage für alle Elemente erhalten bleibt. Die „union-preserving transformations“ lassen sich, ähnlich wie bei Berührungstransformationen, durch eine Funktion erzeugen. Am Beispiel der Funktion  $(x - X)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = a^2$  werden Berührungstransformationen und „union-preserving transformations“ verglichen.

W. Klingenberg.

Kasner, Edward and John DeCicco: Synthetic solution of the inverse problem of dynamics. Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 413—417 (1942).

Es handelt sich um die Bestimmung der Richtung der Kraft in einem Punkt aus 4 dynamischen Trajektorien durch diesen Punkt mit Zirkel und Lineal.

W. Klingenberg.

Terravini, Alejandro: Über die Differentialgleichung  $y''' = G(x, y, y') y'' + H(x, y, y') y'^2$ . Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 2, 245—329 (1941) [Spanisch].

Terracini, Alejandro: Beiträge zum geometrischen Studium der Differentialgleichungen  $y''' = F(x, y, y') y'' + G(x, y, y') y'' + H(x, y, y') y'^2$ . Univ. Nac. Tucumán, Revista, Ser. A 3, 195—234 (1942) [Spanisch].

Kasner, Edward: Differential equations of the type:  $y''' = G y'' + H y'^2$ . Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 333—338 (1942).

MacColl, L. A.: Geometrical characterizations of some families of dynamical trajectories. Trans. Amer. math. Soc. 60, 149—166 (1946).

Kasner, Edward and John DeCicco: A generalized theory of dynamical trajectories. Trans. Amer. math. Soc. 54, 23—38 (1943).

DeCicco, John: Geometric properties of generalized dynamical trajectories. Univ. Nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. 5, 7 p. (1943).

Die Lösungen des Systems:  $\ddot{x} = p(x, y)$ ,  $\ddot{y} = q(x, y)$  („dynamische Trajektorien genannt“) genügen der Differentialgleichung

$$(D) \quad (q - p y') y''' = [q_x + y'(q_y - p_x) - y'^2 p_y] y'' - 3p y'^2$$

(vgl. E. Kasner, Differentialgeometric aspects of dynamics, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 3, II, New York 1913, reprinted 1934). Kompliziertere



mechanische oder elektrische Bewegungsgleichungen führen alle zu Bahnkurven, die Systemen folgender Art genügen:

$$(G) \quad y''' = G(x, y, y') y'' + H(x, y, y') y'^2,$$

$$(F) \quad y''' = F(x, y, y') + G(x, y, y') y'' + H(x, y, y') y'^2.$$

Terracini stellt der von Kasner gegebenen Charakterisierung der 3-parametrischen Lösungsschar von (D) durch fünf metrische Eigenschaften eine solche durch fünf projektive Eigenschaften gegenüber. Er diskutiert auch die Systeme von (G) und (F). MacColl charakterisiert die Lösungsschar von (F). Kasner und DeCicco erledigen Fall (G).

W. Klingenberg.

#### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

● Cartan, E.: *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. — 2<sup>me</sup> éd. Paris: Gauthier-Villars 1946. VIII, 378 p. 650 francs.

Diese zweite Auflage enthält gegenüber der ersten (1928) viel Neues, insbesondere aus der Differentialgeometrie im Großen. Neu ist ein Kapitel über symmetrische Räume (Definition:  $\Gamma_m R_{kijh} = 0$ ), welche geometrisch charakterisiert sind durch die Eigenschaft, daß eine Symmetrie in bezug auf irgendeinen Punkt (für Normalkoordinaten  $x^h = -x^h$ ) eine Isometrie ist. — Die Überlagerungsräume und Fundamentalgruppen eines vollständigen Riemannschen Raumes konstanter Krümmung werden eingehend untersucht. Ein Kapitel handelt von Lieschen Bewegungsgruppen. — Eine neue Methode, zu entscheiden, ob zwei Metriken äquivalent sind, wird angegeben mittels der kovarianten Ableitungen des Krümmungsaffinors.

J. Haantjes.

Allendoerfer, Carl B. and André Weil: The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. *Trans. Amer. math. Soc.* 53, 101—129 (1943).

Chern, Shiing-Shen: A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, II. Ser. 45, 747—752 (1944).

Chern, S. S.: On the curvatura integra in a Riemannian manifold. *Ann. of Math.*, II. Ser. 46, 674—684 (1945).

Chern, S. S.: Integral formulas for the characteristic classes of sphere bundles. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 30, 269—273 (1944).

Lichnerowicz, André: Sur une extension de la formule d'Allendoerfer-Weil à certaines variétés finslériennes. *C. r. Acad. Sci., Paris* 223, 12—14 (1946).

The classical Gauss-Bonnet formula expresses the curvatura integra of a curved polygon on a surface in  $E_3$  in terms of angles of the polygon and the integral of geodesic curvatures of its edges. This formula gives rise when applied to closed orientable surfaces in  $E_3$  to a remarkable relation between a differential invariant and a topological invariant (Euler characteristic) of the surface. So it has been conjectured since many years ago that there might be hidden important relationship between differential invariants and topological invariants of Riemannian manifolds and Gauss-Bonnet formula will be a key for it. About 1926, H. Hopf generalized this formula to 1) even dimensional closed Riemannian manifolds  $M_n$  which can be imbedded in  $E_{n+1}$  and 2) closed space forms, i. e. complete closed Riemannian manifolds of constant curvature. Both of these manifolds are very special among all Riemannian manifolds. Hopf proposed to generalize the formula for general Riemannian manifolds. The problem is to find a suitable differential form of  $n$ -th degree such that its integral over the whole manifold is equal to the Euler Poincaré characteristic of the manifold. In 1940, W. Fenchel (this Zbl. 26, 264) and C. B. Allendoerfer (this Zbl. 21, 351) independently solved this problem for the case of even dimensional closed Riemannian manifolds which can be imbedded in  $E_{n+q}$  ( $q \geq 1$ ). But Allendoerfer-Weil's paper was the first which solved the problem for general closed Riemannian manifolds. Their method is as fol-

lows: First take a cell  $\sigma^n$  of sufficiently fine subdivision of the given  $n$ -dimensional Riemannian manifold. Imbed the  $\sigma^n$  in Euclidean space  $E_N \left( N = \frac{n(n+1)}{2} \right)$ . This is possible by Schläfli-Cartan's immersion theorem. We construct then the tube  $\sigma^n(r)$  in  $E_N$ , i. e. the set of all points  $y$  such that the distance from  $y$  to  $\sigma^n$  is at most  $r$  for sufficiently small  $r$ . We denote the point of  $\sigma^n$  nearest to  $y$  by  $z(y)$  and denote the vector from  $z(y)$  to  $y$  by  $w(y)$ . The mapping  $y \rightarrow w(y)$  is a continuous map of the tube on the  $N$  dimensional disc  $\Sigma_N$  with degree (Abbildungsgrad)  $\div 1$ , so  $\int dw^1 dw^2 \dots dw^N$  extended over the tube is equal to the volume of the disc. This equation is nothing but the generalization of the Gauss-Bonnet formula for a polygon on a surface in  $E_3$ . Practically the  $n$ -cell  $\sigma^n$  in  $E_N$  has many edges (faces) of different dimensions, so the explicit calculation of the formula requires extensive analysis of outer angles of  $n$ -cells and the theory of tubes developed by H. Weyl. The Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifold follows immediately from that of  $n$ -cells. Chern could get a very simple and intuitive proof of the Gauss-Bonnet theorem as the simplest example of a more general theory of fibre bundles. We shall explain his main idea in the case of closed orientable Riemannian manifold. Chern introduces the tangent sphere bundle  $F^{(1)}$  of  $M_n$ . It is a  $(2n - 1)$ -dimensional manifold. Chern proves first that the differential form  $\Omega$  which appears in the Gauss-Bonnet formula  $\int_{M_n} \Omega = \chi(M_n)$  is a derived

form (i. e.  $\Omega = d\Pi$ ) if we regard it as a form in  $F^{(1)}$ . Construct a continuous field of unit vectors over  $M_n$  with isolated singular points and denote its image in  $F^{(1)}$  by  $V_n$ . Then  $\int_{M_n} \Omega = \int_{V_n} \Omega = \int_{\partial V_n} \Pi$  (by Stokes theorem). However  $\partial V_n$  corresponds

exactly to the singular points of the vector field defined in  $M_n$ , the sum of their indices is by a well known theorem of H. Hopf equal to  $\chi(M_n)$ . It can be easily seen that if we take a differential form  $\Omega$  which belongs to the characteristic cohomology class of  $M_n$ , then  $\int \Omega = c \chi(M_n)$  ( $c$ : const). Chern has proved that  $\Omega$  we had considered above belongs to the characteristic class. In this way his method connects directly to the problem of expressing characteristic classes of fibre bundles defined over differentiable manifolds in terms of integrals of some differential invariants. Thus he could express Whitney's invariant for a normal vector field of a submanifold  $M_n$  in a Riemannian manifold  $M_{2n}$  in terms of an integral of differential geometric invariant and in general discussed the problem to express the characteristic classes of sphere bundles over  $M_n$  by integral formulas of some differential invariants of the manifold. Lichnerowicz generalized the Gauss-Bonnet theorem to a certain class of Finsler manifolds, i. e. to manifolds of Berwald-Cartan, which are characterized by the vanishing of a kind of curvature tensors. S. Sasaki.

**Chern, Shiing-Shen: On a theorem of algebra and its geometrical applications.** J. Indian math. Soc., n. Ser. 8, 29—36 (1944).

The author proves first the following algebraic theorem: Let  $\Phi_\alpha = \sum_{i,j} a_{\alpha ij} x^i x^j$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ ) be  $r$  linearly independent quadratic forms. We put  $y_{i\alpha} = \frac{1}{2} \partial \Phi_\alpha / \partial x^i$  and consider the exterior quadratic form  $\pi_{i,j} = \sum_\alpha [y_{i\alpha} y_{j\alpha}]$ .

If among the  $nr$  linear forms  $y_{i\alpha}$  there are  $3r$  independent ones, then the forms  $\pi_{i,j}$  determine  $\Phi_\alpha$  up to an orthogonal transformation. As a geometrical application of this algebraic theorem, the following Allendoerfer's theorem on rigidity of varieties in Euclidean space is proved. Let  $V^m$  and  $V^n$  be two isometric varieties in  $E^n$  whose first normal spaces have the same dimension. If one of them is of type  $\geq 3$ , the two varieties differ from each other only by a motion or a reflection. The author uses the method of repères mobiles and the second fundamental forms of the varieties appear as  $\Phi_\alpha$  and  $\Phi'_\alpha$ , and the equality of exterior products comes from isometry and equations of structure of  $E_n$ . S. Sasaki.



Bochner, S.: Vector fields and Ricci curvature. Bull. Amer. math. Soc. 52, 776—797 (1946).

The author proves many theorems concerning the non-existence of certain types of vector fields in a positive definite Riemannian manifold  $M$  and in a Kähler manifold  $H$  such that their Ricci curvatures are everywhere positive or negative. The fundamental lemma which he uses in proving most of his theorems is „On a compact Riemannian manifold, if a function  $\Phi$  satisfies  $\Delta\Phi \geq 0$  everywhere on  $M$ , then  $\Delta\Phi = 0$  and  $\Phi = \text{const}$  everywhere on  $M$ “ and a relaxation of it. We shall state here some of his interesting results. (1) A compact Riemannian manifold  $M$  with positive Ricci curvature has no vector field whose divergence and curl both vanish. (As such vector field is the so-called harmonic vector, this theorem relates to the vanishing of the first Betti number  $B_1$  of  $M$ .) (2) A compact Riemannian manifold  $M$  with negative Ricci curvature has no (vector field which generates a) one parameter group of isometries of  $M$ . (3) On a compact Kähler manifold  $H$  with negative Ricci curvature there exists no one parameter group of analytic homeomorphism. (This is a generalization of a theorem: On an algebraic curve of genus  $> 1$ , there is no one parameter group of rational homeomorphism.) (4) Suppose a compact Kähler manifold  $H$  with positive Ricci curvature is covered by a finite number of neighborhoods. If a meromorphic functional element is defined in each neighborhood and if the difference of any two meromorphic elements is holomorphic wherever the elements overlap, then there exists a meromorphic function on  $H$  which differs by a holomorphic function from each meromorphic element given.

S. Sasaki.

Lee, Hwa-Chung: A kind of even-dimensional differential geometry and its application to exterior calculus. Amer. J. Math. 65, 433—438 (1943).

Interprétation géométrique d'une proposition de la théorie des formes différentielles extérieures: Pour qu'une forme  $F$  quadratique, de rang  $2n$  à  $2n$  variables, possède un facteur intégrant  $K$ , c'est-à-dire  $KF$  fermée, il faut et il suffit que  $dF \wedge 1$  possède le facteur  $F$ :  $dF = \theta \wedge F$ , 2°) la forme de Pfaff  $\theta$  doit être fermée:  $d\theta = 0$ . La condition (1) est toujours remplie pour  $n = 2$ ; pour  $n > 2$  elle entraîne la condition (2).

Th. Lepage.

Rosenson, N.: Sur les espaces Riemanniens de classe I, II, III. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 5, 325—351 (1941); 7, 253—284 (1943) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Teil I ibid. 4, 181—192 (1940); vgl. dies. Zbl. 24, 282.

Suguri, T.: Über das Klassenproblem Riemannscher Räume. Tensor 3, 41—47 (1940) [Japanisch].

Kaplan, N.: Das Äquivalenzproblem. Trudy Sem. Vektor Tenzor Analizu 5, 284—289 (1941) [Russisch].

Droste, J.: The concept „reduced length“ in a space of  $N$  dimensions. Nederl. Akad. Wet., Verslag. Afd. Natuwrk. 53, 269—273 (1944). [Holländisch mit deutscher, engl. und französ. Zusammenfassg.]

Der Begriff „reduzierte Länge“  $(AB)$  wird definiert für Riemannsche Räume beliebiger Dimension mittels eines geodätischen Bezugssystems mit  $A$  als Ursprung. Sodann wird gezeigt, daß  $(AB) = (BA)$  ist.

J. Haantjes.

Golab, St.: Sur la généralisation d'une formule de Lancret concernant l'uniformisation des équations de Frenet. Ann. Soc. Polon. Math. 18, 129—133 (1945).

Lancret hat die Frenetformeln für eine Kurve in  $R_3$  so geschrieben, daß die Ableitung jedes Einheitsvektors  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , des begleitenden Dreieins als Vektorprodukt von  $t_i$  mit dem Vektor  $l = x_2 t_1 - x_1 t_3$  erscheint, wo  $x_1$  und  $x_2$  die erste und zweite Krümmung darstellen. Für eine Kurve der  $V_n$  erscheint die kovariante Ableitung von  $t_i$  als Vektorprodukt von  $t_i$  mit einem  $(n - 2)$ -Vektor, der sich mit Hilfe der Krümmungen aus den  $t_j$  ableiten läßt.

J. A. Schouten.



Shapiro, J. L.: On certain fields of geodesic pencils. C. R. Acad. Sci. USSR, n. Sér. 39, 6—9 (1943).

Das Feld der Nullrichtungen eines Tensors  $a_{ij}$  in  $V_n$  wird geodätisch genannt, wenn jede geodätische Linie überall in einer Nullrichtung liegt, wenn dies in einem ihrer Punkte der Fall ist. Solche Felder werden in Beziehung gesetzt zu den stratifizierbaren  $V_n$  (Verf., C. R. Acad. Sci. USSR, n. Sér. 32, 237—239 (1941)), und es ergeben sich daraus verschiedene Eigenschaften dieser Räume. Anwendung auf einen  $V_4$  mit dem Schwarzschildschen Linienelement. J. A. Schouten.

Shapiro, J.: On arbitrary components of a tensor of rank 2. Mat. Sbornik, n. Ser. 17 (59), 65—84 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Strenger Beweis des Riemannschen Satzes, daß der Fundamentaltensor mit Hilfe von  $\frac{1}{2}n(n-1)$  Ortsfunktionen festgelegt werden kann. Im zweiten Teil einige Sätze über Tschebyscheffsche Netze in  $V_n$ , z. B. der Satz, daß ein solches Netz verwendet werden kann als Koordinatennetz, in bezug auf welches alle Bestimmungszahlen von  $g_{ik}$  mit zwei gleichen Indizes den Wert  $-1$  haben. J. A. Schouten.

(1) Ruse, H. S.: On the line-geometry of the Riemann tensor. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 62, 64—73 (1944).

(2) Ruse, H. S.: Sets of vectors in a  $V_4$  defined by the Riemann tensor. J. London math. Soc. 19, 168—178 (1944).

(3) Ruse, H. S.: The Riemann tensor in a completely harmonic  $V_4$ . Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 62, 156—163 (1945).

(4) Ruse, H. S.: A. G. D. Watson's principal directions for a Riemannian  $V_4$ . Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 7, 144—152 (1946).

(5) Ruse, H. S.: The five-dimensional geometry of the curvature tensor in a Riemannian  $V_4$ . Quart. J. Math., Oxford Ser. 17, 1—15 (1946).

(1): Let  $B_{n-1}$  be the plane at infinity of the local tangent space  $T_n$  at a point  $P$  of a Riemannian  $V_n$ .  $a_{ij} X^i X^j = 0$  defines a non-degenerate quadric in  $P_{n-1}$  (fundamental quadric  $F$ ) and a quadric complex called the Riemann complex is given by  $R_{hijk} p^{hi} p^{jk} = 0$ . The lines of this complex correspond to 2-directions in  $V_n$  at  $P$  of vanishing curvature. The author investigates the geometry of the Riemann complex in connection with the fundamental quadric. Work in this direction has been done for a  $V_4$  by D. J. Struik [J. Math. Physics 7, 193—197 (1928)], K. W. Lamson [Trans. Amer. math. Soc. 32, 709—722 (1930)] and R. V. Churchill (this Zbl. 3, 414). For  $n = 3$  the lines of the complex envelope the Riemann conic. Several relations between this conic, the conic  $F$  and the Ricci conic ( $R_{ij} X^i X^j = 0$ ) are given. For  $n = 4$  the Ricci quadric is the locus of points whose complex cones are outpolar to  $F$ . These geometrical properties lead to characterizations of Einstein spaces on conformally flat spaces. The points for which the complex cone degenerates form in general a Kummer quartic surface with 6 nodes and 16 tropes. (2) is devoted to a study of the various vectors connected with these nodes and tropes and with the 16 null vectors corresponding to the points of intersection of the generators of  $F$  belonging to the Riemann complex. — A  $V_n$  is completely harmonic if the Laplacian of the arc length  $s$  measured from a base point is a function of  $s$  alone. The condition to be completely harmonic consists of two algebraic relations for the curvature affinor and a sequence of differential equations. In (3) as an application of the theory of the Riemann complex all types of harmonic  $V_4$  are obtained that are algebraically possible. It is no algebraic necessity for the  $V_4$  to be of constant curvature. In (4) Watson's principal directions are obtained by means of the study of the Riemann complex (this Zbl. 21, 180). — In the Cayley space  $P_5$  belonging to the local  $P_3$  at infinity the points corresponding to the lines of  $P_3$  form a quadric (I). A second quadric (II) is determined by the fundamental tensor ( $a_{h[ij} a_{j]k}$ ) and a third one (III) represents

the Riemann complex. It is shown in (5) that the Segre characteristics of the pencils (I-III) and (II-III) give information about the special character of the  $V_4$ .

*J. Haantjes.*

(1) Castoldi, L.: Sulla curvatura media di una varietà immersa in un'altra. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 928—934 (1946).

(2) Castoldi, L.: Caratterizzazione intrinseca degli spazi riemanniani in cui una funzione della distanza geodetica da un punto generico soddisfa l'equazione generalizzata di Laplace. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 1028—1034 (1946).

(3) Castoldi, L.: Sopra alcune proprietà caratteristiche delle  $V_n$  totalmente geodetiche rispetto ad una  $V_m$  ambiente. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 1064—1069 (1946).

La courbure moyenne d'une  $V_n$ ,  $V$ , immergée dans un espace de Riemann  $V_{n+1}$  peut être définie de la manière suivante: Soit  $S$  le volume d'une portion (régulière) de  $V$ , et  $y^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ) un système de coordonnées tel que  $y^{n+1} = \text{const}$  représente les  $V_i$  géodésiquement parallèles à  $V(y^{n+1} = 0)$ , et  $y^{n+1}$  soit l'arc sur les géodésiques normales à toutes les  $V_i$ ; on a alors — si  $\Omega$  est la courbure moyenne de  $V$  en  $P_0 \in V$ :  $\Omega = -\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \left( \frac{\partial S}{\partial y^{n+1}} \right)_{P_0}$ . A partir de cette propriété, on démontre que: Si  $P \in V_{n+1}$ ,  $P_0 \in V_{n+1}$ , et on indique par  $s(P)$  la distance géodésique  $P_0 P$ , afin qu'il existe une fonction  $q(s(P))$ , qui soit harmonique (c. à. d.  $g^{ij} \nabla_{ij} \varphi = 0$ ), il faut et il suffit que les hypersphères géodésiques de centre  $P_0$  soient à courbure moyenne constante. — L'A. donne ensuite des résultats, essentiellement connus, sur les sous-variétés totalement géodésiques de  $V_{n+1}$ . *V. Dalla Volta.*

Walker, A. G.: Note on a distance invariant and the calculation of Ruse's invariant. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 7, 16—26 (1942).

Lichnerowicz, A.: Sur une inégalité relative aux espaces riemanniens complètement harmoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 218, 436—437 (1944).

Lichnerowicz, A.: Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 218, 493—495 (1944).

Lichnerowicz, André: Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques. Bull. Soc. math. France 72, 146—168 (1944).

Lichnerowicz, A. et A. G. Walker: Sur les espaces riemanniens harmoniques de type hyperbolique normal. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 394—396 (1945).

Walker, A. G.: A particular harmonic Riemannian space. J. London math. Soc. 20, 93—99 (1945).

Walker, A. G.: On completely harmonic spaces. J. London math. Soc. 20, 159—163 (1945).

Walker, A. G.: Symmetric harmonic spaces. J. London math. Soc. 21, 47—57 (1946).

Nordon, Jean: Sur la solution élémentaire d'une équation aux dérivées partielles associée à un espace riemannien harmonique. C. r. Acad. Sci., Paris 219, 436—438 (1944).

Ein Riemannscher Raum heißt vollständig harmonisch ( $H_n$ ), wenn für den von irgendeinem festen Punkt gemessenen geodätischen Abstand  $s$  die Beziehung  $I_2(\frac{1}{2}s^2) = f(\frac{1}{2}s^2)$  gilt (Copson-Ruse, dies. Zbl. 27, 260). Eine  $V_n$  konstanter Krümmung ist eine  $H_n$ , aber ist die Umkehrung dieses Satzes richtig? Diese Umkehrung gilt (1) für  $n = 2$  oder 3, (2) für den Fall, daß  $f''(0) = 20(n-1)f'(0)$ , (3) für den Fall, daß die  $H_n$  konform euklidisch ist oder (4), wenn die  $H_n$  die Signatur  $n-2$  hat oder (5), wenn die  $H_n$  eine Hyperfläche eines Raumes konstanter Krümmung ist. Es ist aber Walker gelungen, eine  $H_n$  zu konstruieren, die nicht konformeuklidisch ist.

Er konstruiert alle möglichen symmetrischen  $H_4$ . Nordon zeigt, daß eine  $H_n$  dadurch charakterisiert ist, daß die Gleichung  $\Delta_2 u = K(s) F(u)$  (unter bestimmten Voraussetzungen für  $K$  und  $F$ ) eine Lösung gestattet, die nur von  $s$  abhängt.  
J. Haantjes.

Yano, Kentaro: Concircular geometry. V. Einstein spaces. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 446—451 (1942).

Yano, Kentaro and Tyuzi Adati: Parallel tangent deformation, concircular transformation and concurrent vector field. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 123—127 (1944).

Concircular geometry. IV. cf. this Zbl. 25, 85. A conformal transformation  $V_n \rightarrow \bar{V}_n: g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \sigma^2 g_{\mu\nu}$  of a Riemannian space over the same underlying space is called to be concircular transformation if the set of their geodesic circles on  $V_n$  coincide. The author studied Einstein spaces admitting concircular transformations and derived canonical forms of line elements for such spaces. A parallel tangent deformation is an infinitesimal transformation which displaces every tangent of a curve to a parallel vector respectively. If a Riemannian space  $V_n$  admits a vector field over the whole space which gives a parallel tangent deformation for any curve in  $V_n$ , then  $V_n$  admits a concircular transformation and conversely.  
S. Sasaki.

Wong, Yung-Chow: A note on complementary subspaces in a Riemannian space. Bull. Amer. math. Soc. 49, 120—125 (1943).

Läßt sich das Linienelement einer  $V_n$  auf die Form

$$g_{ba}(\xi^k) d\xi^b d\xi^a + g_{qp}(\xi^k) d\xi^q d\xi^p,$$

$$a, b = 1, \dots, m; \quad p, q = m+1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, n.$$

bringen, so heißen die  $V_m$  und  $V_{n-m}$  mit den Gleichungen  $\xi^p = \text{konst.}$  und  $\xi^a = \text{konst.}$  komplementäre Scharen. Es wird die Bedingung angegeben dafür, daß die  $V_m$  alle semi-umbilikal sind, d. h. daß es ein Vektorfeld  $v_i$  gibt, so daß  $v_k H_{cb}{}^k = g_{cb}$ . Es folgen noch Sätze über höhere Krümmungsräume der  $V_m$ .  
J. A. Schouten.

Wong, Yung-Chow: Quasi-orthogonal ennuple of congruences in a Riemannian space. Ann. of Math., II. Ser. 46, 158—173 (1945).

Behandlung der Felder von  $n$  gegenseitig senkrechten Richtungen in einer  $V_n$  mit indefinitem Fundamentaltensor, unter denen einige Nullrichtungen vorkommen. Für  $n=3$  wird eine Klassifizierung angegeben, die die Klassifizierung von Levi-Civita [Ann. Mat. pura appl., II. Ser. 24, 255—300 (1896)] ergänzt.  
J. A. Schouten.

Wong, Yung-Chow: Contributions to the theory of surfaces in a 4-space of constant curvature. Trans. Amer. math. Soc. 59, 467—507 (1946).

Verschiedene Sätze über die  $V_2$  in  $S_4$ , insbesondere Minimal- $V_2$  und solche  $V_2$ , von denen der erste Fundamentaltensor und einer der beiden zweiten Fundamentaltensoren identisch sind mit den Fundamentaltensoren einer gegebenen  $V_2$  in  $S_3$ .  
J. A. Schouten.

Wong, Yung-Chow: Some Einstein spaces with conformally separable fundamental tensors. Trans. Amer. math. Soc. 53, 157—194 (1943).

Eine  $V_n$ , deren Linienelement die Form

$$\sigma^{-2}(x^\alpha) g_{ij}(x^k) dx^i dx^j + \sigma^{-2}(x^\alpha) g_{pq}(x^r) dx^p dx^q,$$

$$i, j, k = 1, \dots, m; \quad p, q, r = m+1, \dots, n; \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

hat, heißt konform separabel vom Typus  $(m, n-m)$ . Es handelt sich um Einstein- $V_n$  dieser Art. Das Problem führt auf die Bestimmung eines Skalarfeldes, dessen zweite kovariante Ableitung bis auf einen skalaren Faktor gleich  $g_{ij}$  ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen werden abgeleitet für  $m \geq 1, n-m \geq 1$ . Verschiedene kanonische Formen werden angegeben, und einige Sätze von Brinkmann, Fialkow und Yano werden verallgemeinert. Der Fall, daß die  $V_m$  ein  $S_m$  ist, wird besonders eingehend betrachtet.  
J. A. Schouten.



**Wong, Yung-Chow:** Family of totally umbilical hypersurfaces in an Einstein space. *Ann. of Math.*, II. Ser. **44**, 271—297 (1943).

Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine einparametrische Schar von  $V_n$  in einer Einsteinschen  $V_{n+1}$  als eine Schar von umbilikalen  $V_n$  eingebettet werden kann. Eine  $C_n$  kann nur dann in einer Einsteinschen  $V_{n+1}$  eingebettet werden als Exemplar einer einparametrischen Schar von umbilikalen  $V_n$ , wenn die  $V_{n+1}$  ein  $S_{n+1}$  ist. Betrachtung der Gleichung  $l_j l_i \varrho + q(\varrho) l_{ji} = \omega g_{ji}$  in einer  $C_n$  liefert eine Anzahl von Sätzen, die zum Teil Verallgemeinerungen von Sätzen von Brinkmann, Fialkow, Yano und Wong selbst sind.

*J. A. Schouten.*

**Wong, Yung-Chow:** Some theorems on Einstein 4-space. *Duke math. J.* **13**, 601—610 (1946).

Ein Resultat von Sledbodzinski (*Prace mat.-fiz.* **34**, 91—115 (1926)) verallgemeinernd, werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben dafür, daß sich das Linienelement einer Einsteinschen  $V_4$  auf die Form

$$ds^2 = [\varrho(x^k, t)]^2 dt^2 - g_{ij}(x^k) dx^i dx^j, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

bringen läßt. Aus der Betrachtung des Riccitorsors der  $V_3$  mit dem Fundamentaltensor  $g_{ij}$  ergeben sich Eigenschaften über die Haupttrichtungen dieser  $V_3$ .

*J. A. Schouten.*

**Fialkow, Aaron:** Correction to „Totally geodesic Einstein spaces“. *Bull. Amer. math. Soc.* **48**, 167—168 (1942).

Berichtigung zu der in diesem Zbl. **21**, 158 besprochenen Arbeit.

**Lee, Hwa-Chung:** On even-dimensional skew-metric spaces and their groups of transformations. *Amer. J. Math.* **67**, 321—328 (1945).

Continuation of a previous paper (this Zbl. **62**, 383) on spaces of even-dimensionality  $L_{2n}$  with a skew fundamental tensor  $a_{ik} = -a_{ki}$ . Transformations changing  $a_{ik}(x)$  in  $\varphi a_{ik}(y)$  are said to be conformal; special conformal if  $\varphi =$  a constant, automorphic if  $\varphi = 1$ . Generalizations of Poisson parentheses and Jacobi identities are given. A special conformal group  $G_2$  in  $L_{2n}$  is characterized by the fact that every Hamiltonian congruence (integral curves of  $-dx^i dt - a^{ik} \partial H(x, t) \partial x^k = 0$ ) is changed in a congruence of the same type.

*E. Bompiani.*

**Frucht, Roberto:** Zur Geometrie auf einer Fläche mit indefiniter Metrik. *Un. mat. Argentina. Publ. Nr.* **11**, 22 p. (1940) [Deutsch mit spanischer Übersetzung].

**Norden, A.:** Sur la géométrie projective-euclidienne de Weyl. *Mat. Sbornik*, n. Ser. **18** (60), 153—166 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

**Norden, A.:** On Weyl's projectively Euclidean space. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. **48**, 307—309 (1945).

Jede  $W_n$ , die eine  $P_n$  ist, ist für  $n > 2$  ein  $S_n$ . Es gibt aber nichttriviale projektiveuklidische  $W_2$ . Die möglichen  $W_2$  dieser Art können konstruiert werden mit Hilfe einer von Bortolotti (s. dies. Zbl. **5**, 413) angegebenen Dualität, die sich in bezug auf zwei beliebig vorgegebene Kurven definieren läßt.

*J. A. Schouten.*

**Norden, A.:** On conformally geodesical families of lines in the plane. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. **53**, 587—590 (1946).

Jede  $W_2$  läßt sich konform auf einen  $R_2$  abbilden. Eine 2-parametrische Schar von Kurven des  $R_2$ , die sich auf geodätische Linien der  $W_2$  abbilden, heißt ein Feld  $G$ . Es werden spezielle Felder  $G$  betrachtet, die  $\alpha^{-1}$  einparametrische Scharen enthalten, so daß für je 4 dieser Scharen 4 Kurven aus diesen Scharen durch einen Punkt in diesem Punkt Tangenten haben, die ein von der Wahl des Punktes unabhängiges Doppelverhältnis aufweisen. Die Eigenschaften dieser speziellen Felder („stratifiant fields“) werden untersucht.

*J. A. Schouten.*

Masini Venturelli, Lucia: Sopra i  $ds^2$  di Liouville di classe uno. Ist. Veneto Sci. Lett. Arti, Atti, Cl. Sci. mat. natur. **102**, 145—163 (1943).

Masini Venturelli, Lucia: Le ipersuperficie di rotazione del tipo di Liouville. Ist. Veneto Sci. Lett. Arti, Atti, Cl. Sci. mat. natur. **102**, 323—327 (1943).

Soll das Linienelement  $ds^2 = (\sum_1^n U_i(u_i)) \sum_1^n (du^i)^2$  ( $n > 2$ ) von der Klasse 1 sein, so gilt  $\sum_1^n U_i = a^2 - b^2 \sum_1^n u_i^2$  ( $a, b$  konstant,  $b^2 \sum_1^n u_i^2 \leq \frac{2}{3} a^2$ ).  
*Joachim Nitsche.*

Tonolo, A.: Sulle ipersuperficie  $V_n$  le cui due forme fondamentali ammettono una stessa trasformazione infinitesima  $X(f)$ . Boll. Un.mat. Ital., II. Ser. **5**, 137—140 (1943).

Si une hypersurface  $V_n$  d'un espace Euclidien  $S_{n+1}$  admet un déplacement infinitésimal  $X(f)$  qui conserve aussi la deuxième forme fondamentale, il existe (au moins) une relation entre les courbures principales. En particulier, pour  $n = 2$ , il s'agit d'une surface  $W$ .  
*V. Dalla Volta.*

Ghosh, N. N.: The tortuosity of a variety. Bull. Calcutta math. Soc. **32**, 51—60 (1940).

Ghosh, N. N.: The tortuosity of submanifolds of a variety. Bull. Calcutta math. Soc. **33**, 187—195 (1941).

Bompiani, E.: Intorno alle varietà isotrope. Ann. Mat. pura appl. IV. Ser. **20**, 21—58 (1941).

Isotropic varieties of species  $\nu$ , in a Euclidean space, are those whose osculating spaces up to and including those of order  $\nu$  have their points at infinity on the absolute: they have been studied by J. Lense (dies. Zbl. **20**, 116) and M. Pinl. The author shows that these varieties are the same as those appearing in his theory of Riemannian geometries of higher species (see this Zbl. **11**, 418—419). He stresses the importance of projective conditions which arise naturally from this metric problem. Their rôle is shown in the classification of ruled isotropic surfaces, in the investigation of some isotropic surfaces and varieties partially studied by Pinl and Lense and in establishing general theorems on isotropic varieties (or suitable projections of them).  
*E. Bompiani.*

Yano, Kentaro and Yosio Mutô: On the conformal arc-length. Proc. imp. Acad. Tokyo **17**, 318—322 (1941).

Yano, Kentaro and Yosio Mutô: On the generalized loxodromes in the conformally connected manifold. Proc. imp. Acad. Tokyo **17**, 455—460 (1941).

Yano, Kentaro and Yosio Mutô: On the curves developable on two dimensional spheres in the conformally connected manifold. Proc. imp. Acad. Tokyo **18**, 222—226 (1942).

There were several papers on curves in conformally connected manifolds before these papers. But it was not known the existence of a parameter  $\sigma$  which is a) determined within additive constant and b) invariant under the conformal transformations of the underlying Riemannian manifold. only parameters which have the property b) and are determined within linear fractional transformations were known. The authors determined the parameter  $\sigma$  (conformal arc-length) with the property a) and b) starting from hitherto known Frenet formulas (repères are  $n + 2$  spherical!) with respect to a parameter with the property b). Thus they could get Frenet formulas such that the vectors, curvatures  $\lambda, \lambda^{(4)}, \dots, \lambda^{(n+1)}$  which appear in the formulas are all conformal invariants and the parameter is  $\sigma$ . They then studied the geometrical characterization of simple curves, (conformal circles are too simple, for even the conformal arc-length can not be defined for these because it degenerates) that is, the curves for which  $\lambda^{(4)} = \dots = \lambda^{(n+1)} = 0$ , they are curves developable on two dimensional spheres and especially if  $\lambda = \text{const}$  then they are loxodromes.  
*S. Sasaki.*

Yano, Kentaro et Yosio Mutô: Sur la théorie des hypersurfaces dans un espace à connexion conforme. Japanese J. Math. 17, 229—288 (1941).

Yano, Kentaro et Yosio Mutô: Sur le théorème fondamental dans la géométrie conforme des sous-espaces riemanniens. Proc. phys.-math. Soc. Japan. III. Ser. 24, 437—449 (1942).

Yano, Kentaro: Sur les équations fondamentales dans la géométrie conforme des sous-espaces. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 326—334 (1943).

Yano, Kentaro: Sur une application du tenseur conforme  $C_{jk}$  et de la scalaire conforme  $C$ . Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 335—340 (1943).

The authors developed systematically the theory of subspaces in conformally connected manifolds. First at each point of the subspace in consideration convenient repères are attached. Using these they define the induced conformal connexion on the subspace from the ambient space. The equations analogous to the Gauss and Weingarten's in ordinary surface theory in Euclidean 3-space are derived, and from their conditions of integrability Gauss, Codazzi, Ricci equations etc. are obtained. Many theorems concerning generalized circles, auto-concurrent curves [A. Haimovici, C. r. Acad. Sci. Roum. 1, 296—301 (1937)], umbilical hypersurfaces, the fundamental theorem of subspaces etc. are obtained. The induced conformal connexion on a subspace is in general different from the intrinsic conformal connexion (i. e. the conformal connexion on the subspace which is associated to the first fundamental tensor of the subspace). The necessary and sufficient condition for the coincidence of the induced and intrinsic conformal connexion are given by the vanishing of a conformal tensor  $C_{jk}$ . S. Sasaki.

Sasaki, Shigeo: On the spaces with normal conformal connexions whose groups of holonomy fix a point or a hypersphere. I, II, III. Japanese J. Math. 18, 615—622, 623—633, 791—795 (1943).

Yano, Kentaro: Conformal and concircular geometries in Einstein spaces. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 444—453 (1943).

Yano, Kentaro et Shigeo Sasaki: Sur les espaces à connexion conforme normale dont les groupes d'holonomie fixent une sphère à un nombre quelconque de dimensions. I. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 525—535 (1944).

Suppose that  $C_n$  is a space with a normal conformal connexion and let  $H$  be the holonomy group of  $C_n$ . As the structure of the fundamental group  $\pi$ , of a topological space  $M$  and the structure of the Galois group of an algebraic equation  $E$  reflect at some extent the topological structure of the space  $M$  and the algebraic structure of the equation  $E$ , the group theoretical structure of the group  $H$  reflects at some extent the differential geometrical structure of the manifold  $C_n$ . The authors pursue these relations. a) If the holonomy group  $H$  of a  $C_n$  is a subgroup of the Möbius' group which fixes a point or a hypersphere, the  $C_n$  is a space with normal conformal connexion corresponding to a class of Riemann spaces conformal to each other including an Einstein space with vanishing (or non-vanishing) scalar curvature  $R$ . The converse is also true. The invariant hypersphere is real if  $R > 0$  and imaginary if  $R < 0$ . b) If the holonomy group  $H$  of  $C_n$  fixes two hyperspheres (they may be point hyperspheres) the  $C_n$  is conformal to a Riemann space whose line element has the canonical form  $ds^2 = [(x^n)^2 + K]^2 g_{bc}^*(x^n) dx^b dx^c + (dx^n)^2$  where  $K$  is a constant  $\geq 0$  according as the pencil of hyperspheres determined by the invariant hyperspheres is hyperbolic, parabolic or elliptic and the Riemann space  $V_{n-1}$  with the fundamental tensor  $g_{bc}^*(x^n)$  is an Einstein space. The converse is also true. c) A similar problem for which the invariant figure is an  $(m-1)$  dimensional sphere is solved too. d) As an application of the basic theorem a) it is proved that for Einstein spaces there exists a representation analogous to the Poincaré's representation of Non-Euclidean geometry. There were obtained



many geometrical properties of the space  $C_n$  whose group  $H$  is one of the above cited type too. S. Sasaki.

- Yano, Kentaro: Projective parameters in projective and conformal geometries.** Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 45—53 (1944).  
**Yano, Kentaro: Projective parameters in D. van Dantzig's projective space.** Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 210—215 (1944).

There are two methods of introducing projective parameters for paths in a projective space of paths due to L. Berwald (this Zbl. **15**, 176) and J. Haantjes (this Zbl. **17**, 89). The author showed that 1) Berwald's method which uses Schwarzsian derivative can be applied to introduce projective parameter for curves in conformally connected spaces and 2) the projective parameter introduced for paths in a projectively connected space by the author as the parameter which reduces the equation of paths to a canonical form coincides with those of Berwald for spaces with general projective connexion. S. Sasaki.

**Yano, Kentaro: Les espaces d'éléments linéaires à connexion projective normale et la géométrie projective générale des paths.** Proc. phys.-math. Soc. Japan, III. Ser. **24**, 9—25 (1942).

The author geometrizes projectively the general space of paths of J. Douglas given by differential equations  $d^2u^i/ds^2 + 2\Gamma^i(u, du/ds) = 0$  in the sense that usual projective geometry of paths can be regarded as a geometrization of differential equations  $d^2u^i/ds^2 + \Gamma^i_{jk}(u) (du^j/ds) (du^k/ds) = 0$ . Just as in the usual case he could construct a projective connexion (so-called normal projective connexion) such that 1) its parameters are determined by  $\Gamma^i(u, du/ds)$  and its successive derivatives and 2) integral curves of the given differential equations are geodesiques of the projective connexion thus determined. S. Sasaki.

**Abe, Makoto: Sur la réductibilité du groupe d'holonomie I. Les espaces à connexion affine. II. Les espaces de Riemann.** Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 56—60, 177—182 (1944).

**Yano, Kentaro: Sur le parallélisme et la concurrence dans l'espace de Riemann.** Proc. imp. Acad. Tokyo **19**, 189—197 (1943).

Let  $E$  be a space with an affine connexion and  $g$  be the holonomy group of  $E$  and  $\gamma$  be the homogeneous holonomy group. Abe studied the relation between the reducibility of  $\gamma$  and the differential geometrical structure of  $E$ . The main results are as follows: a) Let  $E$  be a space with an affine connexion without torsion. If  $\gamma$  fixes a  $p$ -direction (algebraically this means that the set of matrices  $\gamma$  is reducible), there exists in  $E$  ( $n - p$ ) parameter family of totally geodesic varieties such that their tangent  $p$ -planes are parallel. b) Even if the group  $\gamma$  admits  $n$  linearly independent invariant directions,  $E$  does not need to be affinely flat. This remark applies in the Riemannian case too. c) Suppose a Riemannian space  $V_n$  decomposes into Pythagorean product of the form  $V_n = V_{n_1} \times V_{n_2} \times \dots \times V_{n_r} \times E_{n_{r+1}}$

and  $ds^2 = (ds_1)^2 + \dots + (ds_2)^2 + \sum_{\alpha=1}^{n_{r+1}} (du^\alpha)^2$  is the corresponding decomposition of  $ds^2$ .

Then the most general Riemannian metric which defines the same affine connexion as that of  $V_n$  is given by  $ds^2 = c_1(ds_1)^2 + \dots + c_r(ds_2)^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n_{r+1}} c_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$  where  $c_1, \dots, c_r$  are arbitrary positive constants and the last term is an arbitrary positive definite quadratic form with constant coefficients. The case where  $g$  fixes a point, is discussed too. S. Sasaki.

**Yano, Kentaro: Über eine geometrische Deutung der projektiven Transformation nicht-symmetrischer affiner Übertragungen.** Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 284—287 (1944).

**Yano, Kentaro:** Subprojective transformations, subprojective spaces and subprojective collineations. Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 701—705 (1944).

**Yano, Kentaro:** On the torse-forming directions in Riemannian spaces. Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 340—345 (1944).

In an affinely connected space we say that a vector field  $v$  along a curve  $x^i(t)$  (or over the whole space) is torse-forming if  $\delta v^i/dt = \alpha (dx^i/dt) + \beta v^i$  ( $v_{;k}^i = \alpha \delta_k^i + \beta_k^i v^i$ ). Using this idea, the author got a geometrical interpretation of the change of affine connexion  $L \rightarrow L: L_{jk}^i \rightarrow L_{jk}^i + p_j \delta_k^i + q_k \delta_j^i$  and studied the structure of Riemann spaces admitting such field over the whole space. Next, subpaths in an affinely connected space are, by definition, integral curves of  $d^2x^i/dt^2 = II_{jk}^i (dx^j/dt) (dx^k/dt) = \alpha (dx^i/dt) + \beta \xi^i$  for a fixed vector field  $\xi^i$ . The most general change of affine connexions which preserves subpaths is given by  $II_{jk}^i \rightarrow II_{jk}^i + \delta_j^i q_k + \delta_k^i q_j + q_{jk} \xi^i$  (subprojective change of affine connexions). If  $\xi$  is torse-forming for  $II_{jk}^i$  it is torse-forming for  $II_{jk}^i$  too. Subprojective collineations are studied and applied to the theory of representation of projectively connected spaces. *S. Sasaki.*

**Yano, Kentaro et Kazuo Takano:** Sur les coniques dans les espaces à connexion affine ou projective. I. II. Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 410—417, 418—424 (1944).

An affine (a projective) conic in an affinely (a projectively) connected space is by definition a curve whose developement in the tangent affine (projective) space at a point of the curve is a conic in the ordinary sense. The authors derived differential equations of such curves and the conditions for the coincidence of projective conics with affine conics and for the coincidence of both set of affine conics with respect to two affine connexions over the same underlying space are discussed. *S. Sasaki.*

**Yano, Kentaro:** Sur les espaces à connexion affine qui peuvent représenter les espaces projectifs des paths. I. II. III. Proc. imp. Acad. Tokyo **20**, 631—639 (1944); **21**, 16—24, 97—103 (1945).

Just as the  $n$ -dimensional projective geometry can be obtained from the  $(n+1)$  dimensional centered affine geometry by regarding straight lines through the center as points in the projective space, J. H. C. Whitehead (this Zbl. **2**, 152) showed that spaces with projective connexion in the sense of O. Veblen can be represented in certain spaces with affine connexion and he characterized such spaces. The author took up the same problem. They are spaces with affine connexion without torsion admitting a vector field  $\xi^i$  such that 1)  $\xi^\lambda \partial/\partial x^\lambda$  is an affine collineation of the space and 2)  $\xi^i$  is a torse forming direction. *S. Sasaki.*

**Sen, R. N.:** On parallelism in Riemannian space. I. II. III. Bull. Calcutta math. Soc. **36**, 102—107 (1944); **37**, 153—159 (1945); **38**, 161—167 (1946).

To study Riemannian geometry, usually we use Levi-Civita's parallelism as the connexion. Instead of Levi-Civita's parallelism, here the author introduces two arbitrary affine connexions. Then he specializes the two connexions in several ways by means of orthogonal ensembles. Various tensors expressible in terms of these affine connexions are obtained and their geometrical meanings are explained and relationship between the resulting types of parallelism are given. *S. Sasaki.*

**Wagner, V.:** The generalization of Ricci's and Bianchi's identities for a connexion in the compound manifold. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **46**, 303—305 (1945).

In einer früheren Arbeit (C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **40**, 94—97 (1943)) hat der Verfasser die absolute Ableitung eines allgemeinen geometrischen Objektfeldes in einer zusammengesetzten (compound) Mannigfaltigkeit definiert. Hier folgt die Ableitung der Ricci-Bianchischen Identität für eine solche Ableitung für Objekte der Klasse  $r$ . Die Liesche Ableitung wird verwendet. *J. A. Schouten.*

Norden, A.: The affine connectivity on the surfaces of a projective and conformal space. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 48, 539—541 (1945).

Sowohl für den projektiven als für den konformen Raum wird gezeigt, wie man einen Unterraum einspannen und normieren kann und wie sich dann eine induzierte, eine affine bzw. Weylsche Übertragung ergibt. J. A. Schouten.

Norden, A.: On pairs of conjugate parallel translations in  $n$ -dimensional spaces. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 49, 625—628 (1945).

$b_{ih}$  sei ein symmetrischer Tensor  $n$ -ten Ranges. Es werden symmetrische Übertragungen untersucht, für welche  $\Gamma_{[j}b_{i]h} = \omega_{[j}b_{i]h}$ , anders gesagt  $\nabla_j b_{ih} = \omega_j b_{ih} + b_{ihj}$ ;  $b_{[ih]j} = 0$ . Von diesen insbesondere solche Paare  $\Gamma, \Gamma'$  für welche  $d\tilde{z}^i \nabla_j b_{ih} = 0$  für jede Wahl von  $d\tilde{z}^i$  und  $i^h$  zur Folge hat, daß  $d\tilde{z}^i \nabla_j b_{ih} i^h = 0$ . Notwendig und hinreichend ist, daß  $\partial_j b_{ih} - \Gamma_{ji}^l b_{lh} - \Gamma'_{jh} b_{il} = \omega_j b_{ih}$ , und es gilt  $\Gamma_{ji}^h - \Gamma'_{ji}^h + b^{hl} b_{lij}$ . Die  $\frac{1}{2}(\Gamma_{ji}^h - \Gamma'_{ji}^h)$  sind Parameter einer Weylschen Übertragung. Es werden eine Anzahl von Beispielen behandelt. Die Arbeit enthält eine große Anzahl Druckfehler. J. A. Schouten.

Laptev, G.: Sur une classe des géométries intrinsèques induites sur une surface dans un espace à connexion affine. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 41, 315—317 (1943).

Laptev, G.: Sur l'immersion d'un espace à connexion affine dans un espace affine. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 47, 531—534 (1945).

Es wird bewiesen, daß jede  $A_n$  erhalten werden kann durch Einbettung und Einspannung einer  $X_n$  in  $E_N$ , wenn  $N \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n)$ . In der zweiten Arbeit wird die Grenze herabgedrückt auf  $N \geq \frac{1}{2}(n^2 + 2n - 1)$ . J. A. Schouten.

Norden, A.: Espace à connexion affine dont l'intégrale des géodésiques est exprimée par l'équation  $\frac{A du + B dv}{C du + D dv} = k$ . Mat. Sbornik, n. Ser. 18 (60), 125—138 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Norden, A.: La géométrie généralisée de l'espace réglé à deux dimensions. Mat. Sbornik, n. Ser. 18 (60), 139—152 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Spezielle zweidimensionale Räume mit affiner Übertragung. J. A. Schouten.

Chern, Shiing-shen: The geometry of isotropic surfaces. Ann. of Math., II. Ser. 43, 545—559 (1942).

Chern, Shiing-shen: On a Weyl geometry defined from an  $(n-1)$ -parameter family of hypersurfaces in a space of  $n$  dimensions. Sci. Record 1, 7—10 (1942).

Chern, Shiing-shen: A generalization of the projective geometry of linear spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 38—43 (1943).

In einem 3-dimensionalen Raum sei eine allgemeine 2-parametrische Flächenschar  $\{\Sigma\}$  gegeben. Dann kann in diesem Raum eine und nur eine 4-dimensionale Weylsche Geometrie definiert werden, deren „Punkte“ die Flächenelemente sind und die gewisse innere Eigenschaften besitzt. Eine Punkttransformation, welche die Flächenschar  $\{\Sigma\}$  in eine andere  $\{\Sigma'\}$  überführt, existiert dann und nur dann, wenn die zwei 4-dimensionalen Weylschen Geometrien äquivalent sind.

Schließlich wird dies für den  $n$ -dimensionalen Raum verallgemeinert. — In einer  $(r+1)(n-1)$ -parametrischen Schar von  $r$ -dimensionalen Flächen wird der projektive Zusammenhang untersucht, der für  $r=1$  in die „geometry of paths“ übergeht. W. Barthel.

Chern, Shiing-shen: On the Euclidean connections in a Finsler space. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 33—37 (1943).

Die von Cartan, Berwald, Synge, Taylor betrachteten euklidischen Zusammenhänge eines Finslerschen Raumes sind Elemente einer unendlichen Menge euklidischer Zusammenhänge. Die Äquivalenz zweier solcher euklidischer Zusammenhänge in zwei Finslerschen Räumen bezüglich Punkttransformationen



ist notwendig und hinreichend für die Äquivalenz der beiden Finslerschen Räume.

W. Barthel.

Prokofiev, V.: Imbedding of two-dimensional spaces of normal projective connectivity into the three-dimensional projective space. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 36, 87—88 (1942).

(1) Bompiani, E.: Le connessioni tensoriali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 478—482 (1946).

(2) Bompiani, E.: Connessioni del secondo ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 483—485 (1946).

Two different extensions of the idea of affine connexion in a (numeric)  $X_n$  are given: — 1) Let  $\xi_{rs}^{ik}$  be a tensor field with two indexes of contravariance; is it possible to find a geometric object of components  $L_{rst}^{ik}(x)$ , so that  $\partial_t \xi_{rs}^{ik} + L_{rst}^{ik} \xi_{rs}^{jk}$  is a tensor? The answer is positive, and the author gives the transformation law according to which the  $L_{rst}^{ik}$  must transform:  $L_{rst}^{ik}$  is called a tensor connexion (the usual connexion being a vector one). With respect to a tensor connexion, covariant derivative, and parallel displacement may be defined as usual. The author gives then a necessary and sufficient condition for a given tensor connexion to be „deduced“ by a vector one  $L_{rs}^i$ , so that the tensor derivative of  $\xi_{rs}^{ik}$  coincides with the covariant derivative with respect to  $L_{rs}^i$ . — 2) If  $\xi^i$  is a contravariant vector, it is always possible to define a  $C$ -connexion of components  $C_{mh,p}^{iq}$  and a  $CD$ -connexion whose components are the  $C_{mh,p}^{iq}$  with other quantities  $D_{mh,p}^i$ , so that  $\partial_m \xi^i + C_{mh,p}^{iq} \partial_q \xi^p + D_{mh,p}^i \xi^p$  is a tensor; the geometric objects so introduced define a 2nd-order connexion; such a connexion may be always obtained starting from an ordinary affine connexion and two arbitrary tensors. Some applications are made to Riemann spaces.

V. Dalla Volta.

Picasso, Ettore: Connessioni proiettive su una superficie di  $S_4$ . Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 14, 14—18 (1944).

Dans l' $S_4$  projectif considérons une connexion projective (normale) arbitraire: il est toujours possible de trouver une surface  $V_2$ , et un champ  $\Phi$  de „poles“, de façon que la connexion induite sur  $V_2$  par  $\Phi$  soit la connexion donnée (l'A. remarque que ce résultat a été énoncé par E. Cartan). — Une connexion affine intrinsèquement liée à  $V_2$  est aussi déterminée.

V. Dalla Volta.

Maxia, A.: Geometria affine di alcuni sistemi di equazioni a derivate parziali studiati da L. Bianchi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 169—174 (1946).

The author considers the system of partial differential equations:

(1)  $\partial_{rs} z = \Gamma_{rs}^t \partial_t z + b_{rs} z$  ( $\Gamma_{rs}^t = \Gamma_{sr}^t$ ;  $b_{rs} = b_{sr}$ ;  $\partial_t z = \partial z / \partial x_t$ , etc.)  
( $r, s, t = 1, 2, \dots, n$ ) and the conjugate one: (2)  $\partial_{rs} \mu = \gamma_{rs}^t \partial_t \mu + b_{rs} \mu$ ;  
where  $\gamma_{rs}^t = 2 \Gamma_{rs}^t / b = \Gamma_{rs}^t$ . If then one takes  $n+1$  linear independent integrals of (1) as coordinates of the points of an  $A_n$  in an affine  $E_{n+1}$  (with a suitable choice of pseudonormals), (2) represents the same  $A_n$ , as enveloped by its tangent hyperplanes. This fact gives a geometrical explanation of some circumstances already remarked by L. Bianchi [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., IV. Ser. 5, 312—323 (1889)].

V. Dalla Volta.

Norden, A.: Über spezielle geometrische Netze in der nichtmetrischen Geometrie. Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analizu 5, 226—245 (1941) [Russisch].

Čahtauri, A. I.: Geometrie in Verbindung mit einer korrelativen Transformation. Trudy Tbilissk. mat. Inst. 13, 101—137 (1944) [Russisch mit georgischer Zusammenfassung].

● Hachtroudi, M.: Les espaces normaux. I. Les espaces d'éléments à connexion affine normale. II. Les espaces d'éléments linéaires à connexion Weylienne normale. Téhéran: Université de Téhéran, Faculté des Sciences 1945. V, 83 p.

## Topologie:

Menger, Karl: *Topology without points*. Rice Inst. Pamphlet 27, 80—107 (1940).

Die üblichen topologischen Begründungen des Raumbegriffs von Fréchet, Hausdorff und Kuratowski benutzen alle die Punkte als Raumelemente. Verf. geht von dem Begriff Stück oder Klumpen (lump) aus, der ihm dem naturwissenschaftlichen und dem philosophischen Raumbegriff besser angepaßt zu sein scheint als der Begriff der Punktmenge. Als Punkt definiert er gewisse Folgen von Klumpen  $U_1, U_2, \dots$ , die beständig abnehmen, d. h. für die  $U_{k+1}$  für jedes  $k$  vollständig in  $U_k$  enthalten ist. Er vergleicht seine Theorie mit einigen anderen, die ebenfalls den Punktmengenbegriff bei der Begründung der Topologie vermeiden, und wägt Vorteile und Nachteile seiner Methode ab. *M. Zacharias.*

Gorciu, V. G.: *The Moore-Smith convergence in topology and the theory of filters*. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 46, 141—143 (1944).

Die Moore-Smith-Konvergenz ist der Filterkonvergenz gleichwertig. *T. Ganea.*

Barbalat, B.: *Sur les espaces topologiques les plus généraux*. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 45, 103—112 (1943).

Barbalat, B.: *Sur un groupe d'axiomes des espaces abstraits*. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 46, 121—133 (1944).

Eine Operation ( $'$ ) sei derart für alle Teilmengen  $M$  von  $E$  definiert, daß  $x \in M'$  soviel wie  $x \in (M - \{x\})'$  bedeutet.  $M$  heißt abgeschlossen, falls  $M' \subset M$  gilt; offen heißt  $M$ , wenn es der Komplementärmenge von  $\cup X'$ ,  $X \subset E - M$ , gleich ist. Dann ist die Komplementärmenge einer abgeschlossenen Menge nicht notwendig offen; Bedingungen werden gefunden, die dies nach sich ziehen. Die Unabhängigkeit der Axiome  $A \subset B \rightarrow A' \subset B'$ ,  $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ ,  $\{x\}' = \emptyset$ ,  $(A \cup A')' \subset A \cup A'$ ,  $A'' \subset A'$  wird in der zweiten Arbeit vollständig untersucht. *T. Ganea.*

Climeseu, Al.: *Sur les espaces à topologie transitive d'ordre  $n$* . Bull. École Polytechn. Jassy 1, 259—269 (1946).

Bezeichnet man mit  $fA$  die abgeschlossene Hülle von  $A$ , so wird das übliche Axiom  $f^2 A = fA$  durch  $f^{n+1} A = f^n A$  ( $n$  fest) ersetzt; die entstehenden Räume werden untersucht. *T. Ganea.*

Monteiro, António: *Caractérisation de l'opération de fermeture par un seul axiome*. Portugaliae Math. 4, 158—160 (1945).

Fragliches Axiom lautet:  $X \cup Y \cup Y \subset X \cup Y$  für alle Teilmengen  $X, Y$ . *G. Aumann.*

Hewitt, Edwin: *A problem of set-theoretic topology*. Duke math. J. 10, 309—333 (1943).

Rutt, N. E.: *On derived sets*. Nat. math. Mag. 18, 53—63 (1943).

Day, Mahlon M.: *Convergence, closure and neighborhoods*. Duke math. J. 11, 181—199 (1944).

Ridder, J.: *Über topologische Eigenschaften von Strukturen*. Verh. Nederl. Akad. Wetensch. Afd. Natuurk., Sect. I 18, Nr. 4, 43 S. (1944).

Divers aspects de l'étude des applications de l'ensemble  $\mathfrak{P}(E)$  des parties d'un ensemble dans lui-même ou dans  $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ , en vue de déterminer les liens existant entre les diverses topologies définies sur un ensemble (*E. Hewitt*), ou entre les diverses manières de définir une topologie (*M. M. Day*). L'accent est mis sur les structures d'ordre dans  $\mathfrak{P}(E)$  chez *E. Hewitt* et *J. Ridder*. *A. Revuz.*

Ferrari, Esther: *Über allgemeine topologische Räume*. Univ. nac. Litoral Inst. Mat., Publ. 6, 183—189 (1946) [Spanisch].

Vergleich von Axiomensystemen für abstrakte Räume, wie sie von Fréchet, Riesz, Kuratowski und Hausdorff eingeführt wurden. U. a. wird ein Satz über die halbstetige Erweiterung stetiger Funktionen mitgeteilt. *G. Aumann.*

Tola, José P.: Operationen, die für Folgen und für Umgebungen in topologischen Räumen stetig sind. *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis natur. Lima* 4, 73—75 (1941) [Spanisch].

Colmez, Jean: Discussion préliminaire du problème de Wiener. *Revue sci.* 80, 313—315 (1942).

Colmez, Jean: Problème de Wiener. Recherche de solutions séparées. Caractérisation de certains espaces par leur groupe de déformations. *C. r. Acad. Sci., Paris* 222, 434—436 (1946).

Déterminer sur un ensemble infini  $E$  une topologie telle que les applications biunivoques de  $E$  sur lui-même appartenant à un groupe donné a priori deviennent des homéomorphismes.  
*A. Revuz.*

Paintandre, Roger: Sur une décomposition de la frontière d'un ensemble. *C. r. Acad. Sci., Paris* 223, 121—123 (1946).

Pétrresco, Julien: Sur les sommes et les intersections d'ensembles des espaces topologiques. *Mathematica, Timișoara* 21, 84—94 (1945).

Pétrresco, Julien: Ensembles ordinaires des espaces topologiques. *Disquisitiones math. phys.* 5, 65—73 (1946).

Undeutliche Bemerkungen über mengentheoretische und topologische Begriffe. In der zweiten Arbeit befinden sich einige irrtümliche Behauptungen über Begrenzungen von Mengen.  
*T. Ganea.*

Pereira Gomes, A.: Sur la notion d'espace compact. *Centro Estudos Mat. Fac. Ci. Porto. Publ. Nr. 16*, 29 p. (1945) = *Anais Fac. Ci. Porto* 30, Nr. 2 [Portugiesisch mit französ. Zusammenfassg.].

Für die Kompaktheit eines durch eine Hüllenoperation erklärten Raumes  $R$  werden verschiedene Definitionen gegeben, die in Sierpinski'schen Räumen, erklärt durch die offenen Mengen ( $\emptyset$  und  $R$ , und die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen, aber nicht notwendig der Durchschnitt von zwei offenen Mengen ist offen), äquivalent sind.  
*G. Aumann.*

Dieudonné, Jean: Une généralisation des espaces compacts. *J. Math. pures appl., IX. Sér.* 23, 65—76 (1944).

Un recouvrement  $R_1$  d'un ensemble  $E$  est dit subordonné à un recouvrement  $R$  de  $E$ , si tout élément de  $R_1$  est inclus dans un élément de  $R$ . Un recouvrement de  $E$  topologique est localement fini si tout point de  $E$  possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini d'éléments de  $R$ . Un espace est paracompact si tout recouvrement ouvert, en possède un recouvrement ouvert subordonné localement fini. Un espace de Hausdorff paracompact est normal, un espace métrique séparable est paracompact. Le produit d'un compact et d'un paracompact est paracompact.  
*A. Revuz.*

Arnold, B. H.: Decompositions of a  $T_1$  space. *Bull. Amer. math. Soc.* 49, 768—778 (1943).

Étude des partitions d'un espace topologique vérifiant l'axiome de séparation  $T_1$ , en sous-espaces fermés non vides.  
*A. Revuz.*

Iwamura, Tsurane: A generalized limit. *Proc. imp. Acad. Tokyo* 20, 346—347 (1944).

Definition and existence proof for a notion analogous to Banach limit in a locally bicomact Hausdorff space.  
*K. Yosida.*

Hewitt, Edwin: On two problems of Urysohn. *Ann. of Math., II. Ser.* 47, 503—509 (1946).

Espaces topologiques où toute fonction continue réelle est nécessairement constante.  
*A. Revuz.*



- Pondiczery, E. S.: Power problems in abstract spaces. *Duke math. J.* **11**, 835—837 (1944).
- Hewitt, Edwin: A remark on density characters. *Bull. Amer. math. Soc.* **52**, 641—643 (1946).
- Propriétés du type de densité d'un espace topologique. *A. Revuz.*
- Kurepa, Georges: Le problème de Souslin et les espaces abstraits. *Revista Ci.* **47**, 457—488 (1945).
- Die verallgemeinerte Souslinsche Bedingung für topologische Räume lautet: Jedes disjunkte System offener Mengen ist höchstens abzählbar. — Angabe einer Reihe äquivalenter Postulate im Fall eines unendlichen, lokal zusammenhängenden, bikompakten Hausdorffschen Raumes, der noch eine zusätzliche Bedingung erfüllt. *W. Neumer.*
- Youngs, J. W. T.: A note on separation axioms and their application in the theory of a locally connected topological space. *Bull. Amer. math. Soc.* **49**, 383—385 (1943).
- Fan, Ky: A propos de la définition de connexion de Cantor. *Bull. Sci. math.* II. Sér. **68**, 111—116 (1944).
- Gustin, William: Countable connected spaces. *Bull. Amer. math. Soc.* **52**, 101—106 (1946).
- Possel, René de: Sur un espace sans base dénombrable qui est complètement ordonné et dont tout intervalle fermé est homéomorphe à un intervalle numérique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 1202—1203 (1946).
- Shanin, N.: On imbedding in a power of topological space. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **8**, 233—242 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].
- Dann und nur dann kann ein  $T_0$ -Raum  $S$  in einem Produktraum  $R^{\Xi}$ , wo  $R$  ein topologischer Raum (ohne Trennungsaxiome) und  $\Xi$  eine Kardinalzahl sind, eingebettet werden, wenn es eine aus höchstens  $\Xi$  Abbildungen  $S \rightarrow R$  bestehende Menge  $\Phi$  gibt, die so beschaffen ist, daß die  $f^{-1}(H)$ ,  $f \in \Phi$  und  $H \subset R$ , eine offene Subbasis von  $S$  bilden. *T. Ganea.*
- Mibu, Yoshimichi: On Baire functions on infinite product spaces. *Proc. imp. Acad. Tokyo* **20**, 661—663 (1944).
- Any continuous function on the topological product  $E = \prod_x E_x$  is determined by a countable number of coordinates of the point  $x \in E$  if each  $E_x$  is a completely regular space. The result is extended to the case of Baire functions. *K. Yosida.*
- Balanat, Manuel: Ein Beispiel eines Raumes, der akzessibel, nichtabzählbar, separabel und nicht vollkommen separabel ist. *Revista Un. mat. Argentina* **10**, 163—172 (1945) [Spanisch].
- Balanat, Manuel: Über die Räume  $D_0$ . *Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A* **2**, 169—175 (1941) [Spanisch].
- Balanat, Manuel: Compact and separable sets in spaces  $D_0$ . *Univ. nac. Litoral Inst. Mat., Publ.* **5**, 15 p. (1943) [Spanisch].
- Frenkel, Yanny: Kriterien für die Bikompaktheit und  $H$ -Vollständigkeit in einem akzessiblen topologischen Fréchet-Rieszsehen Raum. *Un. mat. Argentina, Mem. Monografias, II. Ser.* **2**, Nr. 1, 21 p. (1946) = *Ciencia y Técnica* **107**, 383—401 (1946) [Spanisch].
- Fréchet, Maurice: La notion d'uniformité et les écarts abstraits. *C. r. Acad. Sci., Paris* **221**, 337—340 (1945).
- Fréchet, Maurice: De l'écart numérique à l'écart abstrait. *Portugaliae Math.* **5**, 121—131 (1946).
- Doss, Raouf: Sur la condition de régularité pour l'écart abstrait. *C. r. Acad. Sci., Paris* **223**, 14—16 (1946).

**Doss, Raouf:** Sur les espaces où la topologie peut être définie à l'aide d'un écart abstrait symétrique et régulier. C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 1087—1088 (1946).

Nach einigen Bemerkungen über allgemeinere „Metrisationen“ topologischer Räume, die noch die Eigenschaft erweisen, daß von je zwei Sphären mit demselben Zentrum immer eine die andere enthält, führt Fréchet den Begriff des symmetrischen, regulären „écart“ ein. Auf einer Menge  $X$  soll dieser durch eine Funktion  $\varrho: X \times X \rightarrow S$  definiert werden — wo  $S$  eine linear geordnete Menge mit nicht isoliertem erstem Element  $0$  ist —, die folgender Bedingungen genügt:  $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ ,  $\varrho(x, y) = 0$  soviel wie  $x = y$ ,  $\varrho(x, z) \rightarrow 0$ , wenn  $\varrho(x, y) \rightarrow 0$  und  $\varrho(y, z) \rightarrow 0$ . Doss zeigt, daß ein Raum mit solchem „écart“ vollständig regulär ist; ist er nicht metrisierbar, so besitzt jeder Punkt eine aus lauter offenen und abgeschlossenen Umgebungen bestehende Basis. Schließlich wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines „écart“ auf einem topologischen Raum gefunden.

*T. Ganea.*

**Appert, Antoine:** Espaces uniformes généralisés. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 986—988 (1946).

Die Verallgemeinerungen werden durch Weglassen einiger Teile der üblichen Axiome erzielt.

*T. Ganea.*

**Kalisch, G. K.:** On uniform spaces and topological algebra. Bull. Amer. math. Soc. **52**, 936—939 (1946).

Mittels einer verallgemeinerten Metrikfunktion wird eine der üblichen gleichwertige Theorie der uniformen Räume dargestellt. Diese verallgemeinerte Metrik ist der üblichen Norm topologischer Gruppen mit Operatoren ähnlich.

*T. Ganea.*

**Arens, Richard F.:** A topology for spaces of transformations. Ann. of Math., II. Ser. **47**, 480—495 (1946).

Der Raum  $C$  aller stetigen Abbildungen eines topologischen Raumes  $X$  in einen topologischen Raum  $Y$ , mit der Foxschen Topologie (dies. Zbl. **60**, 412) versehen, wird eingehend untersucht. Ist  $X$  lokal kompakt und  $Y$  vollständig, so ist auch  $C$  vollständig; der Ascolische Satz über gleichgradig stetige Abbildungen wird verallgemeinert; eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Metrisierbarkeit von  $C$ , im Falle eines metrischen  $Y$ , wird angegeben.

*T. Ganea.*

**Pepper, Paul M.:** Concerning pointwise-symmetry. Rep. Math. Colloquium, II. Ser. **7**, 29—36 (1946).

Eine Abbildung  $f$  eines metrischen Raumes  $M$  auf sich heiße eine  $\eta$ -Spiegelung ( $0 < \eta < 1$ ) am Zentrum  $p$ , falls  $\varrho[x, f(x)] \leq 2\eta \varrho[x, p] \leq 2\eta \varrho[p, f(x)]$  gilt. Für jedes  $\eta < 1$  gibt es beschränkte Räume, die wenigstens zwei  $\eta$ -Spiegelungen an verschiedenen Zentren gestatten; dagegen gibt es in beschränkten Räumen höchstens ein Zentrum für 1-Spiegelungen.

*T. Ganea.*

**Wehausen, John V.:** Transformations in metric spaces and ordinary differential equations. Bull. Amer. math. Soc. **51**, 113—119 (1945).

Theorems about systems of differential equations satisfying a few restrictive conditions are stated. They are more elementary than the corresponding propositions deduced directly from Schauder's fixed point theorem, valid in more general cases. The method of the author is based on an analysis of the properly metricized space  $T$  of all the completely continuous transformations of a complete metric space into itself. It is easily shown that the subspace  $T_0$  of  $T$  consisting of the transformations without fixed points is open and that, if the subspace  $T_1$  of  $T$  consisting of the transformations with only one fixed point is dense in  $T$ ,  $T_0$  is empty. More remarkable is the result that,  $T_2$  denoting the subspace of  $T$  con-

sisting of the transformations with more than one fixed point, if  $T_2$  is dense in  $T$  every closed set of  $T_1$  is nowhere dense in  $T$ . *C. Racine.*

**Blumenthal, Leonard M.:** New characterizations of segments and arcs. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 107—109 (1943).

**Milgram, A. N.:** Some topologically invariant metric properties. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 193—195 (1943).

**Milgram, Arthur N.:** Some metric topological invariants. Rep. Math. Colloquium, II. Ser. 5/6, 25—35 (1944).

Ein metrischer kompakter konvexer Raum, der wenigstens zwei Punkte enthält, ist dann und nur dann einem Streckenzug kongruent, wenn er kein gleichseitiges Tripel besitzt. Ein metrisches lokal zusammenhängendes Kontinuum, das kein gleichseitiges Tripel besitzt, ist ein Bogen. Für jedes  $n \geq 1$  besitzt jede metrische, einfache geschlossene Kurve  $n + 1$  Punkte  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , für deren Entfernungen  $\varrho$  die Gleichungen  $\varrho(p_i, p_{i+1}) = \varrho(p_0, p_n)$  bestehen. *T. Ganea.*

**Milgram, A. N.:** Extensions of coverings from subspaces to spaces. Rep. math. Colloquium, II. Ser. 4, 16—21 (1943).

Ein metrischer separabler Raum ist dann und nur dann zwischen  $n + 1$  abgeschlossenen Teilmengen zusammenhängend (Verallgemeinerung eines für  $n = 1$  von Menger stammenden Begriffes), wenn seine Dimension mindestens  $n$  ist. *T. Ganea.*

**Eckmann, Beno:** L'idée de dimension. Revue Théol. Philos., n. Sér. 31, Nr. 127, 65—79 (1943).

**Eckmann, Beno:** Der Begriff der Dimension. Gaz. Mat., Lisboa 4, Nr. 17, 4—6 (1943) [Portugiesisch].

**Menger, Karl:** What is dimension? Amer. math. Monthly 50, 2—7 (1943).

● **Hurewicz, Witold and Henry Wallman:** Dimension theory. Princeton Mathematical Series, vol. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941. VII, 165 p.; \$ 3,00.

Vgl. Referat über eine revised edition 1948 (dies. Zbl. 36, 125). *Otto Haupt.*

**Kondô, Motokiti:** Sur la notion de la dimension. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 215—223 (1943).

Let  $L$  be a partially ordered system, with unit  $E$  and null-element, in which two relations: congruence  $\cong$  and orthogonality  $\perp$  are defined. Following Fréchet the author defines  $\dim(A) \geq \dim(B)$  [ $A, B \in L$ :  $\dim(A)$  the dimension-type of  $A$ ] if there exists  $C \in L$  such that  $A \cong C, C \perp B$ :  $\dim(A) = \dim(B)$  is defined as usual. If  $A \cup B$  exists and  $A \perp B$ , then  $\dim(A) + \dim(B) = \dim(A \cup B)$  by definition. By applying Tarski's method (this Zbl. 19, 54) to the class of dimension-types, in case  $\dim(A)$  is normal for some  $A \in L$  a numerical dimension on  $L$  is constructed whose range lies in  $[0, 1]$  or  $[0, \infty]$  according as  $\dim(E)$  is normal or not;  $L$  is called finite or infinite in this case and purely infinite in the other case following von Neumann and Murray (this Zbl. 14, 161). Specializations of  $L$  to several cases are discussed including those of cardinal numbers, Fréchet dimension-types, rings of operators, continuous geometries, Hausdorff dimension, Menger-Urysohn dimension and equivalence by decomposition in topological groups. *K. Morita.*

**Hemmingen, Erik:** Some theorems in dimension theory for normal Hausdorff spaces. Duke Math. J. 13, 495—504 (1946).

**Wallace, A. D.:** Dimensional types. Bull. Amer. math. Soc. 51, 679—681 (1945).

Let  $X$  be a normal space and  $\dim X$  the covering dimension of  $X$ . Hemmingen proves the equivalence of the following conditions: (1)  $\dim X \leq n$ , (2) any mapping from any closed set of  $X$  into an  $n$ -sphere  $S^n$  can be extended over  $X$ .



(3) any mapping of  $X$  into an  $(n+1)$ -simplex is inessential and (4) the condition of Eilenberg and Otto (this Zbl. 19, 235); cf. also C. H. Dowker (this Zbl. 37, 101); K. Morita (this Zbl. 14, 317). He also proves  $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$  for two compact spaces  $X$ ,  $Y$  and the sum theorem by using (3). Wallace's paper gives essentially another proof of the sum theorem by showing that if each  $A_i$  satisfies (2) with  $S^n$  replaced by an ANR  $S$ , so does  $X$ , where  $X = A_1 \cup A_2 \cup \dots$  and  $A_i$  are closed.

K. Morita.

Weinstein, I. and J. Kajdan: Finite-multiple continuous dimension-raising mappings. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 8, 129—138 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

A generalization of Hurewicz's theorem (this Zbl. 6, 328) is proved: If  $f$  is an  $(n+1)$ -multiple, closed, continuous map of a separable metric space  $X$  onto another space  $Y$  and  $\dim Y - \dim X = n$ , then for any  $k = 1, 2, \dots, n+1$  there is at least one point  $y$  of multiplicity  $k$  with  $f^{-1}(y)$  as its unique kernel, where by a kernel of  $y \in Y$  is meant any minimal set  $A \subset f^{-1}(y)$  having the property that the image of every neighbourhood  $U(A)$  contains  $y$  as inner point. Some related results are obtained.

K. Morita.

Roberts, J. H. and Paul Civin: Sections of continuous collections. *Bull. Amer. math. Soc.* 49, 142—143 (1943).

Für jede stetige Zerlegung eines metrischen separablen  $X$  in kompakte Teilmengen gibt es, falls der zugehörige Zerlegungsraum  $n$ -dimensional ist, eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , deren Durchschnitt mit jedem Element der Zerlegung mindestens einen und höchstens  $n+1$  Punkte enthält. T. Ganea.

Groot, J. de: Topological classification of all closed countable and continuous classification of all countable pointsets. *Nederl. Akad. Wet. Proc.* 48, 237—248 = *Indagationes math.* 7, 42—53 (1945).

Groot, J. de: Some topological problems. *Nederl. Akad. Wet. Proc.*, 49, 47—53 = *Indagationes math.* 8, 11—17 (1946).

Groot, J. de: Continuous classification of all microcompact 0-dimensional spaces. *Nederl. Akad. Wet. Proc.* 49, 518—523 = *Indagationes math.* 8, 337—342 (1946).

Abzählbare kompakte Mengen: Ist die  $\lambda$ -te Ableitung von  $A$  eine endliche Menge von  $l = 0$  Elementen, so heißt  $A$  vom Typus  $(\lambda, l)$ . Zwei solche Mengen sind dann und nur dann topologisch äquivalent, wenn sie vom gleichen Typus sind. (Nach Freudenthal sind sie dann homöomorph der Menge der Ordinalzahlen  $\leq \omega^{\lambda} l$ .) Stetige Abbildungen sind (nur) in der Richtung der Erniedrigung des Typus möglich. Abzählbare mikrokomakte Mengen: Ist die  $\mu$ -te Ableitung von  $A$  die erste, die kompakt ist, und ist  $(\lambda, l)$  der Typus der  $\mu$ -ten Ableitung, so heißt  $A$  vom Typus  $(\mu, \lambda, l)$ . Der Typus ist die einzige topologische Invariante. Abzählbare nichtkompakte Mengen können auf jede abzählbare Menge stetig abgebildet werden. Nulldimensionale kompakte Mengen: Die einzigen Invarianten bei stetigen Abbildungen sind „Abzählbarkeit“ und „Typus  $[\prec \lambda, l]$ “. Nulldimensionale mikrokomakte Mengen: Hinzu kommt die Invariante „Kompaktheit“. Charakterisierung der Familie der Mengen reeller Zahlen. Im Anschluß an Moore-Kline ohne Beweis. Darstellung von Räumen als geordnete Mengen. Ohne Beweis. Existenz von  $\aleph_n$ -dimensionalen Kontinua, die sich paarweise nicht stetig aufeinander abbilden lassen. Ebenso  $2^{\aleph_n}$  zusammenhängende  $n$ -dimensionalen Mengen. ( $n \geq 1$ .) Ohne Beweis. Sätze über die Erweiterung von Abbildungen im Anschluß an des Verf. Diss. (dies. Zbl. 27, 267).

H. Freudenthal.

(1) ● Heemert, Anthonie van: Die  $R_n$ -adische Entwicklung von allgemein-topologischen Räumen mit Anwendungen auf die Konstruktion nichtzerlegbarer Kontinuen. Diss., Univ. of Groningen, 1943. 188 S. [Holländisch].

(2) Heemert, A. van: The existence of 1- and 2-dimensional subspaces of a compact metric space. *Nederl. Akad. Wet. Proc.* 49, 905—910 = *Indagationes Math.* 8, 564—569 (1946).

(1): Ausführliche Behandlung der  $R_n$ -adischen Entwicklungsmethoden (H. Freudenthal, dies. Zbl. 16, 280) mit allerlei Verschärfungen. Anwendung zur Konstruktion unzerlegbarer Kontinua beliebiger Dimension, die allgemeiner sind als alle bisher bekannten. Unzerlegbarkeit der Solenoiden. (2): Existenz 1- und 2-dimensionaler Teilräume beliebiger kompakter Räume, bewiesen mittels der  $R_n$ -adischen Methode. *H. Freudenthal.*

Borsuk, Karol: On the decomposition of manifolds into products of curves and surfaces. *Fundamenta Math.* 33, 273—298 (1945).

Szumbariski, M.: Sur la décomposition des éléments euclidiens en produits cartésiens. *Mat. Sbornik, n. Ser.* 16 (58), 39—42 (1945) [mit russischer Zusammenfassg.].

Kelly, Paul J.: On isometries of square sets. *Bull. Amer. math. Soc.* 51, 960—963 (1945).

Si  $E = E_1 \times \dots \times E_m$ ,  $E_i \neq [\text{point}]$ ,  $E_i$  est appelé diviseur de  $E$ . Une décomposition en diviseurs premiers n'est pas unique, en général (cf. Whitehead, ce Zbl. 25, 93). C'est le cas toutefois, si  $E$  est une variété compacte et  $\dim E_i \leq 2$  dans une des décomposition en facteurs premiers (Borsuk). Si  $E = R^n$ ,  $\dim E_1 = 1$ ,  $m = 2$ , alors  $E_1 = R^1$  (Borsuk, Szumbariski; cf. Borel et Serre, ce Zbl. 37, 263). Kelly prouve „ $E \times E = F \times F$  implique  $E = F$ “ pour isométries de certains espaces finis. *I. Fényi.*

Aumann, Georg: Über Räume mit Mittelbildungen. *Math. Ann.* 119, 210—215 (1944).

Espaces  $R$  pour lesquels on peut définir une application continue de  $R^n$  dans  $R$ ,  $m(x_1, \dots, x_n)$ , qui soit symétrique en  $x_1, \dots, x_n$  et telle que  $m(x, \dots, x) = x$ . La propriété est topologiquement invariante. La propriété est possédée par les disques circulaires ouverts, les dendrites, elle ne l'est pas par les sphères.

*A. Revuz.*

(1) Freudenthal, Hans: Neuaufbau der Endentheorie. *Ann. of Math., II. Ser.* 43, 261—279 (1942).

(2) Freudenthal, Hans: Über die Enden diskreter Räume und Gruppen. *Commentarii math. Helvet.* 17, 1—38 (1945).

(3) Hopf, Heinz: Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. *Commentarii math. Helvet.* 16, 81—100 (1944).

(1): Als Verallgemeinerung und Vertiefung der in der Diss. des Verf. (dies. Zbl. 2, 56) aufgestellten Theorie wird in der ersten Arbeit die Endentheorie auf folgenden Voraussetzungen aufgebaut: 1) Zweites Abzählbarkeitsaxiom; 2) Semikompaktheit im Kleinen; 3) Kompaktheit des Komponentenraumes. Die Charakterisierung des kompaktifizierten Raumes, sowie andere vom Verf. in seiner Diss. behandelte Fragen, insbesondere über die Enden der Gruppenräume, werden verallgemeinert. In (2) werden die Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden als, in einem gewissen Sinn, „diskrete“ Räume studiert. — Das Hauptproblem von (3) besteht darin, die Bedingungen dafür aufzustellen, daß ein nichtkompakter Raum  $R$  eine solche diskontinuierliche Transformationsgruppe  $G$  in sich zuläßt, daß es ein kompaktes  $M \subset R$  gibt, so daß  $f(M) = R$ , wenn  $f$  die Gruppe  $G$  durchläuft. Die Bedingung lautet: Es gibt nur 1. oder 2. oder eine Cantorsche perfekte Menge von Enden (im Sinne von Freudenthal) des Raumes  $R$ . Die Beweise lehnen an Freudenthals Diss. an. *S. Stoilow.*

Mazurkiewicz, S.: Recherches sur la théorie des bouts premiers. *Fundamenta Math.* 33, 177—228 (1945).

In Anlehnung an die Theorie von B. Kaufmann [Math. Ann. 103, 70—144 (1930) und dies. Zbl. 4, 74] entwickelt Verf. eine neue und umfassendere Primendentheorie. Zugrunde liegt eine nicht kompakte,  $\mu$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $R$  mit der natürlichen Metrik  $\varrho(x, y)$ , die gleich ist der unteren Grenze der Durchmesser aller die Punkte  $x$  und  $y$  enthaltenden Kontinuen. Eine Punktefolge heiße asymptotisch, wenn sie keine konvergente Teilfolge enthält. Jede asymptotische Folge sei entweder eine  $\alpha$ -Folge oder eine  $\beta$ -Folge, je nachdem sie Cauchysch ist oder keine Cauchysche Folge enthält. Zwei solche Folgen  $x_n$  und  $y_n$  heißen konjugiert, wenn es Jordanbgen  $x_n y_n$  gibt, für die jede Folge  $z_n \in x_n y_n$  von demselben Typus ist wie  $x_n$  und  $y_n$ . Verf. nennt eine Menge  $V$  deskriptiven Rand, wenn für jede asymptotische Folge Konvergenz gegen einen Punkt von  $V$  geeignet erklärt wird. Dann wird als eine Verallgemeinerung des Kaufmannschen Resultates die Existenz eines deskriptiven Randes  $V_0$  mit folgenden Eigenschaften bewiesen: (1) wenn  $x_n$  gegen den Punkt  $v \in V_0$  konvergiert, so konvergiert jede zu  $x_n$  konjugierte Folge gleichfalls gegen  $v$ . (2) alle gegen denselben Punkt  $v \in V_0$  konvergierenden Folgen sind abgeschlossen. (3)  $V_0$  ist der kleinstmögliche unter allen deskriptiven Rändern mit den Bedingungen (1) und (2). Die Elemente von  $V_0$  werden deskriptive oder Kaufmannsche Primenden genannt. Verf. führt weiter einen neuen deskriptiven Rand von  $R$  ein, den er topologisch nennt. Dieser ist definitionsgemäß eine Menge  $W$  derart, daß  $R$  dicht ausfllt im als kompakt und metrisch erklärten Raum  $R - W$ . Hauptresultat: Existenz eines topologischen Randes  $W_0$  mit folgenden Eigenschaften: (i) wenn  $x_n$  gegen den Punkt  $w$  von  $W_0$  konvergiert, so konvergiert jede zu  $x_n$  konjugierte Folge gleichfalls gegen  $w$ . (ii)  $W_0$  ist der kleinstmögliche unter allen topologischen Rändern  $W$  mit der Bedingung (i).  $R - W_0$  stellt sich als ein Streckenbild heraus, und jeder Punkt von  $W_0$  ist regulär erreichbar von  $R$  aus. Die deskriptiven und die topologischen Primenden stimmen im allgemeinen nicht überein, aber für ebene, beschränkte und einfach zusammenhängende Gebiete fallen die Carathéodoryschen, die deskriptiven und die topologischen Primenden alle zusammen. *H. Terasaka.*

Floyd, E. E.: On the extension of homeomorphisms on the interior of a two cell. Bull. Amer. math. Soc. 52, 654—658 (1946).

Among other results the Osgood-Carathéodory theorem on conformal mapping is obtained.

*I. Fry.*

Wallace, A. D.: Separation spaces. II. Anais Acad. Brasil. Ci. 14, 203—206 (1942).

Sur les espaces définis par l'A. (ce Zbl. 25, 238).

*I. Fry.*

Wallace, A. D.: Monotone transformations. Duke math. J. 9, 487—506 (1942).

A class of transformations which are monotone relative to a family of sets; it includes monotone and non alternating transformations. A cyclic element theory for compact spaces.

*I. Fry.*

Wallace, A. D.: A fixed-point theorem. Bull. Amer. math. Soc. 51, 413—416 (1945).

Let  $S$  be a compact space,  $T: S \Rightarrow S$ ,  $TS = S$ ,  $T'$  topological, and  $e = Te$  an end point. There is an invariant continuum  $H \subset S - e$  having no cut point. If  $S$  is locally connected there is a fixed point in  $S - e$ .

*I. Fry.*

Wallace, A. D.: Generalized arc-sets. Proc. nat. Acad. Sci. USA 31, 414—417 (1945).

Homotopy generalizations for compact spaces of cyclic elements and arc-sets of a continuous curve.

*I. Fry.*

Manning, Rhoda: Open and closed transformations. Duke math. J. 13, 179—184 (1946).

A single valued not necessarily continuous transformation  $f$  is said to be closed, if  $f(\bar{X}) = \overline{f(X)}$ .

*I. Fry.*



Keldyeh, L.: Sur les transformations ouvertes des ensembles  $A$ . C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 49, 622—624 (1945).

Classes de Baire, et transformations de l'ensemble  $[x: 0 < x < 1, x \text{ irrational}]$ .  
I. Fáry.

Choquet, Gustave: Prolongements d'homéomorphismes. Ensembles topologiquement nommables. Caractérisation topologique individuelle des ensembles fermés totalement discontinus. C. r. Acad. Sci., Paris 219, 542—544 (1944).

Eilenberg, Samuel and Deane Montgomery: Fixed point theorems for multivalued transformations. Amer. J. Math. 68, 214—222 (1946).

Verallgemeinerung eines klassischen Satzes von Lefschetz; Sätze von Kakutani und Wallace sind Spezialfälle.  
I. Fáry.

Young jr., Gail S.: The introduction of local connectivity by change of topology. Amer. J. Math. 68, 479—494 (1946).

Es sei  $S$  ein topologischer Raum und  $G$  eine Familie von Teilmengen von  $S$ . Ein Häufungspunkt  $p$  von  $M \subseteq S$  heiße  $G$ -Limespunkt, wenn jede Umgebung von  $p$  ein Element von  $G$  enthält, das mit  $p$  und  $M - p$  Punkte gemeinsam hat. Verf. untersucht insbesondere die Fälle, daß  $G$  die Familie aller Bögen, aller zusammenhängenden Mengen, aller lokal zusammenhängenden Mengen usw. ist. Ferner führt Verf. verallgemeinerte Räume ein, mit deren Hilfe er als Anwendung seiner Theorie einen Fixpunktsatz beweist.  
H. Terasaka.

Shanks, M. E.: Monotone decompositions of continua. Amer. J. Math. 67, 99—108 (1945).

Durch Zerlegungseigenschaften werden die Strukturen der Kontinuen untersucht. Verf. betrachtet den Verband  $\mathfrak{D}(X)$  aller stetigen Zerlegungen (Alexandroff und Hopf, Topologie, 1935, S. 67) des Kontinuums  $X$ , den Verband  $\mathfrak{D}_m(X)$  aller monotonen Zerlegungen (d. h. Zerlegungen, bei denen die Mengen Kontinuen oder Punkte sind) und den Verband  $\mathfrak{D}_{sm}(X)$  aller einfachen, monotonen Zerlegungen [d. h. monotone Zerlegungen, deren jede nur eine einzige nicht ausgeartete Menge (= Kontinuum) enthält]. Gezeigt wird z. B., daß zwei Kontinuen  $X$  und  $Y$  dann und nur dann homöomorph sind, wenn es einen Isomorphismus von  $\mathfrak{D}_m(X)$  auf  $\mathfrak{D}_m(Y)$  gibt, der  $\mathfrak{D}_{sm}(X)$  in  $\mathfrak{D}_{sm}(Y)$  überführt.  
H. Terasaka.

Young jr., Gail S.: On continua whose links are non-intersecting. Bull. Amer. math. Soc. 50, 920—925 (1944).

Verf. untersucht Probleme, die mit dem Beispiel von R. L. Moore (dies. Zbl. 5, 54) eng zusammenhängen.  
H. Terasaka.

Young jr., Gail S.: A generalization of Moore's theorem on simple triods. Bull. Amer. math. Soc. 50, 714 (1944).

Ein Kontinuum heiße eine  $T_n$ -Menge, wenn es Summe ist einer  $n$ -Zelle  $g$  und eines Bogens  $t$  derart, daß  $g \cdot t$  relativ-innerer Punkt von  $g$  und Endpunkt von  $t$  ist. Dann wird bewiesen, daß ein Euklidischer  $E^n$  nicht un abzählbar viele, einander fremde  $T_{n-1}$ -Mengen enthalten kann.  
H. Terasaka.

Sorgenfrey, R. H.: Concerning triodic continua. Amer. J. Math. 66, 439—460 (1944).

Untersucht werden innere Eigenschaften der Kontinuen, insbesondere die Zerlegbarkeit der Kontinuen auf gewisse Arten in drei Teilkontinuen. Verf. gibt insgesamt 8 Typen von Kontinuen an und nennt jeden von ihnen Triod vom Typus  $n$ . Verf. beweist u. a. die folgende Verallgemeinerung des Satzes von R. L. Moore (dies. Zbl. 8, 326): Jedes kompakte, nicht ausgeartete, unikhärente Kontinuum, das nicht Triod vom Typus 3 (= Triod im Sinne von Moore) ist, ist irreduzibel zwischen irgend zwei Punkten.  
H. Terasaka.

Sorgenfrey, R. H.: Some theorems on co-terminal arcs. Bull. Amer. math. Soc. 50, 257—259 (1944).

Bewiesen wird: Wenn  $A, B, C$  Bögen mit dem gemeinsamen Anfangspunkt  $p$  sind, von denen keiner ein Teil der anderen ist, so gibt es einen unter ihnen, der nicht in der Summe der beiden anderen enthalten ist. Der Satz versagt, wenn man statt Bögen irreduzible Kontinuen nimmt. *H. Terasaka.*

Sorgenfrey, R. H.: Concerning continua irreducible about  $n$  points. Amer. J. Math. 68, 667—671 (1946).

Bewiesen wird der Satz: Ein Kontinuum  $M$  ist dann und nur dann irreduzibel um irgend  $n$  Punkte ( $n \geq 2$ ), wenn für jede eigentliche (d. h. minimale) Zerlegung von  $M$  in  $n - 1$  Kontinuen die Summe von  $n$  passend gewählten dieser Kontinuen nicht zusammenhängend wird. *H. Terasaka.*

Ettlinger, M. C.: On irreducible continuous curves. Bull. Amer. math. Soc. 49, 569—574 (1943).

Bewiesen wird u. a. der Satz: Wenn der Raum den Axiomen 0 — 1 von R. L. Moore (dies. Zbl. 5, 54) genügt und  $M$  eine irreduzible stetige Kurve um eine kompakte, abgeschlossene Teilmenge  $T$  von  $M$  ist, so ist  $M$  ein kompaktes irreduzibles Kontinuum um  $T$ . *H. Terasaka.*

(1) Moore, R. L.: Concerning intersecting continua. Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 544—550 (1942).

(2) Moore, R. L.: Concerning a continuum and its boundary. Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 550—555 (1942).

(3) Moore, R. L.: Concerning domains whose boundaries are compact. Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 555—561 (1942).

In (1) und (2) werden eine Menge Sätze bewiesen, betreffend einige Relationen zwischen einem Kontinuum  $M$ , dessen Rand  $B$ , den Komponenten von  $M - B$ , den Komponenten der Komplemente der abgeschlossenen Hüllen der Komponenten von  $M - B$  und dem Durchschnitt von  $M$  mit einem anderen Kontinuum  $K$ . In (3) beweist Verf. Sätze vom Typus des Theorems 81, Kapitel I seines Buches (dies. Zbl. 5, 54) usw. *H. Terasaka.*

(1) Moore, R. L.: Concerning continua which have dendrotonic subsets. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 384—389 (1943).

(2) Moore, R. L.: Concerning webs in the plane. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 389—393 (1943).

(3) Moore, R. L.: A characterization of a simple plane web. Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 311—316 (1946).

(4) Bing, R. H.: Collections filling up a simple plane web. Bull. Amer. math. Soc. 51, 674—679 (1945).

(5) Bing, R. H.: Concerning simple plane webs. Trans. Amer. math. Soc. 60, 133—148 (1946).

Ein kompaktes Kontinuum  $K$  heiße ein Gewebe (web) (1), wenn es zwei stetige Zerlegungen (Alexandroff-Hopf, dies. Zbl. 13, 79)  $Z_1$  und  $Z_2$  von  $K$  gibt derart, daß (a)  $Z_1$  und  $Z_2$  beide baumartig sind in bezug auf ihre Elemente, und (b) es eine un abzählbare Teilmenge  $W$  von  $Z_1$  gibt derart, daß kein Element von  $W$  Teilmenge eines Elementes von  $Z_2$  ist. Ein Gewebe ist ein Triod (1). In der Ebene ist jedes kompakte Kontinuum, das ein Gewebe enthält, selbst ein Gewebe, aber nicht im dreidimensionalen Raum (2). Ein kompaktes Kontinuum in der Ebene heiße ein einfaches ebenes Gewebe (5), wenn statt (b) in der Definition des Gewebes gilt (b'): Der Durchschnitt der Elemente  $g_1 \in Z_1$  und  $g_2 \in Z_2$  ist total unzusammenhängend. In Wirklichkeit ist aber bei dieser Definition die Bedingung (a) überflüssig (4). Ein einfaches ebenes Gewebe wird charakterisiert als eine stetige Kurve (2), welche zusammenhängend und lokal zusammenhängend bleibt, wenn man daraus abzählbar viele Punkte wegnimmt (5). Trennungseigenschaften des einfachen ebenen Gewebes (3). *H. Terasaka.*

Koseki, K.: Über die Begrenzung eines besonderen Gebietes. I, II. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 406—408 (1944); 21 (1945), 385—391 (1949).

Untersuchungen über das beschränkte Kontinuum, das die gemeinsame Begrenzung zweier ebener Gebiete bildet. In (I) ist von der Erreichbarkeit die Rede, in (II) wird insbesondere eine Charakterisierung dafür gegeben, daß das genannten Kontinuum nicht monostratique [vgl. Kuratowski, Fundamenta Math. 12, 20—42 (1928)] sei.

H. Terasaka.

(1) Bing, R. H.: Generalizations of two theorems of Janiszewski. I, II. Bull. Amer. math. Soc. 51, 954—960 (1945); 52, 478—480 (1946).

(2) Bing, R. H.: Sets cutting the plane. Ann. of Math., II. Ser. 47, 476—479 (1946).

Verf. beschäftigt sich mit den Trennungseigenschaften der Ebene oder der Mengen in der Ebene. In (1) [Berichtigungen zu (I) in (II)] werden Verallgemeinerungen der Janiszewskischen Sätze gegeben und in (2) eine Verallgemeinerung des sogenannten Drei-Kontinuen-Satzes von Kuratowski [Monatsh. Math. Phys. 36, 77—80 (1929)] und ein Satz, der Ähnlichkeit hat mit einem Satz von Eilenberg [Fundamenta Math. 24, 160—176 (1935) (s. dies. Zbl. 10, 277), insbes. Théorème 12].

H. Terasaka.

(1) Whyburn, G. T.: Coherent and saturated collections. Trans. Amer. math. Soc. 57, 287—298 (1945).

(2) Whyburn, G. T.: Uniqueness of the inverse of a transformation. Duke math. J. 12, 317—323 (1945).

(3) Whyburn, G. T.: Topological analog of the Weierstrass double series theorem. Bull. Amer. math. Soc. 50, 242—245 (1944).

(4) Whyburn, G. T.: On monotone retractability into simple arcs. Bull. Amer. math. Soc. 52, 109—112 (1946).

(5) Whyburn, G. T.: On the interiority of real functions. Bull. Amer. math. Soc. 48, 942—945 (1942).

(6) Whyburn, G. T.: Homotopy reductions of mappings into the circle. Duke math. J. 11, 35—42 (1944).

(7) Whyburn, G. T.: Interior mappings into the circle. Duke math. J. 11, 431—434 (1944).

(8) Whyburn, G. T.: Boundary alternation of monotone mappings. Duke math. J. 12, 663—667 (1945).

(9) Whyburn, G. T.: Extensions of plane continua mappings. Amer. J. Math. 67, 505—520 (1945).

(1): General results lead up to the following one: in order that a continuum admit a monotone mapping onto an interval it is necessary and sufficient that it contains an uncountable collection of disjoint connected cuttings. (3): It is shown that the limit of a sequence  $f_n(f_n(A) = B, A, B$  continua,  $A$  locally connected) of light interior mappings is factorable in a monotone and a light interior factor. (5)—(9) are dealing chiefly with the question of extending the domain of definition of continuous mappings so as to maintain other properties.

I. Fény.

Kineaid, W. M.: On non-cut sets of locally connected continua. Bull. Amer. math. Soc. 49, 399—406 (1943).

Sei  $S$  ein lokal zusammenhängendes Kontinuum, das eine abgeschlossene Menge  $P$  enthält derart, daß  $S - P$  zusammenhängend ist. Dann läßt sich eine  $P$  enthaltende offene Menge  $R$  finden derart, daß  $R$  Summe einer endlichen Anzahl von Gebieten ist, und daß das Komplement von  $R$  ein lokal zusammenhängendes Kontinuum ist. Gezeigt wird ferner: Falls es eine Familie  $\mathfrak{F}$  von Mengen gibt, deren jede  $S - P$  nicht trennt, so gibt es zwei offene Mengen  $R$  und  $R'$  mit  $R \supset R' \supset P$  vom genannten Typus und mit der Eigenschaft, daß kein zu  $S - R$



gehöriges Element von  $\tilde{\delta} S - R'$  trennt. Ist  $\tilde{\delta}$  eine Familie von Punkten, so kann man  $R' = R$  wählen; dies ist nicht allgemein der Fall. *H. Terasaka.*

(1) Bing, R. H.: The Kline sphere characterization problem. Bull. Amer. math. Soc. 52, 644—653 (1946).

(2) Hall, D. W.: A partial solution of a problem of J. R. Kline. Duke math. J. 9, 893—901 (1942).

(3) Hall, D. W.: A note on primitive skew curves. Bull. Amer. math. Soc. 49, 935—936 (1943).

In (1) wird zum ersten Male die Vermutung von J. R. Kline bewiesen: Eine nicht ausgeartete stetige Kurve  $K$  ist dann und nur dann eine 2-Sphäre, wenn sie (i) durch jede 1-Sphäre, aber (ii) durch keine 0-Sphäre getrennt wird. Der Beweis stützt sich auf Resultate von R. L. Moore, L. Zippin und E. R. van Kampen. In (2) wird der Satz bewiesen unter Hinzufügung der weiteren Bedingung (iii): Für jede 1-Sphäre  $S^1$  ist die Anzahl der Komponenten von  $K - S^1$  endlich. In (3) wird bewiesen, daß ein lokal zusammenhängendes Kontinuum  $K$ , das durch kein Paar seiner Punkte getrennt wird und das keine nicht plättbare Kurve vom Typus I (Kuratowski) enthält, auch keine nicht plättbare Kurve vom Typus II enthält. Diesen Satz wendet dann Verf. an auf den Beweis der (partiellen) Charakterisierung der 2-Sphäre von F. B. Jones, welche lautet: (i) und (ii) dieselbe wie oben, und (iii'):  $K$  enthält keine nicht plättbare Kurve vom Typus I. *H. Terasaka.*

Jones, F. B.: Concerning the separability of certain locally connected metric spaces. Bull. Amer. math. Soc. 52, 303—306 (1946).

Hauptresultat: Ein lokal zusammenhängender, vollständiger, metrischer Raum, der durch keine 0-Sphäre getrennt wird, ist separabel, wenn er keine nicht plättbare Kurve vom Typus I (Kuratowski) enthält. *H. Terasaka.*

Fan, Ky: Quelques propriétés caractéristiques des ensembles possédant la propriété des quatre points et des ensembles filiformes. C. r. Acad. Sci., Paris 216, 553—555 (1943).

Neue Charakterisierungen des Raumes mit der Vier-Punkte-Eigenschaft (Punktepaar  $a, b$  trennt  $c, d$ ) oder des fadenförmigen Raumes ( $b$  trennt  $a, c$ ) (vgl. Ky Fan, dies. Zbl. 26, 274) und damit auch Charakterisierungen der fundamentalen Figuren, d. h. der topologischen Bilder des Bogens, des Strahles, der Geraden oder des Kreises. *H. Terasaka.*

Young jr., Gail S.: Spaces in which every arc has two sides. Ann. of Math., II. Ser. 46, 182—193 (1945).

Charakterisierungen der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten von neuem Standpunkt. Zugrunde liegt ein zusammenhängender, lokal-zusammenhängender, vollständiger Moorescher Raum  $S$ . Verf. führt das folgende Axiom  $\alpha$  ein: Wenn  $ab$  ein (abgeschlossener) einfacher Bogen und  $O$  eine den offenen Bogen  $ab$  enthaltende offene Menge ist, so gibt es ein innerhalb  $O$  gelegenes,  $ab$  enthaltendes Gebiet, welches durch  $ab$  in zwei Gebiete zerlegt wird, die  $ab$  auf ihren Rändern enthalten. Wenn  $S$  dem Axiom  $\alpha$  genügt, so besteht der Satz: Wenn  $S$  lokal zusammenhängend ist, so ist er lokal die Ebene; wenn  $S$  lokal kompakt und metrisch ist, so ist  $S$  eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, und zwar eine offene, falls  $S$  nicht kompakt ist, und eine geschlossene, falls  $S$  kompakt ist. Ein Beispiel zeigt, daß  $S$  sich im allgemeinen nicht in eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit einbetten läßt. Nimmt man aber an, daß  $S$  außer den Axiomen 0—2 von Moore und  $\alpha$  noch dem Axiom  $5_1^*$  von F. B. Jones (vgl. dies. Zbl. 17, 135) genügt, dann läßt  $S$  sich in eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand einbetten, falls  $S$  metrisch ist. *H. Terasaka.*

Lifshitz, Jaime: Ein Satz über Transformationen geschlossener Kurven in sich. Bol. Soc. mat. Mexicana 3, 21—25 (1946) [Spanisch].

Puig Adam, P.: Über die Individualisierung der Richtungen auf geschlossenen ebenen Jordan-Kurven. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 5, 204—214 (1945) [Spanisch].

Volpato, M.: Un criterio per l'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 1, 704—709 (1946).

Mira Fernandes, Aureliano de: Funções contínuas sobre uma superfície esférica. *Portugaliae Math.* 5, 132—134 (1946).

Rey Pastor, J.: Jordans Satz für geschlossene polyedrale Mannigfaltigkeiten. *Revista Un. mat. Argentina* 9, 89—95 (1943) [Spanisch].

Ostrowski, Alexandre: Sur l'inverse d'une transformation continue et biunivoque. *C. r. Acad. Sci., Paris* 223, 229—230 (1946).

Ostrowski, Alexandre: Nouvelle démonstration du théorème de Schoenflies pour les espaces à  $n$  dimensions. *C. r. Acad. Sci., Paris* 223, 530—531 (1946).

Denjoy, Arnaud: Topologie des espaces cartésiens. *C. r. Acad. Sci., Paris* 222, 28—31 (1946).

Sur la topologie des partitions de  $R^n$  en compacts.

*I. Fáry.*

Shkliarsky, D.: On subdivisions of the two-dimensional sphere. *Mat. Sbornik*, n. Ser. 16 (58), 125—128 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Hadwiger, H.: Eine Bemerkung zum Borsukschen Antipodensatz. *Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich* 89, 211—214 (1944).

Hadwiger, H.: Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum. *Portugaliae Math.* 4, 140—144 (1944).

Hadwiger, H.: Überdeckung des Euklidischen Raumes durch kongruente Mengen. *Portugaliae Math.* 4, 238—242 (1945).

If an Euclidean  $n$ -space is covered by  $n + 1$  closed sets (or  $4n - 3$  mutually congruent closed sets), all possible distances are realized by the pairs of points of one of these sets.

*I. Fáry.*

Hopf, Heinz: Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze. *Portugaliae Math.* 4, 129—139 (1944).

Über die Borsuk-Ulamschen, Alexandroff-Hopfischen und Lusternik-Schnirelman-Borsukschen Sätze.

*I. Fáry.*

Lusternik, L.: On categories of some arc families. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. 40, 131—132 (1943).

Abschätzung einer topologischen Kontraktibilitätsinvariante (= „Kategorie“) von Teilmengen im Raum der rektifizierbaren Bogen auf einer 2-Sphäre, welche zwei feste Punkte verbinden.

*G. Aumann.*

Scorza Dragoni, G.: Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un autoomeomorfismo del piano. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 1, 156—161 (1946).

Scorza Dragoni, G.: A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo del piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 1, 697—704 (1946).

Scorza Dragoni, G.: Ancora sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 1, 918—922 (1946).

Scorza Dragoni, G.: Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 1, 1163—1166 (1946).

Vgl. Verf., dies. Zbl. 31, 287; 36, 130; 38, 362.

*I. Fáry.*

(1) Freudenthal, Hans: *Simplizialzerlegungen von beschränkter Flachheit*. Ann. of Math., II. Ser. **43**, 580—582 (1942).

(2) Matsumoto, Toshizô: *Über die Einteilung des Simplexes*. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **23**, 245—252 (1941).

(1): Zerlegungen eines  $r$ -dimensionalen Polytops in beliebig kleine Simplexe vom Durchmesser  $d$  und Volumen  $v$ , so daß  $d/v$  gleichmäßig beschränkt bleibt.

(2): Elementare Unterteilungen simplizialer geradkantiger Komplexe in Simplexe von höchstens halb so großem Durchmesser. *H. Künneth*.

(1) Leray, Jean: *Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations*. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **24**, 95—167 (1945).

(2) Leray, Jean: *Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique*. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **24**, 169—199 (1945).

(3) Leray, Jean: *Sur les équations et les transformations*. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **24**, 201—248 (1946).

These three articles reproduce a course of lectures delivered by Prof. J. Leray in a camp of prisoners of war. As he says himself in the Introduction, his first idea was to create a theory of equations in topological spaces in which the indirect methods used formerly by Schauder and himself (extensions of Brouwer's results to function spaces) would be avoided. This implied new conceptions of the cohomology ring of a space; indeed a new algebraic topology. During the preparation of his lectures the author had only at his disposal the celebrated treatise of Alexandroff and Hopf, being unable to consult the new edition (1942) of Lefschetz treatise, as well as the important articles published in the USA about the same time. The first article sets forth a theory of a cohomology — called by the author homology ring of topological spaces leading, for compact spaces (compact in the sense of N. Bourbaki), to the determination of the Lefschetz number. As it has become usual now, abstract complexes are first studied, then concrete complexes. By the side of the „covering-nerve“ scheme, a new one, that of „cover“ (couverture) is defined. It has been studied more elaborately by Leray in a recent memoir (this Zbl. **38**, 363). Considering certain infinite families of covers, a cohomology group of a topological space is easily defined. As S. Eilenberg has remarked, this group is most likely isomorphic with the Čech group defined in Lefschetz' book. When the cover of a compact space has carriers which are „simple“ (i. e. having the homology group of a point), then the cohomology group determined by this cover is the same as the one mentioned above. Utilizing a theory of duality similar to that developed by Lefschetz, the author derives homology groups from his cohomology groups and then obtains for compact spaces the Lefschetz number  $L_\xi$  of a transformation  $\xi$  of this compact space into itself. Finally he proves, under some restrictive assumptions, that if  $A_\xi \neq 0$ , then  $\xi$  has a fixed point. In this connection, S. Eilenberg has pointed out that these assumptions exclude the case of an absolute neighbourhood retract. (2) is devoted to what is now called cohomology ring modulo a subset. Apart from interesting applications to manifolds, the author introduces here a new notion, that of pseudo-cycle. In the terminology of Lefschetz, they might be defined as the inverse limit of the cohomology rings of the compact subspaces. They are to be widely utilized in the third article and have been much generalized, in recent times, by the author and H. Cartan under the name of „faisceaux“. (3) is about a general theory of equations in a compact space. The notion of Lefschetz number attached to a transformation  $\xi$  of a space  $X$  into itself is now adapted to the case of the continuous mapping of a closed subset of  $X$  into  $X$ . If  $O$  is an open set of  $X$  and  $\xi$  a transformation defined in  $\bar{O}$  in such a manner that  $x - \xi(x)$  has no zero in  $\bar{O} - O$ , then an integer  $i(O)$  — the index — is defined as the algebraic number of solutions



of the equation  $x = \xi(x)$  in  $O$ . If  $O = X$ ,  $i(O) = A_\varepsilon$ . Some generalizations of the index are then given. They are obtained by long and very complicated methods. Finally an extremely elegant application of the notion of index is made to a new demonstration of the famous theorem of the „invariance of the domain“ which, proved by Brouwer in the case of an  $n$ -dimensional space, had been generalized by Schauder to the case of a Banach space. *C. Racine.*

Leray, Jean: L'anneau d'homologie d'une représentation. C. r. Acad. Sci. Paris 222, 1366—1368 (1946).

Leray, Jean: Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1419—1422 (1946).

The author defines notions and announces results which are the basis of a theory elaborately treated by him in a recent article (this Zbl. 8, 363).

*C. Racine.*

Leray, Jean: Propriétés de l'anneau d'homologie de la projection d'un espace fibré sur sa base. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 395—397 (1946).

Leray, Jean: Sur l'anneau d'homologie de l'espace homogène, quotient d'un groupe clos par un sous-groupe abélien, connexe, maximum. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 412—415 (1946).

Applications of the general theory (s. this Zbl. 38, 363) to the case of fibre bundles. Most of the results have been more elaborately treated by the author in a recent article (this Zbl. 39, 191).

*C. Racine.*

Alexandroff, P.: On homological situation properties of complexes and closed sets. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 6, 227—282 (1942) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Alexandroff, Paul: On homological situation properties of complexes and closed sets. Trans. Amer. math. Soc. 54, 286—339 (1943).

Alexandroff, P.: Allgemeiner Dualitätssatz für Projektionsspektren und für im Kleinen bikompakte Räume. Soobščeniija Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 2, 315—319 (1941).

Voranzeige, russische und englische Fassung der gleichen Arbeit: Ausführliche Darstellung der verschiedenen Dualitätsbeziehungen für Homologie- und Kohomologiegruppen eines abgeschlossenen Unterkomplexes  $A$  eines Komplexes  $K$  und des offenen Restkomplexes  $K - A$ . Übertragung der Ergebnisse auf lokal-bikompakte normale Räume  $K$  und abgeschlossene Untermengen  $A$  mittels Gruppenspektren (verallgemeinerter Dualitätssatz von Alexander-Kolmogoroff). Anwendungen auf Mannigfaltigkeiten (verallgemeinerter Dualitätssatz von Alexander-Pontrjagin). Die Beweismethoden und ein Teil der Ergebnisse sind inzwischen in der Lehrbuchliteratur zugänglich: Lefschetz (Algebraic topology, New York 1942; insbes. Kap. 3) und Alexandroff [Kombinatorische Topologie (dies. Zbl. 37, 97), insbes. Kap. 13, 14]. Weitere Entwicklung der Dualitätstheorie für nicht-abgeschlossene Mengen siehe insbesondere Alexandroff (dies. Zbl. 33, 133) und Čogošvili (dies. Zbl. 42, 169).

*E. Burger.*

Chogoshvili, George: Théorème de dualité pour le polyèdre infini. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 15—17 (1945).

Chogoshvili, G.: On the duality law in normal spaces. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 48, 233—235 (1945).

Chogoshvili, G.: On duality relations in topological spaces. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 46, 131—132 (1945).

Chogoshvili, G.: The duality law for retracts. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 51, 91—94 (1946).

Die Arbeiten enthalten die ersten Dualitätssätze für nicht-abgeschlossene Mengen. Ausführliche Darstellung vgl. dies. Zbl. 42, 169; 45, 440. Siehe ferner Alexandroff (dies. Zbl. 33, 133).

*E. Burger.*

**Bockstein, M.:** Universal systems of  $\mathbb{F}$ -homology rings. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 37, 243—245 (1942).

**Bockstein, M.:** A complete system of fields of coefficients for the  $\mathbb{F}$ -homological dimension. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 38, 187—189 (1943)

**Bockstein, M.:** Homological invariants of the topological product of two spaces. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 40, 339—342 (1943).

For a locally compact space  $A$  the modular  $\mathbb{F}$ -spectrum of  $A$ , which is the collection of cohomology rings  $V(A, I_m)$  ( $I_m$  being the ring of integers reduced mod  $m$ ,  $m = 0$  or a power of a prime) together with the homomorphisms induced by  $\pi_m^m: I_m \rightarrow I_{m'}$  (reduction mod  $m: m|m'$ ) and by  $\omega_m^m: I_{m'} \rightarrow I_m$  (multiplication by  $m'/m; m|m', m' \neq 0$ ), determines the cohomology ring  $V(A, \mathbb{R})$  for any coefficient ring  $\mathbb{R}$ , and the complete modular  $\mathbb{F}$ -spectrum of the product space  $A \times B$  is determined by those of  $A$  and  $B$ . The cohomology dimension (due to Alexandroff) is determined for any coefficient group if it is known for the groups of (a) rationals, (b) rationals with denominators not divisible by  $p$ , (c) integers mod  $p$ , (d) rationals with powers of  $p$  as denominators ( $p$  being primes). The sketches of proofs are given. For the formula describing the cohomology dimension of  $A \times B$  by those of  $A$  and  $B$  (given in the third paper) cf. the author's paper reviewed in this Zbl. 34, 255.

K. Morita.

**Clark, C. E.:** On the join of two complexes. Bull. Amer. math. Soc. 49, 126—129 (1943).

**Clark, C. E.:** The Betti groups of the product of two normal spaces. Bull. Amer. math. Soc. 49, 307—313 (1943).

**Clark, C. E.:** The Betti groups of symmetric and cyclic products. Bull. Amer. math. Soc. 49, 450—454 (1943).

**Clark, C. E.:** The symmetric join of a complex. Bull. Amer. math. Soc. 50, 81—88 (1944).

Die „Verbindung“ (join)  $(K_1, K_2)$  zweier Komplexe  $K_1$  und  $K_2$  wird von der Gesamtheit der Strecken  $pq$  ( $p \in K_1; q \in K_2$ ) gebildet, wobei zwei Strecken höchstens Endpunkte gemein haben. Ist  $K_1 = K_2$  und  $\lim_{q \rightarrow p} pq = p$ , so erhält man die „symmetrische Verbindung“  $J(K_1)$ . Die Menge der Mittelpunkte von  $pq$  ist homöomorph dem topologischen Produkt  $K_1 \times K_2$ , bzw. dem symmetrischen Produkt  $S(K_1)$  von  $K_1$ . Die Bettische Gruppe  $B^{r+1}$  von  $(K_1, K_2)$  ist isomorph zu einer Untergruppe der Bettischen Gruppe  $B^r$  von  $K_1 \times K_2$ . Eine Basis ihrer Erzeugenden wird angegeben. — Die innere Bettische Cohomologie-Gruppe des topologischen Produktes offener Mengen normaler Räume, sowie die des  $n$ -fachen symmetrischen und des zyklischen Produktes wird bestimmt. Da hier Cozyklen an Stelle von Zyklen der Untersuchung zugrunde gelegt werden, erhält Verf. weitergehende Ergebnisse als Richardson (dies. Zbl. 11, 179) und Walker (dies. Zbl. 15, 178).

H. Künneth.

**Ephräimowitsch, V. A.:** On non-decomposability into a topological product. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 49, 470—471 (1945).

Ein  $n$ -dimensionaler separabler metrischer Raum, dessen  $n$ -dimensionale Bettische Zahl positiv und dessen Poincaré-Polynom mit dem Ring der ganzen Zahlen oder dem Restklassenring mod. einer Primzahl als Koeffizientenbereich irreduzibel ist, kann kein topologisches Produkt sein.

H. Künneth.

**Scott, D. B.:** Intersection groups and rings. Proc. Cambridge philos. Soc. 42, 183—184 (1946).

L'A. définit sur l'homologie d'une variété, ce qui, transposé en cohomologie par la dualité de Poincaré, serait le quotient de l'anneau de cohomologie par un idéal.

R. Thom.

Peiser, Alfred M.: Covering mappings. Duke Math. J. 10, 305—307 (1943).

Bedingungen werden dafür gefunden, daß ein Element der Fundamentalgruppe eines Raumes eine Deckabbildung, bzw. eine Deckbewegung eines gegebenen Überlagerungsraumes bestimmt. *T. Ganea.*

(1) Kiang, Tsai-han: An application of the addition formulas of Mayer-Vietoris. Sci. Record 1, 275—276 (1945).

(2) Kiang, Tsai-han: Remarks on two-leaved orientable covering manifolds of closed manifolds. Ann. of Math., II. Ser. 44, 128—130 (1943).

Dans (1) l'A. établit, pour des cas particuliers, des relations entre les nombres de Betti d'une variété non orientable et son revêtement à deux feuillets orientables; dans (2) il retrouve, toujours dans le cas des variétés revêtements à deux feuillets, quelques résultats classiques en théorie des revêtements. *R. Thom.*

Hirsch, Guy: Sur les groupes d'homologie de certains complexes de recouvrement. Portugaliae Math. 4, 225—237 (1945).

Soit  $\hat{C}$  un revêtement à  $f$  feuillets du complexe  $C$ , supposé galoisien; soient, pour toute dimension  $r$ ,  $H'_r(\hat{C})$ ,  $H'_r(C)$  les quotients des groupes d'homologie par les éléments de torsion dont l'ordre divise  $f$ . Si le groupe d'automorphismes du revêtement opère trivialement sur  $H_r(\hat{C})$ , alors ces deux groupes sont isomorphes, et les nombres de Betti de  $\hat{C}$  et  $C$  sont égaux; enfin, en coefficients mod  $m$ , où  $m$  est premier à  $f$ , les homologies de  $\hat{C}$  et  $C$  sont isomorphes. Application aux groupes de Lie localement isomorphes, et aux variétés revêtues par des sphères. *R. Thom.*

(1) Hirsch, Guy: Topologie. Sur un problème de H. Hopf. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 12, 514—522 (1943).

(2) Hirsch, Guy: Sur des théorèmes de Borsuk-Ulam et de Knaster. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 13, 137—145 (1944).

(3) Hirsch, Guy: Quelques théorèmes sur les points fixes des groupes de représentations. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 12, 392—407 (1943).

(4) Hirsch, Guy: Sur des propriétés de représentations permutables et des généralisations d'un théorème de Borsuk. Ann. Sci. École norm. sup., III. Sér. 60, 113—142 (1943).

Soit  $C$  un polyèdre, et  $T: C \rightarrow C$  permutable avec un groupe  $A$  de transformations de  $C$ . Désignons par  $B \subset A$  le sous-groupe engendré par les  $\tau \in A$ , tels que  $x = \tau(x) = T(x)$  pour un  $x \in C$ . Le nombre de Lefschetz de  $T$  est alors un multiple de l'indice de  $B$  dans  $A$ . Ce résultat est formulé dans (3): (1) et (2) concernent des cas particuliers, (4) des applications. Les théorèmes de Borsuk (ce Zbl. 6, 424), Eilenberg (ce Zbl. 23, 381), P. A. Smith (Lefschetz, Algebraic Topology, New York 1942, Appendix B) en sont applications; il généralise à  $n$  dimensions certains résultats connus pour les surfaces seulement (J. Nielsen).

*I. Fâry.*

Hirsch, G.: Une propriété des points fixes des représentations de variétés en elles-mêmes. Bull. Sci. math., II. Sér. 67, 158—168 (1943).

Dedecker, Paul: Sur la notion d'involution et la formule de Zeuthen. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 29, 680—687 (1943).

Dedecker, Paul: Sur la notion d'involution et la formule de Zeuthen. II. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 30, 58—66 (1945).

Remarques sur l'origine combinatoire de la formule de Zeuthen, et généralisations qui s'en déduisent. *R. Thom.*

Civin, Paul: Two-to-one mappings of manifolds. Duke math. J. 10, 49—57 (1943).

Soit  $f: M \rightarrow P$  une application telle que l'image inverse  $f^{-1}(x)$  de tout point  $x$  de  $P$  se compose de deux points. Si  $M$  et  $P$  sont des variétés, et si  $f$  est fermée,



$f$  est un revêtement à deux feuillets:  $P$  ne peut donc être simplement connexe, si  $M$  est connexe. L'A. ne semble pas s'être aperçu de ce résultat, dont il ne signale que des cas particuliers. R. Thom.

Flexner, William W.: Non-commutative chains and the Poincaré group. Duke math. J. 8, 497—505 (1941).

Flexner, William W.: Non-commutative chains. II. Ann. of Math., II. Ser. 44, 628—642 (1943).

Mittels nicht-kommutativer Ketten der Dimensionen 0, 1, 2 werden für ein abstraktes System  $S$  von Zellen, das gewissen Bedingungen genügt, zwei „unterteilungsinvariante“ Gruppen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  definiert. Falls  $S$  ein geometrischer Zellkomplex ist, ist  $\mu_1$  die Fundamentalgruppe,  $\mu_2$  ist abelsch und wird für einige spezielle Komplexe berechnet. E. Burger.

Komatu, Atuo: Zur Topologie der Abbildungen von Komplexen. Japanese J. Math. 17, 201—228 (1941).

Verallgemeinerung der Eilenbergsehen Obstruktionstheorie (dies. Zbl. 22, 407) auf den Fall nicht-einfacher Bildkomplexe mit Benutzung der Reidemeisterschen Überdeckungen. Vgl. die (im übrigen allgemeinere) Darstellung bei Olum (dies. Zbl. 38, 366), wo statt der Überdeckungen lokale Koeffizienten benutzt werden. Anwendungen auf die Frage nach der Wesentlichkeit von Abbildungen in Mannigfaltigkeiten und der Stabilität im Großen von Komplexen. E. Burger.

Whitehead, J. H. C.: Note on a previous paper entitled „On adding relations to homotopy groups“. Ann. of Math., II. Ser. 47, 806—810 (1946).

Der Fall  $n = 2$  des vom Verf. (dies. Zbl. 27, 264) behandelten Problems wird vereinfacht durch die Bemerkung, daß die l. c. konstruierte Gruppe  $h_n$  isomorph ist zur relativen Homotopiegruppe  $\pi_2(X^*, X)$ . Weiter ist das l. c. angegebene algebraische Verfahren zur Bestimmung der Homotopiegruppe  $\pi_2$  im wesentlichen identisch mit der bekannten Methode,  $\pi_2$  als Homologiegruppe der universellen Überlagerung aufzufassen. E. Burger.

(1) Whitehead, George W.: On the homotopy groups of spheres and rotation groups. Ann. of Math., II. Ser. 43, 634—640 (1942).

(2) Whitehead, George W.: On products in homotopy groups. Ann. of Math., II. Ser. 47, 460—475 (1946).

(3) Whitehead, George W.: A generalization of the Hopf invariant. Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 188—190 (1946).

(4) Hu, Sze-tsen: Concerning the homotopy groups of the components of the mapping space  $Y^{S^p}$ . Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 1025—1031 = Indagationes math. 8, 623—629 (1946).

Die  $p$ -te Homotopiegruppe eines Raumes  $X$  wurde ursprünglich von Hurewicz definiert als Fundamentalgruppe des Raumes  $F_{p-1}^p(X, x_0)$ . Dabei bezeichnet  $F^p(X, x_0)$  den Raum der Abbildungen  $(S^p, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  und  $F_{p-1}^p(X, x_0)$  die Komponente der Nullabbildung. Whitehead beweist, daß die Komponenten  $F_q^p(X, x_0)$  des Raumes  $F^p(X, x_0)$  alle vom gleichen Homotopietyp sind und daß allgemein  $\pi_k(F_2^p(X, x_0)) \approx \pi_{k+p}(X)$  ist (vgl. hierzu auch Hu, dies. Zbl. 29, 422; 30, 177). Die Rotationsgruppe  $R_{p-1}$  von  $S^{p-1}$  ist in natürlicher Weise in  $F_p^p(S^p, x_0)$  eingebettet, wobei  $t_p$  die Identität bezeichnet. Auf diese Weise entsteht ein natürlicher Homomorphismus  $H: \pi_q(R_{p-1}) \rightarrow \pi_{p+q}(S^p)$ . Wird  $\alpha \in \pi_q(R_{p-1})$  in üblicher Weise durch eine Abbildung  $S^q \times S^{p-1} \rightarrow S^{p-1}$  dargestellt, so wird eine repräsentierende Abbildung von  $H(\alpha)$  gewonnen nach einem Verfahren, das im Spezialfall  $q = p - 1$  von H. Hopf (dies. Zbl. 12, 319) angegeben wurde. Für  $q = 1$  ist  $H$  ein Isomorphismus auf. Das für  $q = 2$  angegebene Resultat trifft nicht zu, da von der früheren falschen Behauptung von Pontrjagin über  $\pi_{p+2}(S^p)$  ausgegangen wird. In-

zwischen hat G. W. Whitehead (dies. Zbl. 49, 241) ein anderes Verfahren angegeben, um das nicht-triviale Element von  $\pi_{p+2}(S^p)$  aus der Rotationsgruppe von  $S^{p-1}$  zu bestimmen. — Durch den Isomorphismus  $\pi_k(F_\alpha^p(X, x_0)) \approx \pi_{k+p}(X)$  lassen sich die Whiteheadsche Produktbildung und die Einhängung als natürliche Operationen in Abbildungsräumen charakterisieren. Durch diese Übertragung beweist Whitehead u. a., daß die Einhängung eines Produktes immer verschwindet. Hieraus folgt, daß der Kern der Einhängung  $\pi_{2r-1}(S^r) \rightarrow \pi_{2r}(S^{r+1})$  bei geradem  $r$  durch das Produkt  $[\iota_r, \iota_r]$  erzeugt wird. Dasselbe hat er später auch für ungerades  $r$  gezeigt (dies. Zbl. 41, 519). Weiter werden die verallgemeinerten (mittels Elementen der Rotationsgruppen erklärten) Produkte von J. H. C. Whitehead (dies. Zbl. 27, 264) durch die gewöhnlichen Produkte und den Homomorphismus  $H$  ausgedrückt, wodurch sich die Vermutung von J. H. C. Whitehead bestätigen läßt, daß durch diese verallgemeinerten Produkte ein Isomorphismus von  $\pi_1(R_{p-1})$  auf  $\pi_{p+1}(S^p)$  ausgedrückt werden kann. — (3) ist die Voranzeige der schon erwähnten späteren Arbeit (dies. Zbl. 41, 519). — Im Gegensatz zu  $F^p(X, x_0)$  haben, wie Whitehead durch ein Beispiel zeigt, die Komponenten des Abbildungsraumes  $G^p(X)$  der Abbildungen  $S^p \rightarrow X$  im allgemeinen nicht den gleichen Homotopietyp. Hu gibt hierzu weitere Beispiele, in denen er (im wesentlichen mittels der oben erwähnten Methoden von Whitehead) die Homotopiegruppen dieser Komponenten in einigen Fällen bestimmt. Insbesondere ist  $\pi_1(G_m^2(S^2))$  zyklisch von der Ordnung  $2|m|$ , wobei  $G_m^2(S^2)$  die Komponente der Abbildungen vom Abbildungsgrad  $m$  bezeichnet. Einige der berechneten Ergebnisse treffen nicht zu, da ebenfalls von dem falschen Wert von  $\pi_{p-2}(S^p)$  Gebrauch gemacht wird. Vgl. Hu, dies. Zbl. 29, 422. *E. Burger.*

**Hu, Sze-tsen:** Homotopy properties of the space of continuous paths. *Portugaliae Math.* 5, 219—231 (1946).

Vgl. Teil II dieser Arbeit (dies. Zbl. 46, 406), wo die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit teils zitiert, teils verallgemeinert werden. *E. Burger.*

**Fox, Ralph H.:** On topologies for function spaces. *Bull. Amer. math. Soc.* 51, 429—432 (1945).

In der Homotopietheorie wird eine Homotopie  $h: X \times T \rightarrow Y$  ( $T$  = Einheitsintervall) sehr oft als Weg  $h^*: T \rightarrow Y^X$  im Abbildungsraum  $Y^X$  gedeutet. Verf. bezeichnet als „compact-open topology“ von  $Y^X$  die Topologie, bei der als Unterbasis für die offenen Mengen von  $Y^X$  die Mengen  $M(A, W)$  derjenigen Abbildungen, die eine kompakte Untermenge  $A$  von  $X$  in eine offene Menge  $W$  von  $Y$  abbilden, gewählt werden. Bei dieser Topologie für  $Y^X$  ist, falls  $X$  regulär und lokal-kompakt ist, für einen beliebigen topologischen Raum  $T$  die Stetigkeit von  $h$  äquivalent mit der Stetigkeit der (analog zu oben erklärten) Abbildung  $h^*$ . Das gleiche gilt, falls  $X$  und  $T$  dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen. Für separabel metrisches  $X$  und  $Y$  = Zahlengerade kann  $Y^X$  dann und nur dann so topologisiert werden, daß für alle topologischen Räume  $T$  Stetigkeit von  $h$  und  $h^*$  äquivalent sind, wenn  $X$  lokal-kompakt ist. *E. Burger.*

**Fox, Ralph H.:** On the deformation retraction of some function spaces associated with the relative homotopy groups. *Ann. of Math., II. Ser.* 44, 51—56 (1943).

Seien  $A_\lambda$  und  $B_\lambda$  topologische Räume mit je einer Folge von Unterräumen  $A_\lambda \supset A_{\lambda-1} \supset \dots \supset A_0 \supset \dots \supset A_{-\mu}$  bzw.  $B_\lambda \supset B_{\lambda-1} \supset \dots \supset B_0 \supset \dots \supset B_{-\mu}$ . Sei  $B'_0$  ein Deformationsretrakt von  $B_0$ , so daß bei der retrahierenden Deformation die  $B_{-1}, \dots, B_{-\mu}$  in sich deformiert werden. Verf. gibt hinreichende Bedingungen dafür an, daß der Abbildungsraum der Abbildungen  $(A_\lambda, A_{\lambda-1}, \dots, A_0, \dots, A_{-\mu}) \Rightarrow (B_\lambda, B_{\lambda-1}, \dots, B'_0, \dots, B_{-\mu})$  Deformationsretrakt des Raumes der Abbildungen  $(A_\lambda, \dots, A_0, \dots, A_{-\mu}) \Rightarrow (B_\lambda, \dots, B_0, \dots, B_{-\mu})$  ist. Dies gilt z. B., falls  $A_\lambda$  kompakt,  $A_0, \dots, A_{\lambda-1}$  abgeschlossen und  $B_0, B'_0, B_1, \dots, B_\lambda$  kompakte absolute Umgebungsretrakte sind. *E. Burger.*

Fox, R. H.: On homotopy type and deformation retracts. Ann. of Math., II. Ser. 44, 40—50 (1943).

Samelson, Hans: Remark on a paper by R. H. Fox. Ann. of Math., II. Ser. 45, 448—449 (1944).

Der Begriff des Homotopietyps wird in natürlicher Weise in die beiden Begriffe Rechts- bzw. Linkshomotopieinversion gespalten. Falls die Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine Links- und eine Rechtshomotopieinverse hat, hat sie auch eine zweiseitige Inverse, d. h.  $X$  und  $Y$  sind vom gleichen Homotopietyp. Sei  $\theta: X \rightarrow Z$  gegeben. Dann gibt es zu  $f: X \rightarrow Y$  dann und nur dann eine Abbildung  $g: Y \rightarrow Z$  mit  $g \circ f \sim \theta$ , wenn  $\theta$  auf den Abbildungszyylinder der Abbildung  $f$  fortsetzbar ist. Ist umgekehrt  $g: Y \rightarrow Z$  gegeben, so gibt es dann und nur dann eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $g \circ f \sim \theta$ , wenn  $\theta$  im Abbildungszyylinder von  $g$  zu einer Abbildung  $X \rightarrow Y$  homotop ist. Spezialfall:  $f$  hat dann und nur dann eine Linkshomotopieinverse, wenn  $X$  ein Retrakt des Abbildungszyinders von  $f$  ist;  $g$  hat dann und nur dann eine Rechtshomotopieinverse, wenn der Abbildungszyylinder von  $g$  in  $Y$  deformiert werden kann. Folgerungen:  $f: X \rightarrow Y$  hat dann und nur dann eine zweiseitige Homotopieinverse, wenn  $X$  Deformationsretrakt des Abbildungszyinders von  $f$  ist. Zwei Räume  $X$  und  $Y$  haben dann und nur dann den gleichen Homotopietyp, wenn sie beide Deformationsretrakte in einem dritten Raum  $W$  sind. Weitere Anwendungen u. a. auf den Satz von Hopf-Pannwitz und weitere Spezialisierungen. Verallgemeinerung der Sätze auf den  $n$ -Homotopietyp statt des Homotopietyps (vgl. hierzu auch Whitehead, dies. Zbl. 40, 387). *E. Burger.*

Christie, D. E.: Net homotopy for compacta. Trans. Amer. math. Soc. 56, 275—308 (1944).

Sei  $\{\phi_\lambda; \pi_\lambda^\mu\}$  das Spektrum der Nerven  $\phi_\lambda$  der offenen Überdeckungen eines Kompaktums  $R$  mit zugehörigen Projektionen  $\pi_\lambda^\mu$ . Eine Menge  $\{t_\lambda\}$  von Abbildungen  $t_\lambda: S \rightarrow R$  mit der Permanenzbedingung  $t_\lambda \simeq \pi_\lambda^\mu t_\mu$  in  $\phi_\lambda$  heißt „space-net mapping“ von  $S$  in  $R$ . Zwei solche Abbildungen  $\{t_\lambda\}$  und  $\{t'_\lambda\}$  heißen homotop, wenn  $t_\lambda \simeq t'_\lambda$  für alle  $\lambda$ . Mittels dieser Begriffe lassen sich verallgemeinerte Homotopiegruppen  $H_n(R)$  analog zu den gewöhnlichen Homotopiegruppen  $\pi_n(R)$  erklären. Die Addition ist dabei komponentenweise erklärt. Diese Gruppen  $H_n(R)$  bleiben, wie an Beispielen gezeigt wird, sinnvoll für nicht stetig-zusammenhängende Räume, für die die Gruppen  $\pi_n(R)$  nicht brauchbar sind. Die Gruppen  $H_n(R)$  stehen zu der Čechschen Homologietheorie von  $R$  in ähnlicher Beziehung wie die  $\pi_n(R)$  zur singulären (Äquivalenzsatz von Hurewicz). Außer den Gruppen  $H_n(R)$  werden noch durch gewisse verschärfte Bedingungen die „starken“ Homotopiegruppen  $H_n^*(R)$  definiert. Die Gruppen  $H_n(R)$  und  $H_n^*(R)$  können noch in einer zweiten Weise definiert werden, nämlich unter Benutzung des Systems der Umgebungen von  $R$  in einem umfassenden Parallelotop  $P$ . *E. Burger.*

Shih, Hsiang-Lin: Mappings of 2-manifolds into a space. Duke math. J. 10, 179—207 (1943).

Robbins (dies. Zbl. 21, 361) hat eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Homotopie zweier Abbildungen eines zweidimensionalen Polyeders  $K$  in einen topologischen Raum  $Y$  angegeben, die jedoch sehr kompliziert und unhandlich ist. Verf. erhält mit ähnlichen Methoden für den Fall, daß  $K$  eine Mannigfaltigkeit ist, eine übersichtlichere Homotopiebedingung, die u. a. in folgenden Fällen zu einer expliziten Bestimmung der Abbildungsklassen benutzt wird: 1)  $K$  = orientierbare geschlossene Fläche,  $Y$  = pseudoprojektive Ebene der Ordnung  $m$  (Fundamentalpholygon  $a a \dots a$  mit  $m$  Gliedern); 2)  $K$  = nicht-orientierbare Fläche,  $Y$  = pseudoprojektive Ebene ungerader Ordnung; 3)  $K$  = projektive Ebene,  $Y$  = pseudoprojektive Ebene gerader Ordnung (hierzu vgl. auch Gordon, dies. Zbl. 42, 175 und 46, 167). Dieses Problem ist ein Spezialfall



eines allgemeineren Homotopieproblems (s. Olum, dies. Zbl. 50, 174, und Postnikov, dies. Zbl. 41, 519). *E. Burger.*

**Pontrjagin, L.:** Mappings of the three-dimensional sphere into an  $n$ -dimensional complex. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 34, 35—37 (1942).

Spezialfall eines später wesentlich allgemeiner gelösten Problems. Vgl. die ausführliche Darstellung des Verf. (dies. Zbl. 41, 519) sowie als Ergänzung dies. Zbl. 41, 319. In der vorliegenden Arbeit wird zum erstenmal die „Pontrjaginsche Quadrierungsoperation“ eingeführt, die später oft benutzt (vgl. z. B. Whitehead, dies. Zbl. 37, 261) und weitgehend verallgemeinert wurde (vgl. Steenrod, dies. Zbl. 30, 416). *E. Burger.*

(1) Pontrjagin, L.: Characteristic cycles. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 47, 242—245 (1945).

(2) Pontrjagin, L.: Classification of some skew products. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 47, 322—325 (1945).

(3) Kiang, Tsai-Han: The manifolds of linear elements of an  $n$ -sphere. Bull. Amer. math. Soc. 51, 417—428 (1945).

(4) Chern, Shiing-Shen: On Riemannian manifolds of four dimensions. Bull. Amer. math. Soc. 51, 964—971 (1945).

(1) enthält die Definition der charakteristischen Klassen [N. Steenrod, Topology of fibre bundles (dies. Zbl. 54, 71), insbes. § 38] und der universellen Faserungen (Steenrod § 19), (2) den Klassifikations-Satz für den  $R^n$  als Faser, wobei die Grassmann-Mannigfaltigkeiten die universellen Faserbündel liefern (vgl. auch H. Cartan, dies. Zbl. 45, 306). Daneben wird für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten die Pontrjaginsche charakteristische Klasse eingeführt, die mit der in (4) eingeführten Klasse identisch ist [S. S. Chern, Topics in differential geometry (dies. Zbl. 54, 68)]. In (3) wird speziell die Homologiestruktur der Linienelementräume über Sphären bestimmt. *H. Guggenheimer.*

**Fox, Ralph H.:** On fibre spaces. I, II. Bull. Amer. math. Soc. 49, 555—557, 733—735 (1943).

**Hopf, H.:** Bericht über einige neue Ergebnisse in der Topologie. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 6, 147—159 (1946).

**Ehresmann, C.:** Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement. Bull. Soc. math. France 72, 27—54 (1944).

**Ehresmann, C.:** Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable. C. r. Acad. Sci., Paris 216, 628—630 (1943).

**Hurewicz, W. and N. E. Steenrod:** Homotopy relations in fibre spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 60—64 (1941).

**Laboureur, Jacques (Feldbau, J.):** Propriétés topologiques du groupe des automorphismes de la sphère  $S^n$ . Bull. Soc. math. France 71, 206—211 (1943).

**Steenrod, N. E.:** The classification of sphere bundles. Ann. of Math., II. Ser. 45, 294—311 (1944).

**Whitehead, J. H. C.:** On the groups  $\pi_r(F_{n,m})$  and sphere bundles. Proc. London math. Soc., II. Ser. 48, 243—291 (1944). Correction: *ibid.* 49, 479—481 (1945).

**Whitehead, George W.:** On families of continuous vector fields over spheres. Ann. of Math., II. Ser. 47, 779—785 (1946). Correction: *ibid.* 48, 782—783 (1947).

**Whitehead, George W.:** Homotopy properties of the real orthogonal groups. Ann. of Math., II. Ser. 43, 132—146 (1942).

**Chern, Shiing-Shen:** Characteristic classes of Hermitian manifolds. Ann. of Math., II. Ser. 47, 85—121 (1946).

Tous ces travaux sont traités dans le livre de N. E. Steenrod, Topology of fibre bundles (ce Zbl. 54, 71). *H. Guggenheimer.*

**Hirsch, Guy:** Sur un théorème de Hopf-Rueff. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 29, 516—524 (1943).

Démonstration d'un théorème de Hopf et Rueff (ce Zbl. 19, 372) qui permet d'étendre ce théorème du champ complexe au quaternionien. *H. Guggenheimer.*

Montgomery, Deane and Hans Samelson: Fiberings with singularities. *Duke math. J.* 13, 51—56 (1946).

Étude de l'homologie des espaces fibrés avec singularités ponctuelles, surtout en considérant la clôture des espaces fibrés véritables obtenus en levant la singularité. *H. Guggenheimer.*

Kuratowski, Casimir: Théorèmes sur l'homotopie des fonctions continues de variable complexe et leurs rapports à la théorie des fonctions analytiques. *Fundamenta Math.* 33, 316—367 (1945).

Étude des classes d'homotopie des fonctions définies et continues sur un ensemble  $X \subset S_2$  à valeurs dans  $P$  (plan complexe pointé en 0 et  $\infty$ ) et extension aux fonctions complexes continues de théorèmes classiques, tels que celui de Runge ou le développement de Weierstrass en produit canonique. La structure de  $X$  (ensemble ouvert ou fermé de  $S_2$ ) intervient naturellement d'une manière essentielle. Les principaux éléments des démonstrations sont certains résultats de S. Eilenberg (ce Zbl. 13, 420) convenablement adaptés, ainsi qu'une extension de la notion d'indice d'une transformation, encore utilisée par l'A. dans un travail ultérieur (ce Zbl. 35, 249), appartenant au même ordre d'idées. *S. Stoilow.*

Marcouhewitch, A.: Sur le prolongement par continuité. *Mat. Sbornik*, n. S. r. 16 (58) 43—58 (1945) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.]

Extension au prolongement continu de certaines propriétés du prolongement analytique d'une fonction de variable complexe, comme le théorème de monodromie, et quelques considérations sur les valeurs exceptionnelles au voisinage d'un point de discontinuité isolé. *S. Stoilow.*

Frankl, F.: To the topology of the three-dimensional space. *Mat. Sbornik*, n. Ser. 18 (60), 299—304 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Fortsetzung der in dies. Zbl. 3, 28 besprochenen Arbeit des Verf. — Zieht man eine dreidimensionale, von einer zweidimensionalen Sphäre berandete, triangulierbare Mannigfaltigkeit  $M$  auf einen zweidimensionalen Komplex zusammen, so entsteht ein „Skelett“  $P$  von  $M$ . Ein Skelett heißt „kanonisch“, wenn es höchstens einen singulären Punkt und nur geschlossene, von diesem Punkt ausgehende singuläre Linien besitzt und noch gewissen weiteren (ebenso wie die angegebenen immer erfüllbaren) Bedingungen genügt. Jedes Skelett von  $M$  hat dieselbe Fundamentalgruppe und dieselben Homologiegruppen wie  $M$  selbst. Die Poincarésche Vermutung der Topologie wäre bewiesen, wenn man zeigen könnte, daß jedes kanonische Skelett mit trivialer Fundamentalgruppe und trivialen Homologiegruppen aus einem einzigen Punkt besteht. Verf. konstruiert unter Benutzung der zitierten Arbeit ein kanonisches Skelett  $P$ , bestehend aus einem Punkt  $p$ , drei durch  $p$  gehenden geschlossenen singulären Linien  $a, b, c$  und drei Elementarflächenstücken mit den Rändern  $ab a^{-1} c a c^{-1} b^{-1}$ ,  $b c a^{-1} b^{-1} a b a^{-1}$ ,  $c a b a^{-1} c a c^{-1} b^{-1}$ .  $P$  hat triviale Fundamentalgruppe und triviale Homologiegruppen. *E. Pannwitz.*

(1) Tietze, Heinrich: Bemerkungen über verknotete und verkettete Linien. II. Vorgeschriebene singuläre Primzahlen für eine Simony-Figur und für ihr Spiegelbild. *S.-Ber. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München* 1943, 265—268 (1944).

(2) Tietze, Heinrich: Über spezielle Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen. II. *Monatsh. Math.* 51, 85—100 (1944).

[1<sup>re</sup> partie de (1), ce Zbl. 28, 94; 1<sup>re</sup> partie de (2), ce Zbl. 28, 319.] Étude des nœuds et enlacements toriques de type  $[2, n]$ . Conditions auxquelles doivent satisfaire les entiers premiers associés à la forme quadratique de Minkowski d'un tel nœud, ainsi que de son symétrique. *R. Thom.*

Birkhoff, G. D. and D. C. Lewis: Chromatic polynomials. Trans. Amer. math. Soc. **60**, 355—451 (1946).

Das zu einer Einteilung der Kugel in  $n$  Gebiete (Karte  $M$ ) gehörende chromatische Polynom (ch. P.)  $n$ -ten Grades  $P_n(\lambda)$  gibt die Zahl der verschiedenen Möglichkeiten, um  $M$  mit  $\lambda$  Farben regulär, d. h. benachbarte Gebiete farbenfremd, zu färben. Die Verf. geben Formeln zur Berechnung von  $P_n(\lambda)$  aus den ch. P. von Karten, die aus  $M$  durch Streichung bestimmter Kanten entstehen. Berechnungen von ch. P. zahlreicher spezieller Gebietskonfigurationen als Material für weitere Untersuchungen und Anwendungen der ch. P. zur Gewinnung von bisher durch die Methode der Kempe-Ketten erhaltenen Ergebnissen des Vierfarbenproblems.

H. Künneth.

(1) Coxeter, H. S. M.: The map-coloring of unorientable surfaces. Duke math. J. **10**, 293—304 (1943).

(2) Ratib, I.: Sur le problème des quatre couleurs. Proc. math. phys. Soc. Egypt **2**, Nr. 4, 49—59 (1944).

(3) Baeker, S. M. de: The four-colour problem. Nature **153**, 710 (1944).

(4) Vigneron, Léopold: Remarques sur les réseaux cubiques de classe 3 associés au problème de 4 couleurs. C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 770—772 (1946).

(5) Vigneron, L.: Sur le problème des quatre couleurs: Théorie de la combinaison. C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 705—707 (1946).

(1): Zerlegungen nicht orientierbarer Flächen vom Geschlecht  $g = 5$ , bzw.  $g = 7$  in paarweise benachbarte Gebiete zum Nachweis, daß in der Heawoodschen Formel in diesen Fällen das Gleichheitszeichen gilt (Beweis für alle  $g \neq 2$  bei Ringel, dies. Zbl. **50**, 180). — (2): Versuch, der Lösung des Vierfarbenproblems näher zu kommen auf Grund von notwendigen, bzw. unmöglichen Gebietskonfigurationen in irreduziblen Karten, in (3) auf Grund einer unbewiesenen unwahrscheinlichen Behauptung, in (4) und (5) auf Grund der gegenseitig bedingten Färbbarkeit in drei Farben spezieller Graphen und der Lösbarkeit von Gleichungen mod. 3 für die mit  $+1$  und  $-1$  bewerteten Ecken des dreifarbigigen Kantennetzes einer regulär gefärbten Karte.

H. Künneth.

Heawood, P. J.: Note on a correction in a paper on map-congruences. J. London math. Soc. **18**, 160—167 (1943); **19**, 18—22 (1944).

(Vgl. Verf., dies. Zbl. **4**, 23; **13**, 81.) Das Vierfarbenproblem hängt zusammen mit der Lösbarkeit von Kongruenzen mod 3. Der Einfluß der Zahl der Unbekannten (und Kongruenzen) auf die Lösbarkeit wird untersucht und die zunehmende Wahrscheinlichkeit der Lösbarkeit mit wachsender Zahl vermutet. —

Die Untersuchung von Beziehungen  $\sum_{i=1}^n a_i x + a \pmod{3}$  führt auf die Frage nach der Mindestzahl  $f(n)$  der mit den Zahlen 0, 1, 2 gebildeten  $n$ -gliedrigen Folgen  $Z_k$ , so daß es zu jeder der  $3^n$  überhaupt möglichen Folgen eine  $Z_k$  gibt, die an keiner Stelle die gleiche Zahl hat wie jene an der entsprechenden Stelle. Eine obere Schranke für  $f(n)$  wird berechnet.

H. Künneth.

## Theoretische Physik.

### Elastizität, Plastizität:

Costa de Beauregard, O.: Sur la théorie des forces élastiques. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 477—479 (1946).

Wolkowitsch, D.: Applications de l'ellipsoïde d'inertie de Culmann. C. r. Soc. math. France **1938**, 53—74 (1943).

Einfache rechnerische Anwendungen des Trägheitsellipsoids vor allem auf Probleme der Elastizitätstheorie und der Geometrie der Flächen. F. Rehbock.



Cupr, K.: Über elastische Ketten. Acta Soc. Sci. natur. Moraviae 15, Nr. 11, 16 S. (1943) [Tschechisch].

Grioli, G.: Sulle deformazioni elastiche dovute ad una coppia di braccio nullo. Atti Accad. Italia. Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 3, 93—98 (1941) — Ist. naz. appl. Calcolo, II. Ser. Nr. 116.

Despuijols, Pierre: Sur les forces élastiques autour d'une galerie horizontale de section circulaire. C. r. Acad. Sci., Paris 209, 549—551 (1939).

Federhofer, Karl: Berechnung der dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung. Luftfahrtforschung 21, 1—10 (1944).

Levy, Samuel: Large-deflection theory of curved sheet. Tech. Notes Nat. Adv. Comm. aeronaut., Nr. 895, 24 p. (1943).

Die Gleichungen für die Theorie der Biegung gekrümmter, zylindrischer „Blätter“ (Bleche) werden angewandt und gelöst für den Fall der Belastung in Richtung der Zylinderachse. Lösung in Form trigonometrischer Doppelreihen. Die Fourierkoeffizienten sind bestimmbar aus einem System nichtlinearer Gleichungen. Näherungslösung dieser Gleichungen möglich durch Vernachlässigen der Glieder bis auf zwei „Hauptglieder“. Nach dieser Methode vorgenommene Reihenentwicklungen bis zu 6 Gliedern zeigen befriedigende Genauigkeit zumindest im Bereich der praktisch auftretenden Parameterwerte.

*E. Hardtwig.*

Gran Olsson, R.: Über die Auswertung von Einflußflächen bei statisch unbestimmten Systemen. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 14, 91—94 (1942).

Bei der Auswertung der Einflußlinien erfolgt das Aufsuchen der ungünstigsten Laststellung eines Einzellastenzuges in der Regel durch Probieren. Für polygonale und quadratisch-parabolische Einflußlinien sind analytische Kriterien bekannt. Für kubisch-parabolische Einflußlinien, die als Biegelinien prismatischer Stäbe mit Endmomentenbelastung deutbar sind und daher bei den eingespannten und durchlaufenden Trägern vorkommen, wird ein solches Kriterium in der vorliegenden Arbeit abgeleitet.

*E. Chwalla.*

Gran Olsson, R.: Zur Darstellung der Einflußlinien beim Dreigelenkbogen. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 15, 186—189 (1943).

Gran Olsson, R.: Elastische Knickung gerader Stäbe, die als Säulen von konstanter Druckspannung ausgebildet sind. Forsch. Gebiete. Stahlbaues H. 6, 92—98 (1943).

Anknüpfend an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 12, 161) untersucht Verf. die Stabilität lotrechter, am unteren Ende starr eingespannter und am oberen Ende freier Stäbe aus Hookeschem Idealwerkstoff, die exponentiell veränderlichen Querschnitt haben und nicht nur durch ihr Eigengewicht, sondern zusätzlich auch durch eine lotrechte Einzellast am freien Ende belastet werden. Der Stab wird wieder als „Stab konstanter Druckspannung“ vorausgesetzt, so daß für die Querschnittsfläche  $F$  und das Querschnittstragheitsmoment  $J$  die Gesetze  $F = F_0 \cdot e^{ax}$ ,  $J = J_0 \cdot e^{nax}$  gelten, wobei  $a$  ein Festwert und  $n \geq 1$  eine von der Querschnittsform abhängige Zahl ist: für den Rechteckquerschnitt mit veränderlicher Breite oder veränderlicher Höhe gilt  $n = 1$  bzw.  $n = 3$ , und für den quadratischen oder kreisförmigen Querschnitt gilt  $n = 2$ . Im Fall  $n = 1$  kann die Differentialgleichung des Knickproblems nach zweckmäßigen Umformungen in eine Differentialgleichung mit konstanten Beiwerten übergeführt werden. In den Fällen  $n = 2$  und  $n = 3$  enthält die Lösung Zylinderfunktionen mit den Parametern  $p = 2,06$  bzw.  $p = 1,58$ , die (um zu tabulierten Funktionen zu gelangen) näherungsweise durch  $p = 2$  bzw.  $p = 3$  ersetzt werden. Die für  $n = 1, 2$  und  $3$  in dimensionsloser Form dargestellte Problemlösung lehrt, daß die Knicklast von Säulen, die am freien Ende belastet sind, selbst bei sehr hohen, spezifisch schweren Säulen durch das Eigengewicht nur unbedeutend vermindert wird.

*E. Chwalla.*

**Hencky, H. und W. Moheit:** Eine Erweiterung der gewöhnlichen Balkentheorie für hohe und dünnstegige I-Träger. Forsch. Gebiete Stahlbaues H. 6, 42—54 (1943).

**Chwalla, E.:** Einige Ergebnisse der Theorie des außermittig gedrückten Stabes mit dünnwandigem, offenem Querschnitt. Forsch. Gebiete Stahlbaues H. 6, 12—21 (1943).

**Syngé, J. L.:** The problem of Saint Venant for a cylinder with free sides. Quart. appl. Math. 2, 307—317 (1945).

Die Belastung der Endflächen des Zylinders wird nicht willkürlich angenommen, dazu werden noch andere vereinfachende Bedingungen angesetzt. Hier wird eine neue tensorielle Formulierung dieser Theorie gegeben. Außerdem wird ein von S. Dongall behandelter Spezialfall — sogenannte Exponentialbedingung für die Spannungskomponenten — weitergeführt. *F. Reutter.*

**Southwell, R. V.:** Some practically important stress-systems in solids of revolution. Proc. roy. Soc., London, Ser. A 180, 367—396 (1942).

Die Spannungsverteilung in einigen Rotationskörpern und im unvollständigen Torus wird mittels der sogenannten semi-indirekten Methode von de Saint-Venant behandelt. Die damit gewonnenen analytischen Ansätze für die Lösungen sind besonders geeignet zur numerischen Auswertung nach der Relaxationsmethode. Durch Behandlung von bereits auf anderem Wege — mit viel größerem Aufwand — gelösten Beispielen ergeben sich Vergleichsmöglichkeiten für die praktische Brauchbarkeit. *F. Reutter.*

**Pickett, Gerald:** Application of the Fourier method to the solution of certain boundary problems in the theory of elasticity. J. appl. Mech. 11, A-176—A-182 (1944).

Die Spannungen in rechtwinkligen Prismen und in Kreiszyklindern werden mittels der Methode der Orthogonalfunktionen bestimmt. Die Dehnungskoeffizienten sind die Lösungen eines Systems von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. *F. Reutter.*

**Biezeno, C. B. and J. J. Koch:** The effective width of cylinders, periodically stiffened by circular rings. Nederl. Akad. Wet. Proc. 48, 147—165 (1945).

Näherungsmethode zur Spannungsberechnung in dünnwandigen Zylindern, die in gleichmäßigem Abstand durch Kreisinge versteift sind und nur unter der Einwirkung von in den Mittelebenen der Ringe wirkenden Kräften stehen. Der Arbeit sind eine Reihe von Diagrammen und Tabellen beigegeben, die für einen gewissen Wertebereich der vorkommenden Parameter unmittelbare Ablesungen gestatten. *F. Reutter.*

**Föppl, Ludwig:** Dünnwandige Hohlzylinder gleicher Festigkeit gegen Innen- und Außendruck. S.-Ber. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1942, 71—80 (1942).

Neben den Kreiszyklindern sind nur noch Zylinder, deren Querschnitt aus zwei Kreisbogen (Zentriwinkel größer  $180^\circ$ ) besteht, die durch eine gemeinsame (evtl. durchlöchernte) Sehne verbunden sind, bei gleichmäßigem Innen- oder Außendruck durch das Verschwinden von Biegespannungen ausgezeichnet. Bei gleichem Rauminhalt und (in beiden Zellen) gleichem Innendruck ergibt sich kein größerer Materialverbrauch als beim entsprechenden Kreiszyklinder. *F. Reutter.*

● **Sturm, Roland G.:** A study of the collapsing pressure of thinwalled cylinders. University of Illinois Bulletin 39, Nr. 12 — Engineering Experiment Station Bulletin Series no. 329. University of Illinois, Urbana, Ill., 1941. 77 p.; \$ 0,80.

Das elastische Verhalten von dünnen Kreiszyklindern bei gleichförmigem Außendruck wird untersucht. Der höchst zulässige Druck für Rohre mit einfach

gelagerten und mit eingespannten Enden wird ermittelt. Hierbei werden auch experimentelle Ergebnisse mitgeteilt und mit den theoretischen verglichen.

*F. Reutter.*

Gorbunov, B. N.: The calculation of a space frame with thin-walled bars. *Priklad Mat. Mech.* 7, 65—70 und engl. Zusammenfassg. (1943) [Russisch].

Einführung des Begriffs der „einheitlichen Winkel-Verrückung“ auf alle Deformationen eines (dünnen) Riegels und Entwicklung einer Methode, mit Hilfe dieses Begriffs die Deformationen des Systems zu bestimmen. *E. Hardtwig.*

Karl, H.: Die Biegung gekrümmter, dünnwandiger Rohre. Diss. T. H. Dresden 1943. 45 S.

Schubert, G.: Über Effekte zweiter Ordnung bei Biegung und Torsion dünnwandiger Rohre elliptischen Querschnitts. *Ingenieur-Arch.* 12, 53—63 (1941).

Auftretende Biegespannungen verformen den Querschnitt. Diese Deformation wird mittels des Satzes von Castigliano berechnet. Die zusätzlichen Biegespannungen vermindern die Sicherheit gegen das Einbeulen der Rohre. Über die Herabsetzung der Stabilitätsgrenze werden nur qualitative Aussagen gemacht. Als Anwendung wird das Bourdonsche Manometer behandelt.

*F. Reutter.*

Bartels, R. C. F.: Torsion of hollow cylinders. *Trans. Amer. math. Soc.* 53, 1—13 (1943).

Das Torsionsproblem führt zum Dirichletproblem für den Zylinderquerschnitt. Eine Methode zu dessen Lösung bei Kreisringen wird entwickelt. Durch konforme Abbildung des Hohlzylinderquerschnitts auf einen Kreisringbereich ist das Problem allgemein lösbar. Durchgeführt werden als Beispiel der exzentrische Kreisring und eine für die Anwendung wichtige Querschnittsform, die nach außen durch 2 einander senkrecht schneidende Kreisbogen von gleichem Radius, nach innen von einer ovalen Kurve 4. Ordnung begrenzt ist.

*F. Reutter.*

Ishlinsky, A. J.: The stressed state of a cylinder at large angles of torsion. *Priklad. Mat. Mech.* 7, 223—225 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.]

Die Arbeit behandelt die Torsion von Kreiszyindern und die damit verbundenen sogenannten Effekte zweiter Ordnung, wie z. B. Verkürzung der Zylinderlänge, Abnahme des Durchmessers und die durch die Torsion hervorgerufenen Radialspannungen.

*Autoreferat.*

Kuzmin, R. O.: Concerning the torsion of homogeneous isotropic cylinders. *C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér.* 51, 11—12 (1946).

Der Integralausdruck für die Torsionssteifigkeit eines zylindrischen Prismas wird auf Flächeninhalte von zwei Bereichen zurückgeführt, die sich mittels (angegebbarer) konformer Abbildungen aus dem Bereich des Zylinderquerschnitts ergeben.

*F. Reutter.*

Djanelidze, G. J.: Application of the variation method to the theory of thin-walled elastics bars developed by V. Z. Vlasov. *Priklad. Mat. Mech.* 7, 455—462 (1943). [Russisch mit engl. Zusammenfassg.]

Mit Hilfe der Variationsmethode (angewandt auf die potentielle Energie des Systems) werden Gleichgewichtsgleichungen ähnlich den Euler-Lagrange-Gleichungen hergeleitet, und zwar bei bestimmten Randbedingungen an den Enden des Balkens sowie bei „natürlichen Randbedingungen“. Als Sonderfälle werden behandelt: a) für eine Zylinderschale die Deformation der Mittelfläche bei nicht deformierbarem Querschnitt; b) für eine gekrümmte Zylinderschale mit nicht verformbarem Querschnitt die Herleitung des Ausdrucks für die Deformationsenergie. Die Grundlage bildet die von V. Z. Vlasov entwickelte Theorie dünner Balken.

*E. Hardtwig.*

Reutter, F.: Der starre Kreiszyylinder im isotropen elastischen Medium. *Z. angew. Math. Mech.* 23, 156—169 (1943).



Aus einem elastischen Halbraum wird ein solcher Raumteil ausgespart, daß in ihn ein starrer Kreiszylinder hineinpaßt. Die kleinen Verschiebungen, die die Punkte des elastischen Mediums durch das Eindringen dieses Zylinders erfahren, werden bestimmt. Ihre Ermittlung erfordert die Lösung von zwei linearen Integralgleichungen erster Art, die auf ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten zurückgeführt werden. *F. Reutter.*

(1) **Harding, J. W., and I. N. Sneddon:** The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **41**, 16—26 (1945).

(2) **Sneddon, I. N.:** Boussinesq's problems for a flat-ended cylinder. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **42**, 29—39 (1946).

(1): Untersuchung des starren Umdrehungskörpers auf elastischer Unterlage. Mittels Hankel-Transformation wird das Problem auf die Lösung eines Paares von Integralgleichungen — eines Typs, der von Titchmarsh und Busbridge (dies. Zbl. **17**, 404) untersucht wurde — zurückgeführt. Als Beispiele werden der Kegel — Ergebnisse übereinstimmend mit Love (dies. Zbl. **22**, 273) — die Kugel und der Kreiszylinder behandelt. In (2) wird für einen starren Kreiszylinder der Zustand im Innern des gedrückten elastischen Mediums genauer untersucht. Es sind Tabellen und Kurven beigelegt, aus denen man für die Poisson-Konstante 0,25 [Erdreich] für jeden Punkt des elastischen Mediums die zugehörigen Spannungskomponenten interpolieren kann. *F. Reutter.*

**Galin, L. A.:** Pressure of a punch with friction and cohesion domains. *Priklad. Mat. Mech.* **9**, 413—424 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Gegen eine elastische Halbebene  $y > 0$  wird ein starrer Körper mit ebener Grundfläche  $ABCD$  gepreßt. Die Kante  $BC$  haftet am Medium, während längs der Kanten  $AB$  und  $CD$  trotz auftretender Reibung Gleiten erfolgt. Dieses Elastizitätsproblem wird mit Hilfe von zwei in  $y < 0$  analytischen Funktionen einer komplexen Variablen gelöst. *F. Reutter.*

**Galin, L. A.:** Spatial contact problems of the theory of elasticity for punches of circular shape in plane. *Priklad. Mat. Mech.* **10**, 425—448 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Ein starrer Kreiszylinder wird in einen elastischen Halbraum gepreßt. Die Spannungsverteilung längs der Oberfläche wird behandelt. Die Verrückung des starren Körpers im Verhältnis zur Kraft wird bestimmt. Der Fall einer reibungslosen Berührung wird auf das Neumann-Problem zurückgeführt. Auftretende Reibung wird ebenfalls in Betracht gezogen. *F. Reutter.*

**Falkovich, S. V.:** Pressure of a rigid punch on an elastic semi-plane with ranges of sliding and adhesion on the line of contact. *Priklad. Mat. Mech.* **9**, 425—432 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Der starre Körper hat hier eine Basis  $ABCD$ . Die Lösung geschieht mittels zweier in  $y < 0$  regulärer Funktionen einer komplexen Variablen, die mittels elliptischer Funktionen ausdrückbar sind. *F. Reutter.*

**Chien, Wei-Zang:** The intrinsic theory of thin shells and plates. I. General theory. II. Application to thin plates. III. Application to thin shells. *Quart. appl. Math.* **1**, 297—327; **2**, 43—49, 120—135 (1944).

I: Grundlegende und systematische Behandlung des Problems dünnwandiger Schalen, die als elastisch isotrop und homogen vorausgesetzt werden. Behandelt werden Spannungen, Deformationen und Krümmungsänderungen in invarianter Tensor-schreibweise. Anknüpfend an eine frühere Arbeit [(13) im nachf. Sammelreferat], in der neben den Gleichgewichtsgleichungen und Kompatibilitätsbedingungen auch — nach Einführung zweier „makroskopischer Spannungstensoren“ — „makroskopische Gleichgewichtsgleichungen“ hergeleitet werden, betrachtet Verf. hier die

letztgenannten Gleichungen sowie drei der Kompatibilitätsgleichungen. Er schreibt sie in sechs Gleichungen für die Unbekannten  $p_{\alpha\beta}$ ,  $q_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) hinüber, die die Dehnung und Krümmung der Schalen-Mittelfläche beschreiben. Die Kenntnis dieser Funktionen läßt dann vermöge der (drei) „mikroskopischen“ Gleichgewichtsbedingungen und der restlichen drei Kompatibilitätsbedingungen die Berechnung der Deformationen und Spannungen zu. II: Anwendung der Ergebnisse auf den Fall dünner Platten, von „Schalen“ also, deren Mittelflächen Ebenen sind, und für die das Verhältnis  $\epsilon$  = mittlere Schalendicke: kleinster Längsausdehnung ein sehr kleiner, echter Bruch ist. Die obengenannten „erzeugenden Größen“  $p_{\alpha\beta}$ ,  $q_{\alpha\beta}$  werden in Reihen entwickelt:  $p_{\alpha\beta} = \sum p_{\alpha\beta}^{(p)} \epsilon^p$ ,  $q_{\alpha\beta} = \sum q_{\alpha\beta}^{(q)} \epsilon^q$ . Die sechs Grundgleichungen können zwölf verschiedene Formen annehmen, die zur Grundlage einer Typeneinteilung gemacht werden:  $P1 - P3$  endliche Verbiegungen,  $P4 - P8$  kleine Verbiegungen,  $P9 - P11$  sehr kleine und  $P12$  verschwindende Verbiegungen. Die drei ersten Typen  $P1 - P3$  werden erstmalig genauer untersucht. III: Übertragung der in Teil II gefundenen Ergebnisse auf dünne Schalen. Auch hier wird — mit ähnlicher Bedeutung — eine Größe  $\epsilon$  definiert, und daneben ein System von Größen  $b_{\alpha\beta}$  (doppelte Koeffizienten der quadratischen Fundamentalform der Mittelfläche): die  $b_{\alpha\beta}$  werden nach Potenzen von  $\epsilon$  entwickelbar vorausgesetzt, mit  $b$  als kleinstem Exponenten. Die Größe  $b$  wird zur Einteilung der Flächen herangezogen. Auch hier werden die  $p_{\alpha\beta}$ ,  $q_{\alpha\beta}$  als Potenzreihen von  $\epsilon$  dargestellt, wobei die niedrigsten Exponenten,  $p$ ,  $q$ , ganz ähnlich wie in Teil II, einer Klasseneinteilung zugrundegelegt werden.

*E. Hardtwig.*

(1) Rabotnov, J. N.: Fundamental equations of the theory of shells. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 47, 87—90 (1945).

(2) Vlasov, V. Z.: The basic differential equations in the general theory of elastic shells. Priklad. Mat. Mech. 8, 109—140 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(3) Goldenweiser, A. L.: Procedures of integration of equations of the theory of thin shells. Priklad. Mat. Mech. 10, 387—396 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(4) Goldenweiser, A. L.: Stressed state of a thin spherical shell. Priklad. Mat. Mech. 8, 441—467 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(5) Nowoschilow, W. W.: Einige Bemerkungen zur Theorie der Schalen. Priklad. Mat. Mech. 5, 375—382 (1941) [Russisch mit deutsch. Zusammenfassg.].

(6) Novozilov, V. V.: Neue Methode für die Berechnung dünner Schalen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Cl. Sci. Tech. 1946, 35—48 (1946) [Russisch].

(7) Novozilov, V. V.: Berechnung von Schalen — Rotationskörper. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Cl. Sci. Tech. 1946, 949—962 (1946) [Russisch].

(8) Novozilov, V. V.: Die Berechnung zylindrischer Schalen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Cl. Sci. Tech. 1946, 803—816 (1946) [Russisch].

(9) Novozilov, V. V.: On an error in a hypothesis of the theory of shells. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 38, 160—164 (1943).

(10) Novozilov, V. V.: On the solution of thin shell theory problems in stresses and moments. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 38, 294—297 (1943).

(11) Sokolovsky, W. W.: Equations of momentless shells. Priklad. Mat. Mech. 7, 57—64 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(12) Rabotnov, J. N.: Solutions of the momentless theory of shells. Priklad. Mat. Mech. 10, 639—646 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(13) Synge, J. L. and W. Z. Chien: The intrinsic theory of elastic shells and plates. Theodore von Kármán Anniversary Volume. Berkeley, Calif.: University of California Press 1941. p. 103—120.



Allgemeine Theorie der Schalen. Von den jüngeren russischen Arbeiten bringt (1) eine Herleitung der Grundgleichungen der Theorie dünnwandiger Schalen in Gaußschen Koordinaten auf der undeformierten Mittelfläche. Dasselbe Ziel wird in (2) für dickwandige Schalen verfolgt. Doch weicht Verf. von der klassischen Kirchhoff-Loveschen Theorie insofern ab, als er die Verrückung  $u_\gamma$  in Richtung der auf die nicht deformierte Mittelfläche bezogenen Flächennormalen nicht als abhängig von den Gaußschen krummlinigen Koordinaten ansieht, sondern als Linearfunktion des Normalenabstands  $\gamma$  betrachtet, wodurch sich die Formeln etwas ändern. Einen Beitrag zur Integration der Grundgleichungen liefert (3), in der gezeigt wird, wie der „Eckeneffekt“ entlang jener Konturlinien der Schale berechnet werden kann, deren Tangenten nicht mit den Asymptotenlinien der Mittelfläche übereinstimmen. In Weiterverfolgung einer älteren Arbeit des Verf. (drittfolgendes Referat) wird gezeigt, daß unter bestimmten Bedingungen das Integrationsproblem zurückgeführt werden kann auf jenes der „momentenfreien Theorie“. Derselbe Verf. zeigt in (4), daß in der Kirchhoff-Loveschen Theorie das allgemeine Integral des homogenen Systems durch 3 Funktionen  $F$ ,  $\Phi$ ,  $U$  dargestellt werden kann, mit folgenden Eigenschaften: Stellt  $(\alpha, \beta)$  ein System von Isothermenkurven auf der Kugel dar (Radius  $R$ ), und ist  $\gamma = \alpha + i\beta$  eine komplexe Variable, so sind  $F$  und  $\Phi$  analytisch in  $\gamma$ , und  $U(\alpha, \beta)$  erfüllt die Differentialgleichung  $R^2 \Delta U + (1 + ik)U = 0$ , wo  $k$  eine Konstante bedeutet. (5) befaßt sich mit der allgemeinen Theorie der Schalen und beginnt mit einer Klassifizierung der verschiedenen Abarten der Theorie hinsichtlich der Art der ihnen anhaftenden Mängel. Verf. weist auf das Überflüssige des Mitschleppens kleiner Glieder hin, die größenordnungsmäßig unter oder neben jenen Fehlern stehen, die infolge der notwendigen Annahmen unvermeidlich sind. In diesem Sinne sind die Grundlagen der Kirchhoff-Loveschen Hypothese nur für die erste Näherung der Schalentheorie verwertbar, also in der Theorie dünner Schalen. Die Trefftzsche Theorie der dünnen Schalen, Fälle der Integration zugehöriger Gleichungen werden angeführt, schließlich noch das Stabilitätsproblem untersucht. Der Integration selbst ist (6) gewidmet, von der Verf. annimmt, daß sie für eine Reihe von Problemen der Schalentheorie eine bedeutende Vereinfachung bedeute. Den klassischen Kirchhoff-Loveschen Gleichungen werden drei weitere Kompatibilitätsbedingungen hinzugefügt, die von A. Goldenweiser angegeben worden sind (zweitfolgendes Referat). Er leitet daraus ein sechsgliedriges System von Differentialgleichungen achter Ordnung für die Spannungen ab. Sonderfälle: a) Die Poissonsche Konstante  $\sigma$  verschwindet. Das System wird in bezug auf eine bestimmte Kombination von Spannungen symmetrisch und kann nach Einführung neuer abhängiger Variablen reduziert werden auf ein System von drei Gleichungen vierter Ordnung. b) Ist  $\sigma \neq 0$ , so können in den Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingungen Glieder der Ordnung  $\delta/R$  vernachlässigt werden ( $\delta$  = Schalendicke,  $R$  = Krümmungsradius), und das System achter Ordnung reduziert sich auf ein solches vierter Ordnung. Dieser Fall stellt eine Verallgemeinerung der Meissnerschen Theorie der symmetrischen Deformation von Rotationsschalen dar. An dieser Stelle setzt eine neue Arbeit (7) des Verf. an. Außer der Meissnerschen Theorie stecken auch die Formeln von E. Schwerin über die Windbelastung von Kuppeln in den gefundenen Ergebnissen. Das Problem der Windbelastung von Rotationsschalen kann reduziert werden auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Als Beispiel wird die Theorie angewandt auf den Fall der kugelförmigen Schalen. Die zylindrischen Schalen werden in (8) behandelt. In letzterer sind folgende Sonderfälle enthalten: Kreisförmige, zylindrische Platte und Kreiszyylinder mit frei unterstützten Enden sowie Deformationen von Pfeifen, deren Querschnitt zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen besitzt. Kritische Bemerkungen zur Theorie des Beugens und Dehnens



elastischer Schalen enthält (9); es wird gezeigt, daß die Annahme: „die Normale zur Mittelfläche geht bei der Deformation über in die Normale der deformierten Mittelfläche“, keinen Gewinn bringt beim Verfeinern der üblicherweise angewandten Spannungs-Verformungsbeziehung. Einige Folgerungen aus der von W. Sokolowsky [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 16, 19—24 (1937)] schon viel früher hergeleiteten Gleichungen der Schalentheorie bespricht Verf. in (10). Weitere russische Arbeiten zur Schalentheorie — allerdings den Sonderfall momentfreier Schalen betreffend — sind (11) und (12). (11) wendet die Gleichgewichtsgleichungen momentenfreier Schalen an auf folgende Sonderfälle: 1. Schalen mit Rotationsflächen als Mittelflächen, wobei die E. Reissnersche Lösung für Kugelschalen als Sonderfall auftritt. 2. Schalen mit Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung als Mittelflächen. 3. Schalen von der Form eines elliptischen Paraboloids und 4. Kegel- und Zylinderschalen. (12) ist insofern von größerer Allgemeinheit, als sie die Gleichgewichtsbedingungen für momentenfreie Schalen zum Gegenstand hat: diese werden in asymptotische Koordinaten hinüberschrieben, wobei die Analogie zwischen der hier behandelten Theorie und der Lecomteschen Theorie infinitesimaler Flächenverbiegung ausgenutzt wird. Als Beispiele werden mit Hilfe dieser Methode bekannte Probleme von Schalenflächen zweiter Ordnung durchgerechnet. Ähnliche Fragen behandelt (11). Was amerikanische Arbeiten zur allgemeinen Schalentheorie betrifft, so ist (13) neben der Arbeit von C. Truesdell (dies. Zbl. 60, 426) zu nennen. *E. Hardtwig.*

Rabotnov, J. N.: On the boundary zone equations in the theory of shells. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 47, 329—331 (1943).

Beitrag zur Theorie der rotationssymmetrischen und symmetrisch belasteten Schalen. Die Reduktion der vom Verf. aufgestellten Grundgleichungen erfolgt unter der Annahme, daß der betrachtete Bereich von der Größenordnung des geometrischen Mittels aus Dicke und Krümmungsradius der Schale ist. Die reduzierten Gleichungen werden physikalisch gedeutet, und es wird gezeigt, daß und wie sie sich auf den rotationssymmetrischen Fall zurückführen lassen. *E. Hardtwig.*

Goldenweiser, A. L.: Applicability of the general theorems of elasticity to thin shells. Priklad. Mat. Mech. 8, 3—14 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Ausgehend von den Grundgleichungen der klassischen Elastizitätstheorie werden unter Verwendung plausibler Annahmen die Gleichgewichtsgleichungen für dünnwandige Schalen abgeleitet. Untersucht wird nun, ob bei dieser Ableitung (in der angenäherten Theorie) einige allgemeine Sätze erhalten bleiben. Es zeigt sich, daß Bettis Reziprozitätssatz und Kirchhoffs Eindeutigkeitssatz weiterbestehen, vorausgesetzt, daß die grundlegenden Spannungs-Deformations-Gleichungen linear mit symmetrischer Matrix sind, und daß die Deformationsenergie für alle Werte der Deformationskomponente nichtnegativ ist. *E. Hardtwig.*

Goldenweiser, A. L.: Qualitative investigation of stressed states in thin-walled shells. Priklad. Mat. Mech. 9, 463—478 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Herleitung der Grundgleichungen der Theorie dünner Schalen, bezogen auf ein beliebiges System Gaußscher, krummliniger Koordinaten. Die Gleichungen beziehen sich auf die Spannungen und sind invariant, d. h. in Tensorform formuliert. Die allgemeinen Integrale werden unter der Voraussetzung sehr dünner Wände diskutiert. Abschließend untersucht Verf. die aus der Annahme der Kirchhoff-Loveschen Hypothese sich ergebenden Fehler und gibt Verfahren zur angenäherten Integration der Schalengleichungen an. *E. Hardtwig.*

Novojilov, V. V.: A generalization of the method of complex displacements to the non-homogeneous problem of the theory of shells. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 53, 503—506 (1946).

Die „Methode der komplexen Verrückungen“ stellt eine Übertragung der vom Verf. in einer früheren Arbeit dargelegten Gedankengänge auf die Theorie

der bei beanspruchten Schalen auftretenden Verrückungen dar. Verf. führte seinerzeit drei Hilfsfunktionen, die „komplexen Spannungen“ ein, vermöge derer die Grundgleichungen der Theorie der dünnen Schalen sich auf drei Gleichungen vierter Ordnung reduzieren. Ein analoges Verfahren bietet sich dar, wenn man von der die Verrückungen enthaltenden Gleichungen ausgeht: durch Einführung dreier Funktionen, der „komplexen Verrückungen“ wird eine analoge Reduktion erreicht [vgl. (6) des viertvorstehend. Sammelrefrats]. *E. Hardtwig.*

**Kármán, Theodore von and Wei-Zang Chien:** Torsion with variable twist. *J. aeronaut. Sci.* 13, 503—510 (1946).

Es werden dünnwandige Zylinderschalen, die innen durch ein Rippensystem verstärkt sind, untersucht. Durch in den Normalebenen der Achse wirkende variable Momente wird eine Scherung hervorgerufen. Unter Vernachlässigung der Biegesteifigkeit der Schale und nach anderen Vereinfachungen gelingt es, eine Methode zur Berechnung der eintretenden Verwindung und Verkrümmung zu entwickeln. Ausgeführt werden die Spezialfälle eines rechteckigen und eines handtelförmigen Zylinderquerschnitts. *F. Reutter.*

(1) **Kármán, Th. von and Hsue-Shen Tsien:** The buckling of spherical shells by external pressure. *J. aeronaut. Sci.* 7, 43—50 (1939).

(2) **Kármán, Th. von and Hsue-Shen Tsien:** The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *J. aeronaut. Sci.* 8, 303—312 (1941).

(3) **Friedrichs, K. O.:** On the minimum buckling load for spherical shells. Theodore von Kármán Anniversary Volume, Pasadena, Calif.: California Institute of Technology, 1941. p. 258—272.

(4) **Rabotnov, J. N.:** Bending of a cylindrical shell under a concentrated load. *C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér.* 52, 299—300 (1946).

(5) **Reissner, E.:** Note on the expressions for the strains in a bent, thin shell. *Amer. J. Math.* 64, 768—772 (1942).

(6) **Reissner, E.:** Stresses and small displacements of shallow spherical shells. *I. J. Math. Physics* 25, 80—85 (1946).

(7) **Reissner, E.:** On vibrations of shallow spherical shells. *J. appl. Phys.* 17, 1038—1042 (1946).

(8) **Shapiro, G. S.:** Equilibrium of a cone and a conic shell. *Priklad. Mat. Mech.* 8, 332—336 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(9) **Wansleben, F.:** Die Beulfestigkeit rechteckig begrenzter Schalen. *Ingenieur-Arch.* 14, 96—105 (1943).

(10) **Vlasov, V. Z.:** Calculations of the thin-walled prismatical shells. *Priklad. Mat. Mech.* 8, 361—394 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(11) **Morkovin, Vladimir:** Membrane stresses in shells of constant slope. *Quart. appl. Math.* 2, 102—112 (1944).

(12) **Ilyushin, A. A.:** Finite relationship between stresses and its relation with deformations in theory of shells. *Priklad. Mat. Mech.* 9, 101—110 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Verschiedene Probleme an elastischen Schalen. Untersuchung der auffallenden Tatsache in (1), (2) und (3), daß sich dünnwandige Schalen unter einem viel niedrigeren Druck durchbiegen, als die lineare Biegunstheorie verlangt. Der Grund für diese Unzulänglichkeit der Theorie liegt in der Nichtberücksichtigung nichtlinearer Glieder. Werden diese in Rücksicht gezogen, so erhält man—zumindest im sphärischen Fall—eine relativ gute Übereinstimmung mit der Erfahrung. Schwieriger ist die Behandlung des zylindrischen Falles. Dementsprechend beschränken sich Verf. auf eine mehr qualitative Untersuchung der Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Ebenfalls mit dem Biegungsproblem an zylindrischen Schalen befaßt sich Verf. von (4), geht jedoch von seinen Gleichungen für dünne Schalen aus, die er bei anderer Gelegenheit abgeleitet hat. Die Er-



gebnisse dürften jedoch insofern nicht voll befriedigend sein, als die Scherungen in der Umgebung des Angriffspunkts der Kraft nicht vernachlässigt werden dürfen, wie dies Verf. tut. Die Wirkung der Scherkräfte hat E. Reissner untersucht [J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. 23, 184—191 (1944)]. Ebenfalls mit der Vernachlässigung gewisser Glieder in der Biegungstheorie dünnwandiger Schalen befaßt sich (5). Hier wird gezeigt, daß gewisse, oft vernachlässigte Glieder von gleicher Größenordnung sind wie die beibehaltenen. Die vernachlässigten Glieder brauchen nicht immer ohne Einfluß auf die Rechenergebnisse zu sein, so daß die Verwendung vollständiger Ausdrücke zweckmäßig ist. Die vollständigen Ausdrücke werden angegeben. Kugelprobleme werden in (6) und (7) behandelt. In (6) werden Differentialgleichungen für die Verrückungen dünnwandiger Kugelsegmente kleiner Höhe sowie der zugehörigen Spannungsausdrücke angegeben, in (7) wird das Problem rotationssymmetrischer Schwingungen dünnwandiger Kugelschalen behandelt. Differentialgleichungen für die Normal- und Tangentialkomponenten der Verrückung werden abgeleitet. Die Frequenzgleichungen sind Determinantengleichungen recht komplizierter Bauart. Mit achsialsymmetrischen Verformungen und den zugehörigen Spannungen eines Kegels und einer Kegelschale befaßt sich (8). Angenommen wird, daß die Last an den Grenzen allein (polynomial) abhängt vom Radius  $r$ . Eine zur Spannungsfunktion von Love und Galerkin analoge Spannungsfunktion wird angegeben und aus ihr Spannungen und Deformationen abgeleitet. Als Beispiele werden Sonderfälle betrachtet. Mit rechteckigen, bzw. prismatischen Schalen befassen sich (9) und (10). Im ersten Fall werden die als konstant und klein gegen die Schalendimensionen angenommenen Hauptkrümmungen als parallel zu den Rechteckseiten vorausgesetzt und die Last als konstanter Druck auf die Begrenzung angenommen. Die Durchbiegung wird — mit infinitesimalen Verrückungen — gerechnet. Das Ergebnis reduziert sich auf die Untersuchungen von v. Mises für lateral belastete, zylindrische Schalen, auf jene von v. Sanden, Tölke und Flügge für achsial belastete zylindrische Schalen und von Zoelly und Schwerin für Kugelschalen. Vlasov hingegen ersetzt das zweidimensionale stetige Medium durch einen Balkenrahmen, und nimmt an, daß die Verrückungen  $\mu(z, s)$ ,  $v(z, s)$  des Balkens in longitudinaler bzw. trans-

versaler Richtung in den Formen  $\mu(z, s) = \sum_1^n U_i(z) \Phi_i(s)$ ,  $v(z, s) = \sum_1^n V_k(z) \Psi_k(s)$

geschrieben werden können, wo  $U_i$  und  $V_k$  einem System linearer, gew. Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten genügt und  $\Phi_i$  und  $\Psi_k$  separat zu bestimmen sind. Erweiterung auf Schalen mit dreieckigen, viereckigen, U-förmigen und noch komplizierteren Querschnitten. Gleitet eine Gerade entlang einer ebenen Kurve und hält sie stets einen rechten Winkel mit der Tangente, einen schiefen Winkel mit der Binormalen, so entsteht eine Fläche konstanter Neigung. Dünnwandige Schalen dieser Art werden in (11) betrachtet. Unter der Voraussetzung, daß die (äußere) Last in Richtung der Erzeugenden nicht variiert, werden Spannungsergebnisse und Verrückungen angegeben (Membrantheorie). Mit den endlichen Beziehungen zwischen den Spannungskomponenten und Momenten einerseits und den Deformationen andererseits, die in irgendeinem Punkt einer plastischen Schale auftreten (Plastizitätsbedingungen von v. Mises) befaßt sich (12). Sonderfälle: 1. In einer Ebene eingespannte Platte, 2. gebogene Platte und 3. Zylinderschale unter achsialsymmetrischem Druck. E. Hardtwig.

Nemenyi, P. and C. Truesdell: A stress function for the membrane theory of shells of revolution. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 159—162 (1943).

Die Form der Schale ist durch  $r = f(z)$  bestimmt. Die Membrantheorie der Schalen erlaubt die Darstellung der Spannungserzeugenden in der Form  $N_\phi = N_{\phi n}(\phi) \cos n\theta$ ,  $N_\theta = N_{\theta n}(\phi) \cos n\theta$ ,  $N_{\phi\theta} = N_{\phi\theta n}(\phi) \sin n\theta$ , wo  $\theta$  den



Meridianwinkel der Rotationsfläche darstellt. Die Kraft in den Gleichgewichtsbedingungen läßt sich in analoger Weise in Komponentenform darstellen. Gezeigt wird, daß sich die Spannungskomponenten  $N_{\phi n}, N_{\theta n}, N_{\phi \theta n}$  darstellen lassen durch eine Spannungsfunktion  $U_n$ , die einer Gleichung  $U_n'' + (n^2 - 1)(f''/f) U_n = F_n$  genügt, wo  $F_n$  eine Funktion der Kraftkomponenten darstellt. Eine Reihe von Schalentypen wird angeführt, auf die sich die vorgetragene Theorie anwenden läßt.

*E. Hardtwig.*

**Truesdell, C.: The membrane theory of shells of revolution.** Trans. Amer. math. Soc. 58, 96—166 (1945).

Die umfangreiche Arbeit behandelt die lineare Theorie dünner Schalen mit Achsialsymmetrie unter neuem Gesichtspunkt. Ausgangspunkt: die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie (3 Dimensionen). Durch Einführung des Begriffs der Spannungresultanten und Entwicklung nach Potenzen von  $\delta$  (Schalendicke) ergibt sich die Möglichkeit, auf die Membrantheorie sowohl wie auf die Biegungstheorie überzugehen, je nachdem, ob man sich auf die niedrigsten Potenzen beschränkt oder aber die höheren Glieder mit berücksichtigt. Die Entscheidung über die Konvergenz der Reihen ist allerdings sehr schwierig, wird aber vom Verf. in Angriff genommen. Auch das Verhalten der Lösungen der Gleichgewichtsgleichungen an Singularitätsstellen der Mittelfläche wird diskutiert und die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen Eindeutigkeit erzielt wird — unter gleichzeitigem Ausschluß von physikalisch sinnlosen Lösungen. Es ergibt sich: bei Annäherung an die Singularität müssen die Differentialgleichungen gliedweise für die Potenzentwicklungen erfüllt sein — auch dann, wenn diese Entwicklungen divergieren sollten. Unter Beschränkung auf die beiden ersten Glieder wird unter diesem Gesichtspunkt eine größere Anzahl von Fällen als „lösbar“ oder „unlösbar“ klassifiziert. Nach diesen mehr allgemeinen Überlegungen folgt eine Behandlung der Membrantheorie der Schalen. Verf. sucht explizite Lösungen für eine große Klasse von Meridiankurven der Rotationschalen und für verschiedene Verteilungen des Außendruckes, insbesondere auch unsymmetrische Außendrucke. Zudem werden verschiedene Arten der Stützung an Rändern und verschiedene Bedingungen für die Singularitäten betrachtet. Fälle unsymmetrischer Belastung sind in der Literatur nur wenige behandelt worden. Verf. vermehrt diese Fälle um eine ganze Reihe weiterer, wobei er sich der Entwicklung nach Fourier-Reihen bedient (mit der geogr. Länge als Variablen), deren Koeffizienten entweder in geschlossener Form darstellbar sind oder durch tabulierte Funktionen ausgedrückt werden können. Er bedient sich dabei der von ihm selbst und P. Nemenyi eingeführten Spannungsfunktion (vorstehend. Referat). Auf diese Weise erschließt Verf. eine große Anzahl von Rotationschalen der rechnerischen Behandlung und, wie er hofft und glaubt, auch der praktischen Anwendung, weil zu den in der Praxis auftretenden Formen eine ähnliche Form unter den hier behandelten aufgefunden werden kann.

*E. Hardtwig.*

**Byrne jr., Ralph: Theory of small deformations of a thin elastic shell.** Univ. California Publ. Math., n. Ser. 2, [Nr. 1, Seminar Rep. in Math. (Los Angeles)], 103—152 (1944).

Den Ausgangspunkt der Entwicklung bildet die allgemein als gültig angesehene Annahme, daß Linien, die vor der Deformation normal waren zur Mittelfläche, auch nach der Deformation zu ihr normal sind und keine Dehnung erfahren. Unter Berücksichtigung der Größen 1ter Ordnung wird ein Ausdruck für die Deformationsenergie angegeben, aus dem vermöge des Prinzips der virtuellen Arbeit die Differentialgleichungen und Randbedingungen für die Verformung dünner Schalen allgemeiner Form hergeleitet werden. Abschließend wird der Eindeutigkeitssatz für die Lösung bewiesen.

*E. Hardtwig.*

Yuan, Shao Wen: Thin cylindrical shells subjected to concentrated loads. Quart. appl. Math. 4, 13—26 (1946).

Sei  $a$  der Radius des Zylinders,  $x$  die zur Zylinderachse parallele Koordinate,  $\sigma$  die Poissonsche Konstante,  $D$  die Biegesteifigkeit  $E h^3/12(1 - \sigma^2)$  mit  $h$  = gleichförmige Schalendicke, und schließlich  $q$  die Seitenlast pro Flächeneinheit. Dann befolgt eine kleine radiale Verbiegung  $w$  die Gleichung  $\Delta^4 w + 12a^{-2} h^{-2} (1 - \sigma^2) \sigma^4 w \partial x^2 = D^{-1} \Delta^2 q$ . Wird ein unendlich langer Zylinder durch zwei diametral in entgegengesetztem Sinn angreifende Kräfte belastet, so ergibt sich  $w$  als Fourierreihe in Umfangs- und als Fourierintegral in Achsenrichtung. Numerisch ausgewertet werden die Maximalbiegung unter der Last, die Biegung  $w$  entlang der durch den Angriffspunkt der Last gehenden Erzeugenden und der Konturlinien. Graphische Darstellung der Ergebnisse. Hat der Zylinder nur endliche Länge, so läßt sich die Lösung ebenfalls angeben (Kräfte angreifend an zwei diametral gelegenen Punkten im Mittelpunktsschnitt). *E. Hardtwig.*

Kilchevsky, N. A.: On axial-symmetric deformations and elastic stability of circular tubes under the action of longitudinal compressing forces. Priklad. Mat. Mech. 6, 497—508 (1942) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Untersuchung der Gründe für die Diskrepanz zwischen den experimentellen Ergebnissen und den theoretischen Berechnungen für die Stabilität von Zylinderschalen, die Druckkräften in Richtung der Erzeugenden unterworfen sind. Dabei werden Grenzprobleme von Rohren mit freileitenden und eingespannten Enden behandelt. *F. Reutter.*

Fadle, J.: Eine einfache Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen des Schalenproblems. Ingenieur-Arch. 14, 413—422 (1944).

Das von F. Reutter (dies. Zbl. 27, 169) in Angriff genommene Problem wird wieder aufgenommen. Die Grundgleichungen für dünne Schalen beliebiger Form und variabler Dicke werden abgeleitet. Die Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte und Momente lassen sich durch die Gaußschen Fundamentalgrößen 2ter Ordnung der deformierten Mittelfläche der Schale ausdrücken. Letztere sind ihrerseits Funktionen der gleichen Größen, aber bezogen auf die nicht-deformierte Mittelfläche sowie der Komponenten des Verrückungstensors. Bis hierher ist die Ableitung streng. Es folgt eine Vernachlässigung jener Glieder, die Ausdrücke 2ter Ordnung in den Verschiebungen bzw. deren Ableitungen und den Fundamentalgrößen enthalten. Die Gleichungen vereinfachen sich weiter, wenn die Dehnung der Mittelfläche während der Verformung vernachlässigt werden darf. *E. Hardtwig.*

Galerkin, B.: Equilibrium in an elastic spherical shell. Priklad. Mat. Mech. 6, 487—496 (1942) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Eine Kugelschale wird durch Kräfte beansprucht, die an der Oberfläche angreifen. Gesucht sind Spannungen und Deformationen. Zur Lösung des Problems werden drei unabhängige Spannungsfunktionen eingeführt, die Spannungen und Verrückungen unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen und der Beltramischen Kompatibilitätsbedingungen zu berechnen gestatten. Sonderfälle: 1. Kugelschale mit kegelförmiger Einbuchtung, Spitze des Kegels im Kugelmittelpunkt, 2. offene Kugelschale mit zwei coaxialen, kegelförmigen Einbuchtungen — gemeinsame Kegelspitze im Kugelmittelpunkt. Die Lösungen werden nicht in geschlossener Form, sondern in Form von Reihenentwicklungen mit Legendreschen Polynomen gegeben. *E. Hardtwig.*

● Meyerding, A. P.: Die Stabilitätsgrenze einer versteiften Zylinderteilschale bei Beanspruchung durch Schubkräfte. Diss. Hamburg. 1943. 40 S.

(1) Deuker, Ernst-August: Zur Stabilität der elastischen Schalen. I. II. Z. angew. Math. Mech. 23, 81—100, 169—179 (1943).

(2) Novojilov, V. V.: General theory of stability of thin shells. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 32, 316—319 (1941).



- (3) Galerkin, B. G.: Stability of a cylindrical shell. Priklad. Mat. Mech. 7, 49—56 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].
- (4) Pflüger, A.: Zur Stabilität der dünnen Kegelschale. Ingenieur-Arch. 13, 59—72 (1942).
- (5) Moushtary, C. M.: The approximate solution of certain problems of stability of a thin-walled conic shell with a circular cross-section. Priklad. Mat. Mech. 7, 155—166 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Stabilität elastischer Schalen. Unter den hierhergehörigen Arbeiten dürfte (1) von größter Allgemeinheit sein. Die Theorie geht von einer älteren Arbeit desselben Verf. aus (dies. Zbl. 24, 367) und stützt sich auf die üblicherweise benutzten Annahmen: 1. Daß Normalen zur undeformierten Mittelfläche auch nach der Deformation Normalen sind und 2. daß Spannungen normal zu Elementen parallel zur Mittelfläche auf die Deformationen von vernachlässigbar kleiner Wirkung sind. Von Differentialgeometrie und Tensorkalkül wird reichlich Gebrauch gemacht, die Theorie wird umfassend und sehr allgemein, vor allem aber mit Berücksichtigung auch der Glieder zweiter Ordnung in den Deformationsausdrücken entwickelt (Nichtlineare Theorie). Das Beispiel der Stabilität zylindrischer Schalen erläutert die allgemeine Theorie, allerdings erweisen sich zusätzliche Annahmen als notwendig. In Teil II wird die geschlossene, außen gleichmäßig druckbelastete Schale eingehend behandelt, allerdings ohne daß sich gegenüber der geläufigen linearen Theorie wesentliche Änderungen ergeben. Eine Herleitung der Differentialgleichungen der (linearen) Theorie gibt auch (2). Mit dem speziellen Problem der Stabilität zylindrischer Schalen bei Belastungen senkrecht zur Mittelfläche befaßt sich (3). Auch sie knüpft an eine ältere Arbeit des Verf. an, in der gezeigt wird, daß die Bestimmung der kritischen Belastung einer zylindrischen Schale von kreisförmigem Querschnitt auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung 8. Ordnung für die Verrückungsfunktion zurückgeführt werden kann [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 4, 270—275 (1934)]. Hier nun wird die Gleichung spezialisiert und die kritischen Belastungen in einigen Sonderfällen untersucht: 1. Ring unter gleichförmigem Druck. 2. Kreiszyylinder mit belastungsfreien Endflächen und gleichförmiger Belastung an den Stirnflächen, 3. Eulersche kritische Belastung. 4. Kreiszyylinder, an den Enden unterstützt, jedoch an der Seitenfläche gleichförmig belastet. Die Stabilität dünner Kegelschalen untersucht (4) unter vereinfachenden Annahmen und Vereinfachungen. Zur Bestimmung des kritischen Biegemoments wird die Ritzsche Methode angewandt, die Verrückungen werden approximativ bestimmt. In einem besonderen Fall werden die Resultate aus dem kritischen Verdrillungsmoment einer zylindrischen Schale und dem Öffnungswinkel hergeleitet. Ebenfalls mit dünnwandigen Kegelschalen befaßt sich (2). Auch hier wird die Ritzsche Methode verwendet, um eine Lösung für die kreiskegelförmige Schale zu finden, die gleichförmigen Druck- und Scherungskräften entlang der freien Enden unterworfen ist. Die Formeln für die kritischen Spannungen werden spezialisiert auf einige Sonderfälle von zylindrischen Schalen und Platten.

*E. Hardtwig.*

●Torre, K.: Vorschlag für die praktische Beulberechnung der in ihrer Mittelebene gleichmäßig gedrückten und mit Längsstreifen versteiften rechteckigen Platte. Diss. T. H. Wien 1943. 19 S.

Tsien, H. S.: Buckling of a column with non-linear lateral supports. J. aeronaut. Sci. 9, 119—132 (1942).

Eine Säule wird mit der Druckkraft  $P$  axial gedrückt und ist seitlich durch eine Anzahl von Federn mit nichtlinearer Charakteristik gestützt. Unterschiedlich werden die Fälle behandelt, in denen 1) die Druckkräfte  $P$  oder 2) die Endverkürzungen der Säule vorgeschrieben sind. Die Resultate sind auch von Wert für das Verständnis von Knickerscheinungen an dünnen Schalen, bei denen eine



beträchtliche Diskrepanz zwischen der rechnerischen Behandlung nach der linearen Theorie und den experimentellen Ergebnissen besteht. *F. Reutter.*

(1) Murnaghan, F. D.: The compressibility of media under extreme pressures. Proc. nat. Acad. Sci. USA **30**, 244—247 (1944).

(2) Murnaghan, F. D.: On the theory of the tension of an elastic cylinder. Proc. nat. Acad. Sci. USA **30**, 382—384 (1944).

(1) Setzt man eine lineare Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls vom Druck an, so stimmen für einen Druck bis zu  $10^5$  atm. theoretische und experimentelle Ergebnisse recht gut überein. (2) Bei der Spannung eines Zylinders in Richtung seiner Achse scheint die Isotropie des Materials nicht bewahrt zu bleiben. Es werden Formeln entwickelt, die — in Einklang mit (1) — dieser von der Spannung abhängigen Anisotropie Rechnung tragen. *F. Reutter.*

Gorgidze, A. Ja. and A. K. Ruchadze: Über Effekte zweiter Ordnung in der Biegung eines Kreiszyllinders. I, II, III. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskij SSR **2**, 397—404, 491—498 (1941); **3**, 221—228 (1942) [Russisch mit georg. Zusammenfassg.].

Aufbauend auf der allgemeinen Theorie endlicher Deformationen von F. D. Murnaghan (dies. Zbl. **17**, 155) wird das Problem eines Kreiszyllinders mit fester Grundfläche und kraftfreien Seitenflächen behandelt, dessen freie Endfläche unter der Einwirkung von Transversalkräften steht. *F. Reutter.*

Tonolo, Angelo: Teoria tensoriale delle deformazioni finite dei corpi solidi. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **14**, 43—117 (1943).

Ausführliche Behandlung der mathematischen Grundlagen der Theorie endlicher Formänderungen für den dynamischen und den statischen Fall. Die Einführung des Verzerrungs- und Spannungstensors in krummlinigen Koordinaten, die Herleitung des Verformungsgesetzes aus einem elastischen Potential und die Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen erfolgt in Eulerschen und in Lagrange-schen Koordinaten als unabhängige Variable. *R. Moufang.*

Rock, Donald Hill: Finite strain analysis in elastic theory. Iowa State College, J. Sci. **14**, 71—72 (1939).

(1) Seth, B. R.: Finite strain in anisotropic elastic bodies. I. II. Bull. Calcutta math. Soc. **37**, 62—68 (1945); **38**, 30—44 (1946).

(2) Krylov, V. V.: Plane problem of the theory of elasticity for finite displacements. Priklad. Mat. Mech. **10**, 647—656 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(1) behandelt endliche Formänderungen bei linearem Verformungsgesetz mit zunächst 21 elastischen Konstanten, u.a. den Kreiszyllinder unter Zug resp. Torsion, die Kugel- und Zylinderschale unter gleichförmiger Normalbelastung und die Biegung der dicken Rechteckplatte durch Randmomente. — Ebenfalls endliche Formänderungen und lineares Formänderungsgesetz werden in (2) benutzt, um die Theorie des ebenen Spannungszustandes zu begründen. *R. Moufang.*

(1) Oka, Syōten and Akiya Okawa: Über den Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation isotroper Substanzen beim gemeinsamen Auftreten von Elastizität, Plastizität und Viskosität. Proc. phys. math. Soc. Japan, III. Ser. **25**, 406—412 (1943).

(2) Sternberg, E.: Nonlinear theory of elasticity with small deformations. J. appl. Mech. **13**, A 53—A 60 (1946).

(1): Verff. befassen sich mit speziellen Stoffen, die zugleich Elastizität, Plastizität und Viskosität zeigen. Sie stellen ein differentielles, im Operator  $d/\sigma t$  ganzrationales Verformungsgesetz auf, das für gewisse Grenzfälle die Gleichungen der klassischen Elastizitätstheorie und der klassischen Hydrodynamik ergibt. Die Theorie von Bennewitz-Rötger und von Frenkel-Obrastzov ordnen sich

als Spezialfälle dem Ansatz ein. — (2) behandelt bei infinitesimalen Deformationen und nichtlinearem Formänderungsgesetz, das aus einem von den 3 Verzerrungs-invarianten abhängigen Potential abgeleitet ist, die Belastung durch einachsigen Zug resp. Druck und nach der St.-Venantschen Theorie die Torsion des Kreiszylinders. Hierbei ergibt sich, daß der Verdrehungswinkel nicht mehr linear vom verdrehenden Moment abhängt.

*R. Moufang.*

**Sokolovsky, W. W.:** On a problem of elastico-plastic bending of plates. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 52, 13—16 (1946).

Gleichförmig verteilte Last an einfach unterstützter kreisförmiger Platte. Die Platte wird als voll-plastisch vorausgesetzt und, es sollen Henckys Beziehungen zwischen Spannungen und Deformationen gelten. Gefragt ist nach der Spannungsverteilung in der Platte, nach der Abhängigkeit der zentralen Ausbiegung von der Belastung und der Änderung der plastischen Bereiche mit wachsender Last.

*E. Hardtwig.*

**Craemer, H.:** Idealplastische Trägerroste. Ingenieur-Arch. 14, 233—246 (1943)

Untersuchung der Tragfähigkeit von Trägerrosten mit längs der Stabachsen unveränderlichen Querschnitten unter Zugrundelegung der Spannungs-Dehnungs-Linie des ideal-plastischen Stoffes (Parallele zur Dehnungsachse). Es wird angenommen, daß sich die Träger an den Kreuzungsstellen frei gegeneinander verdrehen und waagrecht verschieben können, so daß dort nur lotrechte Kräfte übertragen werden. Für das Auftreten des Fließens sollen nur die Biegemomente maßgebend sein. Es werden folgende Fälle betrachtet: Zweiseitig gelagerte Roste mit 3, 4, 6 Längsträgern und 1 Querträger und mit je 3 Längs- und Querträgern; vierseitig gelagerte Roste mit je 3 Trägern in beiden Richtungen. Welche Querschnitte zum Fließen kommen und welches Verformungsbild entsteht, hängt von den Abmessungen der einzelnen Stäbe ab. Zum Schluß sind einige Bemerkungen über die orthotrope Platte angeschlossen.

*Th. Pöschl.*

**Pickett, Gerald:** Flexural vibration of unrestrained cylinders and disks. J. appl. Phys. 16, 820—831 (1945).

Biegeschwingungen von Stäben und dünnen Platten als Randwertproblem der dreidimensionalen Elastizitätstheorie. Die übliche Behandlung dieser Probleme mittels eindimensionaler bzw. zweidimensionaler Theorie geschieht unter Vernachlässigung von Gliedern, die groß werden, wenn die Dicke der Stäbe (Platten) vergleichbar wird mit ihrer Länge (ihren Durchmessern). In der hier ausgeführten Theorie sind die Fehler auch in diesen Fällen noch klein. Es sind Korrekturglieder angegeben, die den Resultaten der elementaren Theorie beigelegt werden sollen.

*F. Reutter.*

(1) **Tolotti, Carlo:** Orientamenti principali di un corpo elastico rispetto alla sua sollecitazione totale. Atti Accad. Italia, Mem. Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 13, 1139—1162 (1942) = Ist. naz. appl. Calcolo, II. Ser. Nr. 145.

(2) **Tolotti, C.:** Deformazioni elastiche finite; onde ordinarie di discontinuità e caso tipico di solidi elastici isotropi. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 4, 26 S. (1943) = Ist. naz. appl. Calcolo, II. Ser. Nr. 153.

Die Möglichkeit, die statischen Grundgleichungen zunächst formal durch Reihenentwicklung nach einem die Gesamtbelastung charakterisierenden Parameter zu integrieren, wird in (1) untersucht. Für gewisse Belastungsfälle kann die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten illusorisch werden, da ein Koeffizient unbestimmt bleibt. Die Fälle, in denen die Anwendung der gewöhnlichen Elastizitätstheorie zulässig, d. h. bei denen der erste Koeffizient eindeutig bestimmt ist, heißen Hauptorientierung der Belastung; sie werden näher untersucht. (2) zeigt, daß die Hadamardsche Theorie der isothermen Fortpflanzung elastischer Stoßwellen bei endlichen Formänderungen nur unter gewissen Annahmen über die Form des



elastischen Potentials eine reelle Polarisationsquadratik ergibt und charakterisiert den Fall, daß diese ein Rotationsellipsoid ist mit der Wellenfortpflanzungsrichtung als Drehachse.

*R. Moufang.*

Carbon, C. B. de: Sur l'hystérésis mécanique ou frottement interne. C. r. Acad. Sci., Paris **217**, 668—669 (1943).

Im Anschluß an zwei frühere Noten (C. r. Acad. Sci., Paris **215**, 241—244 (1942); **216**, 195—197 (1943)) wird für den gesamten Energieverlust während eines Belastungswechsel der angenäherte Ausdruck angegeben:  $V = A\Theta^4 + B\Theta^6 + \Theta^2 (lT - mT^3 \dots)$ , worin  $\Theta$  die Schwingweite,  $T$  die Periode der Schwingung und die übrigen Größen Konstante bedeuten. Diese Formel gibt insbesondere die älteren Arbeiten gut wieder. Die Zähigkeit wird durch eine „charakteristische Viskositätsfunktion“ eingeführt, die bei bekanntem Dekrement durch eine lineare Fredholmsche Integralgleichung gefunden werden kann.

*Th. Pöschl.*

Seth, B. R.: Transverse vibrations of triangular membranes. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **12**, 487—490 (1940).

●Krones, F.: Die Eigenschwingungen eines rechtwinkligen Quarzparallelepipeds. Diss. T. H. Wien 1943. 106 S., 24 Tafeln mit Abbildungen.

Pflüger, A.: Spannungen, Formänderungen und Schwingungen einer kegelförmigen Flügelschale. Luftfahrtforschung **20**, 29—32 (1943).

Verf. wendet die Ergebnisse einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **27**, 272) auf das Beispiel einer kegelförmigen Flügelschale an und zeigt, wann im Flugzeugbau die Veränderlichkeit der Querschnittsabmessungen berücksichtigt werden muß und wann sie vernachlässigt werden darf. Bei der Spannungsberechnung sind Querkraft und Drehmoment um vom Biegemoment abhängige Beträge „abzumindern“. Bei der Verformungsrechnung ist die Verdrehlinie mit demselben abgeminderten Drehmoment zu ermitteln, während für die Biegelinie im allgemeinen die für zylindrische Stäbe gültige Form der Differentialgleichung benutzt werden kann, sofern nicht (ausnahmsweise) das Drehmoment groß gegenüber dem Biegemoment ist. Endlich kann für Schwingungsrechnungen der Einfluß der kegelförmigen Gestalt der Schale vernachlässigt werden.

*H. Heinzerling.*

Pastori, Maria: Superficie d'onda epicentrale nei mezzi elastici anisotropi. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend., Cl. Sci. mat. natur., **76** (III. Ser. **7**), 9—18 (1943).

Im Anschluß an eine Arbeit von Finzi (dies. Zbl. **27**, 355) wird die Wellengleichung aufgestellt, jedoch nur für ein homogenes, vollständig elastisches Medium. Es ist eine Gleichung sechsten Grades. Sie zerfällt für isotrope Medien in drei Gleichungen von Kugelsymmetrie, für Greensche Medien in eine Gleichung zweiten Grades von Kugelsymmetrie und eine Gleichung vierten Grades, die einer Fresnelschen Welle entspricht. Diese erweist sich nämlich als identisch mit der Wellenfläche der Optik, die einem magnetisch isotropen, elektrisch anisotropen Medium zugehört.

*G. Hamel.*

Mindlin, J. A.: Propagation of waves over the surface of a circular cylinder of infinite length. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **52**, 107—110 (1946).

Bei Fortschrittgeschwindigkeiten der axialsymmetrischen Wellen zwischen der der Rayleighwelle und der Transversalwelle liegt die Wellenlänge zwischen Null und einer (angegebenen) festen oberen Grenze.

*F. Reutter.*

Garcia, Godofredo: Lord Rayleigh's Theorie der Erdbebenwellen in einem kristallinen Medium des kubischen Systems. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., Revista **6**, 49—62 (1941) [Spanisch].

Hohenemser, K.: Zur Dynamik von umlaufenden, gelenkig an die Nabe angeschlossenen und in der Umlaufebene schwingenden Stäben. Ingenieur-Arch. **14**, 83—95 (1943).



Elektrodynamik. Optik:

**Liénard, A.:** Application du principe de la moindre action aux théories électro-dynamiques modernes. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 319—321 (1943).

**Dive, P.:** Propagation curviligne de l'énergie électromagnétique dans un continuum riemannien. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 104—106 (1943).

Ausdehnung des Poyntingschen Satzes, daß die durch die Wellenflächen bestimmten Lichtstrahlen mit den Energiestromlinien zusammenfallen, auf ein elektromagnetisches Feld im Riemannschen Raum. *F. Bopp.*

**Liebowitz, Benjamin:** Development of electromagnetic theory for non-homogeneous spaces. Phys. Review, II. Ser. 64, 294 (1943).

Die Dielektrizitätskonstante (DK) sei eine willkürliche stetige Funktion des Ortes. Verf. zeigt, daß auch in diesem Fall getrennte Wellengleichungen erhalten werden können, durch passende Einführung eines Riemannschen Raumes, wobei sein Linienelement  $ds^2 = h^2 (du_1^2 + du_2^2 + du_3^2)$  mit der DK durch die Relation  $h^2 = 1/\varepsilon$  verknüpft wird. Dabei muß eine zusätzliche Hilfsvariable (Skalar) eingeführt werden, welche mit  $h$  durch eine Differentialgleichung verknüpft ist. Die Wellengleichungen haben wesentliche Singularitäten im Ursprung und im Unendlichen. Es werden dann einige einfache elektrostatische Beispiele erörtert und kosmologische Folgerungen gezogen. *P. Urban.*

**Costa de Beauregard, Olivier:** Sur l'électromagnétisme des milieux polarisés: définition d'un tenseur de Maxwell asymétrique. C. r. Acad. Sci., Paris 217, 662—664 (1943).

**Duchon, R. et M. Morand:** Calcul de la distribution du potentiel entre électrodes d'un système à symétrie cylindrique. J. Phys. Radium. VIII. Sér. 4, 39—40 S. (1943).

Bericht über Lösungsmethoden bei einigen Aufgaben der Potentialtheorie: Es ist die Potentialverteilung zwischen zwei Elektroden mit Zylindersymmetrie zu ermitteln, wenn sie bestehen: 1. aus zwei identischen coaxialen Zylindern, 2. aus einer Ebene und einem Zylinder endlicher Länge, der im Innern von einer Ebene begrenzt ist, 3. aus einer Ebene und einem Zylinder, die sich mit einer Ebene vereinigen ( $\varphi$ ). Die strenge Lösungsmethode beruht auf der Verwendung der Greenschen Funktion. Die Näherungsmethode ersetzt die elektrisierte Leiteroberfläche durch gleichförmig geladene, ringförmige lineare Leiter, deren Verteilung derart gewählt wird, daß sie näherungsweise dieselben Äquipotentialflächen ergeben wie das vorgelegte Leitersystem. *H. Buchholz.*

**Constantinescu, I.:** Aspects physiques et mathématiques des phénomènes transitoires. Bul. Politechn. Bucureşti 13, 131—138 (1942).

Erläuterung der Bedeutung der Laplace-Transformation für Einschaltvorgänge in Leitungsnetzen an einem einfachen Beispiel. Qualitative Diskussion der Einschaltvorgänge, bei denen die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit wichtig ist: Reflexion an den Enden einer Leitung, Dispersion bei sehr langen Leitungen. *F. Bopp.*

**Raymond, François:** Remarques sur les coordonnées symétriques de Forteseue. C. r. Acad. Sci., Paris 218, 113—115 (1944).

**Cerrillo, Manuel:** Einfaches Verfahren der Aufstellung der kanonischen Gleichungen elektrischer Netze. Comisión Impulsora y Coordinadora de la Investigación Científica Mexico. Anuario 1943, 179—184 (1944) [Spanisch].

● **Slooten, Jacob van:** Geometrical considerations in connection with the theory of four-terminal networks. Thesis. Delft: Technische Hoogeschool te Delft 1946. 87 p. [Holländisch mit engl. Zusammenfassg.].

● **Josephs, H. J.:** Heaviside's electric circuit theory. New York: Chemical Publishing Co. of N. Y., Inc., 1946. VIII, 115 p.; \$ 2,25.

● Carter, G. W.: The simple calculation of electrical transients. Cambridge, England: Cambridge University Press; New York: Macmillan Company, 1945. VIII, 120 p. s 1,75.

Colombani, Antoine: Les polynomes de Tchebycheff et la théorie des filtres électriques. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1278—1280 (1946).

Marié, Pierre: Sur une formule rigoureuse du rapport d'affaiblissement dans un filtre. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 869—870 (1946).

Marié, Pierre: Propagation des ondes dans les systèmes périodiques, compte tenu de certaines conditions aux limites. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1039—1042 (1946).

Marié, Pierre: Sur le filtrage des ondes. C. r. Acad. Sci., Paris 223, 352—354 (1946).

Page, Leigh: The electrical oscillations of a prolate spheroid. III. The antenna problem. Phys. Review, II. Ser. 65, 111—117 (1944).

Verf. führt die Berechnung der Eigenfrequenzen für die Grundschiwingung und für die ersten zwei Oberschwingungen eines Ellipsoides mit großer Exzentrizität und unendlich guter Leitfähigkeit durch, wobei die Randbedingung an der Oberfläche des Ellipsoides ( $E_z = 0$ ) in Verbindung mit der in II (ibidem, 98 + 110) gefundenen Felddarstellung, herangezogen wird. Im weiteren wird das Feld der erzwungenen Schwingung (Empfangsantenne) behandelt, welche durch den Einfall einer ebenen Welle  $e^+$ , deren elektrischer Feldvektor parallel zur großen Achse des Ellipsoides liegt, entsteht. Das Lösungsfeld besteht dann aus der einfallenden Welle und einem Sekundärfeld  $e^-$  (gestreute Welle), die zusammen die Randbedingung  $(\mathfrak{G}^{(i)} + \mathfrak{G}^{(r)})_z = 0$  erfüllen müssen. Zur Darstellung der  $\xi$ -Komponente des Streufeldes wird ein Reihenansatz, bestehend aus den in II berechneten, noch mit unbestimmten Koeffizienten versehenen partikulären Lösungen, welche die Randbedingung im Unendlichen aber nicht auf dem Ellipsoid erfüllen, verwendet. In Verbindung mit der oben angegebenen Randbedingung für das Gesamtfeld, wobei noch die  $\xi$ -Komponente von  $e^-$  berechnet werden muß, erhält man daraus die unbestimmten Koeffizienten des Reihenansatzes und damit das Gesamtfeld. Für eine unendlich dünne Antenne wird schließlich der Fall der ersten Resonanz ausführlich behandelt, die Stromverteilung und der Strahlungswiderstand berechnet. Die diesbezüglichen Ergebnisse stehen mit den Resultaten einer früheren Arbeit von Verf. und N. I. Adams [The electrical oscillations of a prolate spheroid. I. Phys. Review, II. Ser. 53, 819—831 (1938)], in welcher eine schwächere Näherung benützt wurde, in völliger Übereinstimmung. E. Ledinegg.

König, H.: Die Ähnlichkeitsgesetze des elektromagnetischen Feldes und ihre Anwendung auf Hohlraumresonatoren. Hochfrequenztech. Elektroak. 58, 174—180 (1941).

Verf. behandelt die Frage, unter welchen Bedingungen zwei geometrisch ähnliche elektrodynamische Systeme auch eine geometrisch-zeitliche Ähnlichkeit der Feldbilder aufweisen. Auf Grund der Maxwell'schen Gleichungen und der Ähnlichkeitsforderung für die korrespondierenden Feldstärken der beiden Systeme gelangt Verf. zu drei (gegenüber geometrischen Ähnlichkeitstransformationen) invarianten Potenzprodukten, in welchen neben den Ortskoordinaten der Quotient der Absolutbeträge des elektrischen und magnetischen Feldes und die Materialkonstanten  $\epsilon$  und  $\mu$  sowie die Zeit auftreten. Die angeführten drei Invarianten, deren Existenz notwendig und hinreichend zur geforderten Ähnlichkeit der elektromagnetischen Felder ist, können auch, wie in der Arbeit angeführt, auf andere Weise, nämlich auf Grund des //Theorems der Dimensionstheorie gefunden werden. Die Ähnlichkeitsgesetze werden insbesondere auf Hohlraumresonatoren angewendet, wobei Volumverluste und Oberflächenverluste zugelassen werden. Aus den theoretisch und auch meßtechnisch interessanten Ergebnissen sei das Folgende herausgegriffen: Werden die linearen Abmessungen eines Hohlraumes um den Faktor  $1/m$  ( $m \geq 1$ ) verkleinert, wobei die Leitfähigkeit ungeändert bleibt, so wird die Ähn-



lichkeit der Feldlinien im wesentlichen nur in der metallischen Hülle gestört. Die Dämpfung des verkleinerten Resonators ist dabei um den Faktor  $m^{1/2}$  angewachsen, während die Eigenfrequenz des Systems sich auf das  $m$ -fache erhöht hat.

*P. Urban.*

Jouguet, Marc: Sur les oscillations électromagnétiques naturelles d'une cavité ellipsoïdale. C. r. Acad. Sci., Paris **214**, 214—215 (1942).

Simoni, Franco de: Teoria matematica dei risonatori cavi cilindrici eccitati da un dipolo hertziano. Commentationes, Pontificia Acad. Sci. **9**, 491—513 (1945).

Simoni, Franco de: Teoria matematica dei risonatori cavi prismatici eccitati da un dipolo hertziano. Commentationes, Pontificia Acad. Sci. **10**, 249—269 (1946).

Borgnis, F.: Zum Resonanzverhalten elektromagnetisch erregter Hohlräume. Z. Physik **122**, 407—412 (1943).

Verf. betrachtet einen Hohlraumresonator mit unendlich gut leitender Begrenzung; der gleichmäßig von einem Dielektrikum mit den Konstanten  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  erfüllt ist, und fragt nach seiner Resonanzkurve, d. h. dem Verlauf der Amplitude irgendeiner Feldkomponente in Abhängigkeit von der erregenden Frequenz  $\omega$ , falls letztere in der Umgebung einer Eigenfrequenz  $\omega_0$  des Resonators (bei konstanter äußerer Erregung) liegt. Durch Entwicklung der Feldkomponenten nach dem Orthogonalsystem der Eigenschwingungen beweist Verf., daß für die Amplitude in Resonanznähe die Formel  $A \sim A_{\text{res}} / \sqrt{1 + v^2 \bar{a}^2}$  gilt, in der  $v = \omega \omega_0^{-1} - \omega_0 \omega^{-1}$ ,  $d = \sigma / \varepsilon \omega$  die sogenannte Verstimmung und Dämpfung,  $A_{\text{res}}$  die Resonanzamplitude bezeichnen. Es ist dies der gleiche analytische Ausdruck, der von den aus Selbstinduktionen und Kapazitäten aufgebauten „konzentrierten“ Schwingkreisen her bekannt ist.

*H. Geppert.*

Ritter, W.: Zum Ersatzschaltbild des Hohlraumresonators, insbesondere des zylindrischen Hohlraumresonators. 41 S. Diss. Wien 1943.

Hsü, Chang-Pen: Transmission theory of concentric lines. J. Math. Physics **21**, 43—51 (1942).

Die nichtelementare Ableitung der Leitungsgleichungen eines konzentrischen Kabels wird im allgemeinen so durchgeführt, daß man einen rotationssymmetrischen Lösungstyp der Maxwell'schen Gleichungen im Dielektrikum betrachtet, für welchen die Bedingung  $h^2 \approx k^2$  (Phasengeschwindigkeit der ebenen Welle ungefähr gleich der Lichtgeschwindigkeit) besteht. Mittels des komplexen Poynting'schen Satzes, der auf die beiden inneren Berandungsflächen des Kabels angewandt wird, gewinnt man dann die Leitungsgleichungen. Verf. hat einen exakteren Weg eingeschlagen und stellt zunächst für die drei Medien (Innenleiter, Dielektrikum, Außenleiter) Reihenlösungen auf, deren einzelne Glieder partikuläre Integrale der Maxwell'schen Gleichungen darstellen, welche noch zur Anpassung mit unbestimmten Koeffizienten versehen sind. Infolge der Annahmen  $h^2 \approx k^2$  sowie geringer Verluste im Dielektrikum und hoher Leitfähigkeit in den metallischen Leitern gelingt es, die Anpassungskonstanten auf einfache Weise zu berechnen und die im weiteren benötigten tangentiellen elektrischen Feldstärken in der  $z$ -Richtung an den Leiteroberflächen durch den Leitungsstrom allein auszudrücken. Damit erhält Verf. nach einem zur erstgenannten Methode analogen Vorgehen die Leitungsgleichungen in der üblichen Form. Abschließend werden noch die Übertragungseigenschaften der Lecherwellen ( $h^2 \approx k^2$ ) mit beliebigen Hohlrohrwellen verglichen, wobei keine neuen Gesichtspunkte herausgearbeitet werden.

*E. Ledinegg.*

Hsü, Chang-Pen: Transmission theory of a cylindrical hollow tube guide. J. Math. Physics **21**, 23—42 (1942).

Die vorliegende Arbeit, welche zu einem Zeitpunkt veröffentlicht wurde, als die Übertragung elektromagnetischer Energie mittels Hohlrohre in den Blick-



punkt des Hochfrequenzingenieurs trat, behandelt das Problem der Wellenfortleitung in einem kreiszylindrischen Hohlrohr. Als Anregung wird dabei eine lineare Antenne endlicher Länge, welche in der Hohlrohrachse liegt, bzw. eine senkrecht zur Achse eingebrachte kreisförmige Rahmenantenne angenommen. Schon R. Weyrich hat in seiner klassischen Arbeit „Über einige Randwertprobleme der Elektrodynamik“ das genannte Problem für den elementaren elektrischen und magnetischen Dipol erschöpfend theoretisch behandelt und auch die Integraldarstellungen des Hertzsehen bzw. Fitzgeraldsehen Vektors für die oben erwähnten Fälle (Antennen endlicher Ausdehnung) angegeben. Verf. hat, von den Residuenreihen dieser Integraldarstellungen ausgehend, die Übertragungseigenschaften für das Fernfeld eingehend diskutiert und ist insbesondere auf die fernmelde-technischen Anwendungsmöglichkeiten eingegangen. Dieser Teil der Diskussions-ergebnisse kann nicht mehr als aktuell angesehen werden, da heute eine allgemein gehaltene Leitungstheorie mit ein- oder mehrwelliger Übertragung vorliegt, welche auf einer sinnvollen Zuordnung der Feldgrößen zu den Begriffsbestimmungen einer quasistationären  $2n$ -Poltheorie beruht und wesentlich weitergehende Aussagen zu machen gestattet.

*E. Ledinegg.*

**Buchholz, Herbert:** Der Hohlleiter von kreisförmigem Querschnitt mit geschichtetem dielektrischem Einsatz. *Ann. der Physik*, V. F. **43**, 313—368 (1943).

Verf. behandelt ausführlich die Hohlrohrwellen in einem Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt, wobei eine konzentrische Schichtung des dielektrischen Mediums angenommen wird. Es handelt sich um ein Zweischichten-Problem, und es interessieren insbesondere die Fälle: Dielektrischer Innenleiter im Hohlrohr und andererseits kreisringförmiger dielektrischer Einsatz, welcher sich an die Mantelfläche anschließt. Versucht man nämlich, die zu einem vorgegebenen Wellentyp zugeordnete Grenzwellenlänge heraufzusetzen, indem man das Hohlrohr mit einem Dielektrikum ausfüllt, so wird im allgemeinen dadurch die Dämpfung des Systems stark vergrößert, was die Übertragungseigenschaften wesentlich verschlechtert. Man wird daher versucht sein, das Hohlrohr nur teilweise mit dielektrischem Material auszukleiden, um tragbare dielektrische Verluste bei gleichzeitiger Vergrößerung der Grenzwellenlänge zu erreichen. Die Arbeit erbringt zunächst formal die allgemeine Lösung für den verlustfreien Fall. Dabei zeigt Verf., daß die Rand- und Stetigkeitsbedingungen durch die simultane Verwendung von Lösungen des  $E$ - bzw.  $H$ -Typs befriedigt werden, daß also eine „Kopplung“ der beiden Feldtypen angenommen werden muß. Nur im zylindersymmetrischen Falle (keine  $q$ -Abhängigkeit) sowie bei Auftreten einer kritischen Frequenz zerfallen die Felddösungen in für sich konsistente  $E$ - und  $H$ -Typen. Infolge des komplizierten Aufbaues der charakteristischen Gleichung, aus welcher die Fortpflanzungskonstante zu berechnen ist, beschränkt sich Verf. im weiteren auf die oben angeführten Spezialfälle, insbesondere auf die Behandlung des  $E_{n0}$ - und  $H_{n0}$ -Typs. Die charakteristische Gleichung wird dabei teils durch analytische Methoden und teils durch graphische Verfahren gelöst. Die Behandlung der verlustbehafteten Leitung erfolgt dann in üblicher Weise einerseits durch Einführung der komplexen Dielektrizitätskonstanten, wobei sich am Lösungsgang formal nichts ändert, und andererseits durch Berücksichtigung der Wirbelstromverluste bei Zugrundelegung der Näherungsformeln, die für den starken Hauteffekt gültig sind. Die totale Dämpfung (erzeugt durch dielektrische Verluste + Oberflächenverluste) wird schließlich für den  $H_{10}$ - und  $H_{20}$ -Typ berechnet und ihre Frequenzabhängigkeit in Diagrammen dargestellt.

*P. Urban.*

**Spence, R. D. and C. P. Wells:** The propagation of electromagnetic waves in parabolic pipes. *Phys. Review*, II. Ser. **62**, 58 (1942).

Es wird die Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Hohlleitern von parabolischem Querschnitt behandelt. Zuerst separiert der Verf. die

Wellengleichung und das Maxwellsche Gleichungssystem in parabolischen Koordinaten. Dabei ergeben sich Differentialgleichungen von konfluentem hypergeometrischem Typus. Als erstes wird der Fall vollkommener Leiter erledigt, unter Verwendung der bekannten Randbedingungen (Tangentiale Komponente der elektrischen Feldstärke gleich Null). Daran schließt sich der Fall endlicher Leitfähigkeit. Es werden Formeln für die Feldverteilung und die Eigenfrequenzen entwickelt, die für technische Anwendungen von Wichtigkeit sind. *P. Urban.*

**Pfister, W.:** Die Ausbreitung der elektrischen Wellen längs der Erdoberfläche (ohne Berücksichtigung der Ionosphäre). Mitt. Deutsche Akad. Luftfahrtforsch. 2, 221—299 (1943).

Gesamtdarstellung der theoretischen und experimentellen Ergebnisse der Theorie der Bodenwellenausbreitung. Leitfaden, der die Benutzung der Originalliteratur erspart. Die Darstellung beginnt mit den Maxwellschen Gleichungen, behandelt ebene Wellen (Reflexion, Ausbreitung längs einer ebenen Oberfläche, Zennecksche Oberflächenwelle, Reflexion am geschichteten Medium), Strahlung eines elektrischen Dipols (im freien Raum, über ebener Erde, über der gekrümmten Erdoberfläche). Den Schluß bilden praktische Ergebnisse (Kurvenbilder für den praktischen Gebrauch), doch sind auch vorher viele kurvenmäßige Darstellungen eingearbeitet (insgesamt 79 Diagramme und Abbildungen). *E. Schulenberg.*

**Destriau, G.:** Propagation des charges électriques sur les pellicules faiblement conductrices. J. Phys. Radium, VIII. Sér. 4, 240—257 (1943).

Es wird die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einer dünnen elektrischen Schicht untersucht, die auf der einen Seite von einem guten Leiter, auf der anderen Seite von einer sehr schlecht leitenden metallischen Haut begrenzt wird. Die Selbstinduktivität wird dabei vernachlässigt. Die theoretischen Grundlagen eines solchen Ausbreitungsvorganges sind seit langem erforscht. Von praktischem Nutzen ist allenfalls der Hinweis, daß unter den angegebenen Bedingungen die Kapazität frequenzabhängig ist. *H. Buchholz.*

**Hurwitz jr., Henry:** The statistical properties of unpolarized light. J. opt. Soc. Amer. 35, 525—531 (1945).

Aus dem Zusammenwirken physikalischer und mathematischer Gründe folgert Verf., daß die Komponenten des Feldvektors eines monochromatischen polarisierten Strahlenbündels die Form  $E_x = X \cos \omega t + U \sin \omega t$  bzw.  $E_y = Y \cos \omega t + V \sin \omega t$  hat, wo  $X, Y, U, V$  mit der Zeit langsam veränderlich sind, in jedem Augenblick aber voneinander unabhängige willkürliche Variable mit gleicher Normalverteilung darstellen. Hiernach beschreibt der Vektor eine Ellipse mit den Hauptachsen  $a$  und  $b$  derartig, daß  $2ab(a^2 + b^2)^{-1}$  gleichförmig zwischen 0 und 1 verteilt ist. *J. Picht.*

**Ambarzumian, B.:** On the problem of the diffuse reflection of light. Acad. Sci. URSS, J. Phys. 8, 65—75 (1944).

Untersuchung der diffusen Reflexion des Lichtes durch ein Medium, dessen Volumelemente einzeln absorbieren und reflektieren. Die Vielfach-Reflexionen in dem Medium lassen sich durch eine Streuindikatrix  $x(\vartheta, q, \vartheta', q')$  beschreiben, die den Lichtbetrag angibt, der von einem Volumelement aus der Richtung  $\vartheta, q$  in die Richtung  $\vartheta', q'$  gestreut wird. Dabei wird angenommen, daß die Indikatrix die Form  $x = x(\cos \gamma)$  hat, wo  $\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$  ist. Das Medium besteht aus planparallelen Schichten, auf der einen Seite von einer Ebene begrenzt, nach der anderen Seite bis zum unendlichen ausgedehnt. Gefragt ist nach der diffusen Reflexion  $r(\vartheta_0, q_0, \vartheta', q')$  des Gesamtmediums in Abhängigkeit von der Richtung  $\vartheta', q'$ , wenn ein paralleles Strahlenbündel in der Richtung  $\vartheta_0, q_0$  auf die Grenzebene trifft. Da die Funktion ungeändert bleiben muß, wenn eine endliche Schichtdicke entfernt wird, läßt sich eine quadratische Integralgleichung aufstellen. Zu ihrer Lösung wird die Indikatrix sowie



die unbekannte Funktion  $r$  nach Legendreschen Polynomen entwickelt, wodurch es möglich wird, die Integralgleichung für  $r$  durch ein System von Integralgleichungen für gewisse allgemeine Funktionen  $q(\nu)$  einer Variablen zu ersetzen. Für eine sphärische Indikatrix  $x=1$  sowie für eine schiefe Indikatrix  $x=1+x_1\cos\vartheta$  werden diese Gleichungen gelöst.

*J. Picht.*

Ramachandran, G. N.: Reflection of light by a periodically stratified medium. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A, 16, 336—348 (1942).

Es werden die komplexen Amplituden des durchgehenden und des reflektierten Lichtes in der  $n$ -ten Schicht — relativ zur Amplitude des einfallenden Lichtes — für den allgemeinen Fall komplexer Durchlässigkeit und die Reflexionskoeffizienten jeder der Schichten abgeleitet, wobei die Behandlungsform derjenigen sehr ähnlich ist, die für Rückkopplung in elektrischen Anordnungen bekannt ist. Anwendung auf den Fall der periodischen Brechungsindex-Änderung in sich rechtwinklig durchsetzenden Wellen, und zwar bei beliebigem Einfallswinkel. Diskussion der Scharfe der ersten Maxima, die nicht unendlich wachsen können, auch nicht bei unendlicher Zahl der reflektierenden Schichten. Ferner wird gezeigt, daß die Intensitätsverteilung der sekundären Maxima im allgemeinen nicht symmetrisch ist mit Bezug auf die primäre.

*J. Picht.*

Sivuchin, D. V.: Phänomenologische Theorie der Übergangsschicht. Žurn. éksper. teor. Fiz. 13, 361—375 (1943) [Russisch].

Mallemann, R. de et F. Suhner: Réflexion elliptique normale et oblique, étude optique des couches minces. Revue Optique théor. instrum. 23, 20—38 (1944).

In beiden Arbeiten handelt es sich um Reflexion und Brechung des Lichtes an Grenzflächen (Ebenen) gegen ein anisotropes Medium. Sivuchin setzt ein geschichtetes anisotropes Medium mit den Hauptbrechungsindizes  $n_x(z) = n_y(z)$ ;  $n_z(z) = n_x(z)$  mit  $0 \leq z \leq -l$  voraus, das sich zwischen zwei homogenen Medien ( $n_1$  und  $n_2$ ) befindet, und benutzt zur Behandlung die Maxwell'schen Gleichungen. Dabei wird das Feld im Innern der Schicht als Potenzreihe von  $k = 2\pi/\lambda$  dargestellt, wobei für  $l/\lambda \ll 1$  die Glieder, die von höherer Ordnung als  $(kl)^2$  sind, vernachlässigbar klein sind. Für den Fall, daß sich der Brechungsindex im Innern nach einem Potenzgesetz ändert, werden Kurvendarstellungen gegeben. Auch werden die Polarisationsverhältnisse in der Nähe des Brewsterschen Winkels untersucht. — De Mallemann und Suhner nehmen speziell als anisotropes Medium einen einachsigen Kristall und wählen zwischen diesem und dem angrenzenden isotropen Medium noch eine Übergangsschicht, da ihre ohne diese Schicht erhaltenen Formeln die experimentellen Ergebnisse nicht richtig darstellen. Sie beschreiben noch abschließend ein Meßinstrument zur experimentellen Prüfung der theoretischen Ergebnisse.

*J. Picht.*

Deans, J.: The mathematical theory of the influence of thin films on the reflection and transmission of light. Math. Gaz. 29, 57—65 (1945).

Mooney, Robert L.: An exact theoretical treatment of reflection-reducing optical coatings. J. opt. Soc. Amer. 35, 574—583 (1945).

Bannon, J.: A study of the reflection of light in the case of three homogeneous, isotropic, non-conducting media in successive contact. J. Proc. roy. Soc. New South Wales 79, 101—115 (1946).

Berechnung der Intensität des von einer dünnen planparallelen Schicht, die sich zwischen zwei homogenen isotropen Medien befindet und selbst homogen und isotrop ist, reflektierten und hindurchgehenden Lichtes in Abhängigkeit von der Dicke der Schicht sowie der Wellenlänge des Lichtes. Während Deans und Bannon diese Berechnungen durch Summation der durch die wiederholten Reflexionen an den Grenzflächen des dünnen Zwischenmediums entstehenden Wellen (mit Berücksichtigung der Phasenverhältnisse) durchführen, berechnet Mooney die reflektierte und durchgelassene Gesamtwellen mit Benutzung der



Maxwell'schen Gleichungen unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen, wobei er zunächst ein System linearer Gleichungen für die komplexen Größen erhält, die die Amplituden und Phasen der verschiedenen Wellenzüge darstellen, die er dann auf den Fall senkrecht einfallenden Lichtes anwendet. — Die Ergebnisse werden im Hinblick auf Maxima und Minima (als Funktion von Schichtdicke und Wellenlänge) diskutiert. Von Mooney wird auch der Einfluß der Absorption der Zwischenschicht behandelt. Deans diskutiert die Verhältnisse bzgl. Reflexion und Durchlässigkeit bei einfallendem weißem Licht. Bannon vergleicht die theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen Befunden in Abhängigkeit von Filmstärke und Einfallswinkel.

*J. Picht.*

Schulz, H.: Zur Theorie der Refraktometer. Z. Instrumentenkunde 63, 261—265 (1943).

(1) Silberstein, Ludwik: A fundamental criterion of uniform representability of equiluminous colors on a geometrical surface. J. opt. Soc. Amer. 32, 552—556 (1942).

(2) Silberstein, L.: Investigations on the intrinsic properties of the color domain. II. J. opt. Soc. Amer. 33, 1—10 (1943).

(3) MacAdam, L. David: On the geometry of color space. J. Franklin Inst. 238, 195—210 (1944).

Teil I von L. Silberstein: Investigations . . . s. dies. Zbl. 18, 335. (1): Werden die verschiedenen Farben ( $C$ ) gleicher Helligkeit, und zwar jede von ihnen, durch zwei voneinander unabhängige Reizkomponenten  $u$ ,  $v$ , d. h. durch zwei verschiedene monochromatische Lichter bekannter Wellenlänge dargestellt, so daß  $C = C(u, v)$ , so bildet die Gesamtheit der  $C(u, v)$  eine Fläche  $S$  konstanter Krümmung, wobei der geodätische Abstand zweier Punkte von  $S$  proportional ist dem chromatischen Unterschied der betreffenden Farben. — Nach experimentellen Untersuchungen von D. L. MacAdam in J. Opt. Soc. Amer. 32, 247—274 (1942) war gezeigt, daß das Linienelement, das durch den gerade noch wahrnehmbaren Unterschied gleich heller Farben in dem zweidimensionalen Darstellungsraum bestimmt ist, quadratisch ist. In (2) beschäftigt sich Verf. mit der durch jene Linienelemente charakterisierten „Farbfläche“. Er berechnet deren Gaußsche Krümmung, die  $\geq 0$  sein kann und Werte beträchtlicher Größe annehmen kann. In einem nur  $\frac{1}{50}$  des ganzen Farbbereiches darstellenden Dreieck beträgt die Winkelabweichung nach Verf. bereits etwa  $12^\circ$ . — In (3) werden den Beziehungen zwischen den Farben gleichfalls geometrische Analoge gegenübergestellt. Es wird eine allgemeine Methode zur Konstruktion eines Flächenmodells zur Darstellung der Farbbeziehungen beschrieben und ein derartiges Modell photographisch wiedergegeben. Die Fläche hat variable Krümmung  $\geq 0$ . Hinweis darauf, daß die experimentellen Ergebnisse noch nicht ausreichen, dem Dreieck zur Darstellung der variablen Helligkeit und der Farbtönung eine einwandfreie Metrik aufzuprägen. Doch scheint sie nichteuklidisch zu sein. Die Annahmen von D. E. Spencer und von P. Moon, die für die Färbung eine ebene Metrik, für die Verbindung zwischen Helligkeit und Färbung eine euklidische Metrik vorschlagen, diskutiert MacAdam, hält sie aber für unberechtigt.

*J. Picht.*

● Zworykin, V. K., G. A. Morton, E. G. Ramberg, J. Hillier and A. W. Vance: Electron optics and the electron microscope. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1945. XI, 766 p.; \$ 10,00.

Picht, Johannes: Beiträge zur Theorie der elektrischen Ablenkung von Elektronenstrahlenbündeln. IV. Ann. der Physik, V. 43, 53—72 (1943).

Teil III dies. Zbl. 26, 38.

Goddard, L. S.: Optical characteristics of a two-cylinder electrostatic lens. Proc. Cambridge philos. Soc. 42, 106—126 (1946).

Goddard, L. S.: A note on the Petzval field curvature in electron-optical systems. Proc. Cambridge philos. Soc. 42, 127—131 (1946).

Sugiura, Yoshikatsu and Shigeo Suzuki: On the magnetic electron lens of minimum spherical aberration. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 293—302 (1943).

Sugiura, Y. and S. Suzuki: Note on the magnetic electron lens of minimum spherical aberration. Proc. imp. Acad. Tokyo 19, 544—545 (1943).

Wallauschek, Richard: Elektronenoptische Fokussierung durch quasistatische Bahnen. Z. Phys. 117, 565—574 (1941).

Die Fokussierung in einem Elektronenbündel mit einem kreisförmigen Hauptstrahl, der zur Achse eines rotationssymmetrischen Feldes symmetrisch liegt, wird untersucht. Bahnen, welche unter verschiedenen Neigungswinkeln zum Hauptkreis in einer achsensenkrechten Ebene ausgehen, werden im allgemeinen nach einem anderen Winkel fokussiert als solche, welche tangential zu der durch den Hauptkreis gehenden Zylinderfläche liegen. Die Bedingungen für das Zusammenfallen der beiden Fokussierungspunkte, d. h. für die „Richtungs-doppelfokussierung“, werden angegeben und an speziellen Anordnungen erläutert. Die Methode hat in der Zwischenzeit bei Massenspektrographen Anwendung gefunden.

W. Glaser.

Glaser, Walter: Über elektronenoptische Abbildung bei gestörter Rotationssymmetrie. Z. Phys. 120, 1—15 (1942).

Nicht Beugung und Öffnungsfehler, sondern eine geringe Abweichung von der Rotationssymmetrie des Abbildungsfeldes ist der die Auflösung beschränkende Hauptfaktor. Der (starke) Einfluß des „axialen Astigmatismus“, der einem bestimmten „Unsymmetriegrad“ des Feldes entspricht, wird formelmäßig und numerisch berechnet. Im Anschluß an diese Arbeit sind eine Reihe von Untersuchungen erschienen.

W. Glaser.

Hutter, R. G. E.: The class of electron lenses which satisfy Newton's image relation. J. appl. Phys. 16, 670—678 (1945).

Die der Newtonschen Abbildungsgleichung genügende Klasse starker Elektronenlinsen, welche 1941 vom Ref. gemeinsam mit E. Lammell ermittelt wurde (dies. Zbl. 26, 32), wird nach einer anderen Methode hergeleitet. Die in obiger Arbeit angegebenen speziellen Felder dieser Eigenschaft beruhen auf einem Irrtum. Vgl. W. Glaser und O. Bergmann (dies. Zbl. 40, 277).

W. Glaser.

Hutter, R. G. E.: Rigorous treatment of the electrostatic immersion lens whose axial potential distribution is given by:  $\varphi(z) = \varphi_0 e^{k_{\text{ax}} \tan z}$ . J. appl. Phys. 16, 678—699 (1945).

Übertragung des magnetischen Glockenfeldes auf das entsprechende elektrische Feld mit gleichen Elektronenbahnen. Das erhaltene Feld kann jedoch nicht durch aufgeladene Elektroden, d. h. eine elektrostatische Elektronenlinse, verwirklicht werden.

W. Glaser.

Synge, J. L.: Focal properties of optical and electromagnetic systems. Amer. math. Monthly 151, 185—200 (1944).

Die elektronenoptische Abbildung als Spezialfall der allgemeinen rotationssymmetrischen optischen Abbildung. [Der Inhalt der Arbeit deckt sich mit derjenigen des Ref. (dies. Zbl. 12, 288).]

W. Glaser.

### Relativitätstheorie:

Ives, H. E.: Derivation of the Lorentz transformations. Philos. Mag., VII. Ser. 36, 392—403 (1945).

Garín de Alvarez, M.: Zerlegung der Matrix der allgemeinen Lorentztransformation in einfache Faktoren. Bol. Soc. mat. Mexicana 3, 27—35 (1946) [Spanisch].

Depunt, J.: Parameterdarstellung der Lorentz-Transformationen. *Wis- en Natuurk. Tijdschr.* **12**, 78—85 (1944) [Holländisch].

Dirac, P. A. M.: Application of quaternions to Lorentz transformations. *Proc. roy. Irish Acad., Sect. A* **50**, 261—270 (1945).

Beweis der Äquivalenz bilinearer Quaternionen-Transformationen mit den Transformationen der Lorentzgruppe. Anwendung auf das relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten. *F. Cap.*

Shanmugadhasan, S.: On Mathisson's variational equation of relativistic dynamics. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **42**, 54—61 (1946).

● Costa de Beauregard, O.: La relativité restreinte et la première mécanique broglienne. *Mém. Sci. math.* Nr. 103, 71 p. (1944).

Costa de Beauregard, O.: Sur la théorie des milieux doués d'une densité de moment cinétique propre. *C. r. Acad. Sci., Paris* **218**, 31—33 (1944).

Costa de Beauregard, O.: Sur la conservation de la masse propre. Sur la notion de fluide parfait. *C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 271—273 (1946).

Costa de Beauregard, O.: Équations générales de l'hydrodynamique des fluides parfaits. *C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 369—371 (1946).

Costa de Beauregard, O.: Quelques calculs d'électromagnétisme relativiste. *Ann. de Physique, XII. Sér.* **1**, 522—537 (1946).

Cheng, Kai-Chia: A simple calculation of the perihelion of Mercury from the principle of equivalence. *Nature* **155**, 574 (1945).

● Bergmann, P. G.: Introduction of the theory of relativity. New York: Prentice-Hall, Inc. 1942. XVI, 287 p. § 4.50.

6. Neuauflage (s. dies. Zbl. **53**, 163).

Møller, C.: On homogeneous gravitational fields in the general theory of relativity and the clock paradox. *Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd.* **20**, Nr. 19, 26 p. (1943).

Wichtige Arbeit zum Uhrenparadoxon. Erzeugung homogener Gravitationsfelder, entsprechend einer Beschleunigung in der  $x$ -Achse, durch Transformation des pseudoeuklidischen Linienelementes. *F. Cap.*

Berenda, Carlton W.: The problem of the rotating disk. *Phys. Review, II. Ser.* **62**, 280—290 (1942).

Die Geometrie einer rotierenden Scheibe wird vom Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie aus untersucht und im Gegensatz zu vorhergehenden Untersuchungen (z. B. Eddington, *Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge 1923) nichteuklidisch gefunden. In Polarkoordinaten ist das räumliche Linienelement gegeben durch  $dl^2 = dr^2 + (1 - c^{-2} r^2 \omega^2)^{-1} r^2 d\theta^2$ . *F. Beck.*

Hill, E. L.: A note on the relativistic problem of uniform rotation. *Phys. Review, II. Ser.* **69**, 488—491 (1946).

Einheitliche Rotation wird im Hinblick auf die Nichtexistenz des starren Körpers in der Relativitätstheorie neu definiert in dem Sinne, daß die Umgebung eines jeden momentan auf Ruhe transformierten Punktes mit einheitlicher Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  rotiert. Für  $r(R)$  wird so eine Riccatische Differentialgleichung erhalten:  $dv/dR + 2\omega_0 c^{-2} v^2 + v/R - 2\omega_0 = 0$ . *F. Beck.*

Hill, E. L.: On accelerated coordinate systems in classical and relativistic mechanics. *Phys. Review, II. Ser.* **67**, 358—363 (1945).

Verf. schließt an Vorarbeiten anderer Autoren an und betrachtet den ein- und dreidimensionalen Fall beschleunigter Bewegungen. Die zugehörigen Transformationsgruppen und die erzeugenden Operatoren werden untersucht. *F. Cap.*



(1) Einstein, A.: Demonstration of the non-existence of gravitational fields with a non-vanishing total mass free of singularities. *Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A* **2**, 5—15 (1941) [Spanisch und Englisch].

(2) Einstein, A. and W. Pauli: On the non-existence of regular stationary solutions of relativistic field equations. *Ann. of Math., II. Ser.* **44**, 131—137 (1943).

(1) zeigt für den  $R_1$ , (2) für den  $R_n$ , daß es keine überall reguläre, im Unendlichen pseudoeuklidische, stationäre Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen geben kann, die einer nichtverschwindenden Gesamtmasse entspricht, wobei  $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$  unabhängig von den  $x^r$  ( $r = 4, \dots, n$ ) vorausgesetzt ist.

F. Beck.

Lichnerowicz, André: Sur une proposition fondamentale de la théorie relativiste de la gravitation. *C. r. Acad. Sci., Paris* **221**, 652—654 (1945).

Lichnerowicz, André: Sur le caractère euclidien d'espaces-temps extérieurs statiques partout réguliers. *C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 432—434 (1946).

Todo espacio-tiempo exterior estacionario (es decir admitiendo un 1-grupo de isometrías a trayectorias orientadas en el tiempo), a comportamiento asintótico euclidiano a lo infinito en el espacio no puede ser totalmente regular sin ser euclidiano. Este resultado, ya establecido por A. en el caso en que las secciones de espacio son compactas, había sido investigado notadamente por Einstein y Pauli (v. el análisis preced.).

Autoreferat.

Wyman, Max: Static isotropic solutions of Einstein's field equations. *Phys. Review, II. Ser.* **66**, 267—274 (1944).

Linienelemente der Form  $ds^2 = V^2 dt^2 - W^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$  werden als Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen untersucht. Unter der Bedingung  $T^i_j = T^j_i = T^i_i$  und  $T^i_j = 0$  für  $i \neq j$  für den Energie-Impulstensor werden drei Grundformen für die Funktionen  $W$  und  $V$  gefunden: 1.  $W = W(x)$ ,  $V = V(x)$ ; 2.  $W = x f(a)$ ,  $V = V(a)$ ,  $a = y/x$ ; 3.  $W = W(r)$ ,  $V = V(r)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Alle anderen Formen gehen daraus durch Koordinatentransformationen hervor. Für den leeren Raum werden so sämtliche statisch isotropen Lösungen gefunden, die für verschwindende kosmologische Konstante  $\lambda$  auf bereits bekannte Typen zurückgeführt werden können, während sich für  $\lambda \neq 0$  drei neue Lösungen ergeben.

F. Beck.

Wyman, M.: Schwarzschild interior solution in an isotropic coordinate system. *Phys. Review, II. Ser.* **70**, 74—76 (1946).

Wyman, M.: Isotropic solutions of Einstein's field equations. *Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal 1945*, 90—93. Toronto: University of Toronto Press 1946.

Narlikar, V. V., G. K. Patwardhan and P. C. Vaidya: Some new relativistic distributions of radial symmetry. *Proc. nat. Inst. Sci. India* **9**, 229—236 (1943).

Patwardhan, G. K. and P. C. Vaidya: Relativistic distributions of matter of radial symmetry. *J. Univ. Bombay, n. Ser.* **12**, part 3, 23—26 (1943).

Vaidya, P. C.: Spherically symmetric line-elements used in general relativity. *J. Univ. Bombay, n. Ser.* **14**, part 3, 4—6 (1945).

Narlikar, V. V. and K. R. Karmarkar: On a curious solution of relativistic field equations. *Current Sci.* **15**, 69 (1946).

Reichenbächer, E.: Der Doppler-Effekt im allgemeinen Feld. *Z. Astrophys.* **22**, 230—235 (1943).

Einstein, Albert: A generalization of the relativistic theory of gravitation. *Ann. of Math., II. Ser.* **46**, 578—584 (1945).

Einstein, A. and E. G. Straus: A generalization of the relativistic theory of gravitation. *II. Ann. of Math., II. Ser.* **47**, 731—741 (1946).

Erweiterung der Allgemeinen Relativitätstheorie, um das elektromagnetische Feld, das bisher als fremdes Element in die Feldgleichungen eintrat, in die geome-

trischen Eigenschaften des Raumes einzubeziehen. Der (bisher symmetrische) Fundamentaltensor  $g_{ik}$  wird nun mit hermitescher Symmetrie angesetzt:  $g_{ik} = g_{ik} + i \underline{g_{ik}}$  (Unterstreichen von Indices bedeutet Symmetrie, ein Haken Antisymmetrie in diesen Indices). Ebenso werden die Dreizeigersymbole  $\Gamma_{jk}^i$  komplex angesetzt und die Parallelverschiebung dadurch ausgedrückt. Die folgenden Feldgleichungen werden aus einem invarianten Variationsprinzip abgeleitet, dessen Lagrange-Dichte die  $g_{ik}$ ,  $\Gamma_{jk}^i$  und deren erste Ableitungen enthält:  $R_{ik} = 0$ ;  $R_{ik,l} + R_{kl,i} + R_{li,k} = 0$ ;  $\Gamma_{ij}^s = 0$ . Die Feldgleichungen sind schwächer (d. h., sie bestimmen die Feldgrößen weniger stark), als die entsprechenden Maxwell'schen Gleichungen des leeren Raumes. Die Vereinheitlichung der Felder (Gravitation und Elektromagnetismus) ist in dem Sinn erreicht, daß weder die Lagrange-Funktion noch die Feldgleichungen in invariante Bestandteile zerlegt werden können, während sich jedoch Real- und Imaginärteil der  $g_{ik}$  und  $\Gamma_{jk}^i$  unabhängig voneinander transformieren. Anm. d. Ref.: Um diesem Einwand zu entgehen, hat Einstein später (dies. Zbl. 50, 212) die hermitesche Symmetrie wieder fallen lassen und die  $g_{ik}$  (und entsprechend  $\Gamma_{jk}^i$ ) reell, aber unsymmetrisch angesetzt. Er kann zeigen, daß es eine Transformationsgruppe (Koordinaten- + sog.  $\lambda$ -Transformation der  $\Gamma_{jk}^i$ ) gibt, die symmetrische und antisymmetrische Bestandteile vermischt, während Variationsprinzip und damit Feldgleichungen invariant bleiben. Ferner gelingt durch Hinzufügen einer Nebenbedingung zum Variationsprinzip das Auffinden stärkerer Feldgleichungen. F. Beck.

Schrödinger, E.: The general unitary theory of the physical fields. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 49, 43—58 (1943).

Schrödinger, E.: The point charge in the unitary field theory. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 49, 225—235 (1944).

Schrödinger, E.: The union of the three fundamental fields (gravitation, meson, electromagnetism). Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 49, 275—287 (1944).

Schrödinger, E.: On distant affine connection. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 50, 143—154 (1945).

Schrödinger, E.: The earth's and the sun's permanent magnetic fields in the unitary field theory. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 49, 135—148 (1943).

Schrödinger, E.: Unitary field theory: conservation identities and relation to Weyl and Eddington. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 49, 237—244 (1944).

Schrödinger, E.: The affine connexion in physical field theories. Nature 153, 572—575 (1944).

Schrödinger, E.: The general affine field laws. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 51, 41—50 (1946).

Es wird die Vereinheitlichung der drei bisher bekannten Felder Gravitation, elektromagnetisches und Mesonfeld (Kernkräfte) erstrebt, ebenso wie von Einstein durch Erweiterung der Allgemeinen Relativitätstheorie. Verf. sieht den Affintensor  $\Gamma_{jk}^i$  als das Primäre, den metrischen Fundamentaltensor  $g_{ik}$  dagegen als daraus abzuleitende, sekundäre Größe an (affine Feldtheorie). Die Allgemeine Rel. Th. basiert auf in den unteren Indices symmetrischem  $\Gamma_{jk}^i$  und der Riemann'schen Metrik. Beides läßt Verf. fallen. In den ersten Untersuchungen werden Methoden ausgearbeitet, die Feldgleichungen, sowie gewisse Identitäten, nur unter Benutzung des Affintensors, ohne Bezugnahme auf die Metrik und ohne die Lagrange-Funktion zu spezialisieren, aus einem invarianten Variationsprinzip abzuleiten. Die einzigen einfachen Tensoren, die durch die  $\Gamma_{jk}^i$  bestimmt werden, sind der Riemann-Christoffelsche Tensor  $R_{k,lm}^i$  und seine Verjüngungen  $R_{k,lm}^k$  und  $R_{k,lm}^m$ . Da, unabhängig von der Metrik, die Quadratwurzel aus der Determinante eines Tensors 2. Stufe eine invariante Dichte ist, sind die entsprechenden Bildungen aus den beiden Verjüngungen von  $R_{k,lm}^i$  praktisch die einzigen für die

Lagrange-Dichte in Betracht kommenden Größen. Nach verschiedenen Versuchen nimmt Verf. in einer späteren Arbeit (Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 51, 163 (1947)) endgültig an:

$$L = 2\lambda \sqrt{-\text{Det } R_{\alpha\beta}}, \quad g^{kl} = \partial L / \partial R_{kl}, \quad \delta \int L d\tau = \int g^{kl} \delta R_{kl} d\tau = 0,$$

wobei  $\lambda$  eine willkürliche Konstante ist. Hieraus ergeben sich 64 in den Ableitungen lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung für die 64 unabhängigen Komponenten  $I_{jk}^i$ . Diese Gleichungen enthalten die Konstante  $\lambda$  nicht, lassen sich aber in eine zweite Form der Feldgleichungen umschreiben, bei der  $\lambda$  explizit auftritt und eine ähnliche Rolle spielt wie die „kosmologische Konstante“ in den Gravitationsgleichungen. Mit  $\lambda = 0$  gehen die Gleichungen in die von Einstein und Straus (s. vorst. Ref.) gegebenen über. Die drei in den Gleichungen vorkommenden, aus den  $I_{jk}^i$  abgeleiteten Felder identifiziert Verf. mit Gravitation, elektromagnetischem und Mesonfeld. In linearer Näherung zerfallen die Gleichungen, und die Mesonfeldgleichungen sind ähnlich den von Proca gegebenen. *F. Beck.*

Einstein, A. and E. G. Straus: The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars. Reviews modern Phys. 17, 120—124 (1945).

Einstein, A. and E. G. Straus: Corrections and additional remarks to our paper: The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars. Reviews modern Phys. 18, 148—149 (1946).

Houstoun, R. A.: Note on Einstein's theory of gravitation. Philos. Mag., VII. Ser. 33, 899—903 (1942).

Narlikar, V. V.: The two-body problem in Einstein's new relativity. Proc. nat. Inst. Sci. India 7, 237—246 (1941).

Narlikar, V. V.: The consistency of Einstein's new relativity with the geodesic postulate. Current Sci. 10, 164—165 (1941).

Mautner, F. and E. Schrödinger: Infinitesimal affine connections with twofold Einstein-Bargmann symmetry. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 50, 223—231 (1945).

McConnell, J. and E. Schrödinger: The shielding effect of planetary magnetic fields. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 49, 259—273 (1944).

Weyl, Hermann: How far can one get with a linear field theory of gravitation in flat space-time? Amer. J. Math. 66, 591—604 (1944).

Coxeter, H. S. M.: A geometrical background for de Sitter's world. Amer. math. Monthly 50, 217—228 (1943).

Einstein, A. and V. Bargmann: Bivector fields. Ann. of Math., II. Ser. 45, 1—14, 15—23 (1944).

Mieghem, J. van: Les ondes gravifiques et les variables de Th. de Donder. I. II. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 30, 291—297 (1945); 410—413 (1946).

Mieghem, Jacques van: Les ondes du champ gravifique-électromagnétique. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 30, 397—404 (1946).

Datta Majumdar, S.: On the relativistic analogue of Earnshaw's theorem on the stability of a particle in a gravitational field. Bull. Calcutta math. Soc. 38, 85—92 (1946).

Datta Majumdar, S.: A note on a class of solutions of Einstein's electrostatic field equations. Science and Culture 12, 295 (1946).

Jaiswal, J. P.: On the electric potential of a single electron in gravitational fields. I. Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 7, 17—25 (1945).

Hély, Jean: Loi synthétique de la gravitation et de l'électromagnétisme. Ann. de Physique, XI. Sér. 19, 208—214 (1944).



Gião, Antonio: Forces nucléaires, gravitation et électromagnétisme. *Portugaliae Math.* 5, 145—193 (1946).

Gião, António: Quelques propriétés des fonctions d'onde cosmologiques des particules élémentaires. *Gaz. Mat., Lisboa* 7, Nr. 30, 4—5 (1946).

Martin, D.: On the methods of extending Dirac's equation of the electron to general relativity. *Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser.* 7, 39—50 (1942).

Brekhovskich, L. M.: Radiation of gravitational waves by electromagnetic waves. *C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér.* 49, 482—485 (1945).

Ausgehend von der Näherungslösung der Feldgleichungen des kombinierten Gravitations- und elektromagnetischen Feldes berechnet der Verf. den Energieverlust, den eine elektromagnetische Welle durch Ausstrahlung von Gravitationswellen erleidet.  
*A. Papapetrou.*

Tonnelat, Marie-Antoinette: Théorie euclidienne de l'électromagnétisme et de la gravitation. *Disquisitiones math. phys.* 3, 249—274 (1943).

Essai d'extension de la théorie de la lumière de L. de Broglie en vue d'une description de l'électromagnétisme et de la gravitation (en approximation quasi euclidienne c'est-à-dire en champs faibles); la représentation produit de 4 spineurs est équivalente à une représentation de spin 2 (gravitation), trois de spin 1 (photons) et deux de spin 0.  
*A. Lichnerowicz.*

Tonnelat, Marie-Antoinette: La particule de spin 2 et la loi de gravitation d'Einstein dans le cas de présence de matière. *C. r. Acad. Sci., Paris* 218, 305—308 (1944).

Tonnelat, Marie-Antoinette: Sur l'interaction entre deux particules matérielles au moyen du corpuscule de spin maximum 2; loi de gravitation newtonienne. *C. r. Acad. Sci., Paris* 218, 139—141 (1944).

L'A. discute la normalisation des ondes planes de la théorie du corpuscule de spin 2 proposé antérieurement (ce Zbl. 25, 139; 26, 382). A partir d'un opérateur d'interaction somme de deux termes correspondant respectivement à  $j = 2$  et à  $j = 0$ , on obtient un élément de matrice dont la partie classique peut s'interpréter comme potentiel de Seeliger. Un choix convenable d'opérateur d'interaction corpuscule de Dirac — corpuscule de spin 2 permet de décrire un état macroscopique d'interaction matière-gravitation par une relation analogue à la relation d'Einstein en présence de matière à l'approximation quasi-euclidienne.  
*G. Petiau.*

Lichnerowicz, André: Sur les équations de l'hydrodynamique des fluides visqueux et la notion de fluide incompressible en relativité générale. *C. r. Acad. Sci., Paris* 219, 270—272 (1944).

Essai de théorie relativiste d'un fluide visqueux. Nouvelle définition de l'incompressibilité d'un fluide relativiste par  $\nabla_\alpha C^\alpha = 0$ , où  $C^\alpha$  est le vecteur-courant hydrodynamique.  
*Autoreferat.*

Lichnerowicz, André: Sur les équations relativistes de l'électromagnétisme. *Ann. sci. École norm. sup., III. Sér.* 60, 247—288 (1943).

Étude mathématique des équations d'Einstein-Maxwell et du problème de Cauchy correspondante. Théorie d'un fluide chargé dans un champ gravitationnel et électromagnétique.  
*Autoreferat.*

Lichnerowicz, André: L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des  $n$  corps. *J. Math. pur. appl., IX. Sér.* 23, 37—63 (1944).

Le problème de Cauchy pour les équations d'Einstein du cas extérieur se décompose en deux problèmes dont l'un, recherche de „conditions initiales“  $(g_{\alpha\beta}, \partial_1 g_{\alpha\beta})$  satisfaisant aux 4 équations  $S_\lambda^1 = R_\lambda^1 = \frac{1}{2} g_\lambda^1 R = 0$  sur l'hypersurface  $\Sigma (x^1 = 0)$  est étudié ici. Une solution complète est donnée dans le cas où  $\Sigma$  est minima.  
*Autoreferat.*

Fock, V. A.: Sur les intégrales du centre de gravité dans le problème relativiste de deux masses finies. *C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér.* 32, 25—27 (1941).

Racine, C.: Contribution to the relativistic problem of  $n$  bodies. I, II. J. Indian math. Soc., n. Ser. 5, 156—164, 165—178 (1941).

Markow, M.: Das Mehrkörperproblem in der klassischen relativistischen Theorie. Acad. Sci. URSS, J. Phys. 7, 42—47 (1943).

Birkhoff, G. D.: Die mathematischen Begriffe der Zeit und Gravitation. Revista Ci. 44, 253—257 (1942) [Spanisch].

Barajas, Alberto: Birkhoff's theory of gravitation and Einstein's theory for weak fields. Proc. nat. Acad. Sci. USA 30, 54—57 (1944).

Barajas, Alberto: Birkhoff's Theorie der Schwere und Einsteins Theorie für schwache Felder. Bol. Soc. mat. Mexicana 1, 41—46 (1944) [Spanisch].

Graef Fernandez, C.: Die Bewegung zweier Körper in Birkhoff's Gravitations-theorie. Bol. Soc. mat. Mexicana 1, 25—39 (1944) [Spanisch].

Lifshitz, E.: On the gravitational stability of the expanding universe. Acad. Sci. URSS, J. Phys. 10, 116—129 (1946).

Milne, E. A.: Rational electrodynamics. (1) I. The limitations of classical electromagnetism. (2) II. The ideas of kinematical relativity. (3) III. The charge as point singularity. (4) IV. The „radius“ of a point charge. (5) V. The neutron and nuclear dynamics. Philos. Mag., VII. Ser. 34, 73—82, 82—101, 197—211, 235—245, 246—258 (1943).

(6) Milne, E. A.: Note on the interaction of two point-charges. Philos. Mag., VII. Ser. 34, 712—716 (1943).

Verf. schlägt unter Heranziehung und teilweiser Abänderung seiner in der kinematischen Relativitätstheorie (dies. Zbl. 60, 446) angewendeten Methoden eine Abänderung der klassischen Elektrodynamik vor, die insbesondere das Verhalten „der Elektron genannten, mit einem endlichen Radius begabten Punktsingularität“ beschreiben soll. Im Sinne der kinematischen Relativitätstheorie werden nur Zeitmessungen anerkannt. In (1) werden die folgenden Schwierigkeiten der klassischen Elektrodynamik herausgestellt: 1) Die Lokalisierung der Energie im elektromagnetischen Feld und die nach Meinung des Verf. mißbräuchliche Verwendung des Energiebegriffs beim Vorhandensein nur einer Elementarladung, was dazu führe, daß diese überhaupt keine Selbstenergie besitze. 2) Die Reversibilität von Emissions- und Absorptionsprozessen, die eher eine Ausstrahlung proportional einer ungeraden, statt der zweiten zeitlichen Ableitung der Beschleunigung einer bewegten Ladung nahelegen würden. 3) Das Zusammenbrechen des Coulombgesetzes für Entfernungen kleiner als  $e^2/mc^2$  (während bei Milne das Coulombgesetz für beliebig kleine Entfernungen in Kraft bleibt). 4) Die Schwierigkeiten, das „Vacuum“ (bzw. Inertialsysteme) festzulegen — und noch anderes mehr. In (2) entwickelt Verf. nach seinen Methoden die Dynamik der Punktladung. Für die kraftfreie Partikel ergibt sich zunächst  $dv/dE =$

$$\left( -\frac{1-v^2/c^2}{t^2-x^2/c^2} \right) (x-vt), \text{ wo } x \text{ der Ortsvektor; der Term rechts vom Gleichheits-}$$

zeichen stellt die Milneschen Gravitationskräfte dar. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß bei Milne die kinetische Energie  $mc^2 \xi^{1/2}$  nicht die 44-Komponente eines Tensors, sondern eine echte Invariante ist, ergibt sich schließlich als Bewegungsgleichung einer Ladung in einem Feld mit dem Potential

$$m \xi^{1/2} Y^{1/2} (d/dt) (v Y^{1/2}) = -m \xi^{1/2} (x-v(Z/Y)) : \partial \chi / \partial x + (v/Y) (d/dt) (m \xi^{1/2}), \\ (m \xi^{1/2} Y^{1/2}) (d/dt) (c Y^{1/2}) = -m \xi^{1/2} (ct-c(Z/Y)) : c^{-1} (\partial \chi / \partial t) + (c/Y) (d/dt) (m \xi^{1/2}),$$

wobei zu beachten ist, daß die Viererkraft nach

$$F = -\partial \chi / \partial x + 2v/Y (d/dt) (m \xi^{1/2}), \quad F_t = +c^{-1} \partial \chi / \partial t + 2c/Y (d/dt) (m \xi^{1/2}),$$

wo  $Y = 1 - v^2/c^2$ ,  $\xi = Z^2/XY$  (Invariante!),  $Z = t - xv/c^2$ ,  $X = t^2 - x^2/c^2$  aus  $\chi$  zu berechnen ist. Für das Feld sehr nahe einer Punktladung erhält Milne schließlich eine Gravitationskraft der Art  $(x-vt)/t^2$  und eine Coulombsche

Anziehung der Art  $(x - vt)^{-2}$ . Diese Ausdrücke sind nach Milne Lorentz-invariant. Durch Transformationen der Art  $t = t_0 \exp[(\tau - t_0) t_0^{-1}] \cos(h\lambda/c t) 2\lambda = c(\tau_2 - \tau_1)$  — s. hierzu die im nachfolgenden Referat aufgeführte Arbeit von Whitrow aus dem Philos. Mag. — kann man zu üblichen Koordinatensystemen übergehen und erhält so u. a. die Newtonsche Bewegungsgleichung  $d^2\pi/d\tau^2 = 0$  fürs freie Teilchen, wo  $\pi$  die Newtonsche Ortskoordinate und  $\tau$  die Newtonsche Zeit. Ähnlich ergibt sich beim Vorhandensein von Kräften  $m\ddot{\pi} = t t_0^{-1} F$  usw. Bezüglich der Form der sich schließlich ergebenden Bewegungsgleichung sei auf die Originalarbeit verwiesen; es sei nur noch die sich ebenfalls ergebende Beziehung  $E = m c^2 (1 - v^2 c^{-2})^{-1/2}$  hingewiesen. In (3) beschäftigt sich Verf. mit der Aufstellung von Ausdrücken für die elektromagnetischen Feldstärken, die aus „Superpotentials“ abgeleitet werden. Das Feld wird von Singularitäten abgeleitet — die von den Maxwell'schen Gleichungen leicht verschiedenen Feldgleichungen sinken zu bloßen Identitäten herab. Schließlich werden sehr „lorentzartige“ Bewegungsgleichungen abgeleitet. Für die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen findet Verf. eine Formel, die linear in den Beschleunigungen ist und auch strahlungslose beschleunigte Bewegungen (Bohrsche Bahnen) zulassen soll. Verf. gelangt auch zu einem — schon von L. H. Thomas erwähnten — Zusatzterm zum Biot-Savartschen Gesetz, der sich jedoch erst bei hohen Geschwindigkeiten auswirkt. In (4) beschäftigt sich Verf. mit dem Einkörperproblem und integriert Bewegungs- und Feldgleichung. Hierbei tritt — nach Übergang zur  $\tau$ -Zeit — eine charakteristische Länge  $e^2/m c^2$  automatisch auf, und für das Energieintegral ergibt sich  $(1 - v^2 c^{-2})^{-1/2} = (1 + w m^{-1} c^{-2}) \exp(-e^2 m^{-1} c^{-2} r^{-1})$ , so daß für  $v \ll c$ ,  $r \gg e^2/m c^2$ ;  $w = m v^2/2 + e^2 r^{-1}$  gilt. Eine andere Integrationskonstante kann in selber Näherung mit dem Drall identifiziert werden. Verf. leitet dann die Differentialgleichung für die Bohrschen Bahnen ab und findet für diejenige Zentralkraft, die in der Newtonschen Mechanik zur selben Bahn führen würde, zu  $(e^2/2 r^2) [(1 + w/m c^2)^2 \exp(-e^2/m c^2 r) + \exp(e^2/m c^2 r)]$ . Für  $r \gg e^2/m c^2$  treten also nicht Coulombsche Terme auf. In (5) wendet Verf. seine Elektrodynamik auf das Bohrsche Atommodell an und erhält neben Bohrschen Bahnen (Balmer'sche Formel) Bahnen von sehr kleinem Radius  $\sim e^2/2 m c^2$ , die von der Hauptquantenzahl  $n$  ein wenig abhängen. Diese instabilen Bahnen sollen Neutronen darstellen und werden mit der  $\beta$ -Radioaktivität in Verbindung gebracht. (6) beschäftigt sich mit der Wechselwirkung zwischen zwei Punktladungen, wobei dieselben Ergebnisse wie in den Vorarbeiten nun aus der relativistischen Bewegungsgleichung

$$(d/d\tau)(m \dot{x} / \sqrt{1 - v^2/c^2}) = (e^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}) [\ddot{x} + 2^{-1}(\ddot{x} \times \dot{x}) \times \dot{x} / c^2] |\dot{x}|^{-1}$$

abgeleitet werden.

F. Cap.

- (1) Whitrow, G. J.: On the vectors and invariants of kinematic relativity. Philos. Mag., VII. Ser. 36, 170—178 (1945).
- (2) Wilson, W.: Kinematic relativity. Philos. Mag., VII. Ser. 35, 241—249 (1944).
- (3) Newing, R. A.: Kinematic relativity. Philos. Mag., VII. Ser. 36, 113—115 (1945).
- (4) Milne, E. A.: Kinematic relativity: A reply to Prof. W. Wilson. Philos. Mag., VII. Ser. 36, 134—143 (1945).
- (5) Milne, E. A.: On the conservation of momentum. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 186, 432—442 (1946).
- (6) Wilson, W.: Kinematic relativity. Philos. Mag., VII. Ser. 37, 421—426 (1946).
- (7) Band, William: A critical examination of Milne's kinematic relativity. Philos. Mag., VII. Ser. 37, 551—563 (1946).



(8) **McVittie, G. C.:** Axiomatic treatment of kinematical relativity. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 61, 210—222 (1942).

(9) **Walker, A. G.:** Relativistic mechanics. III. Mechanics in 4-space, and conservative fields of force. Proc. London math. Soc., II. Ser. 48, 161—179 (1943).

(10) **Schild, A.:** On Milne's theory of gravitation. Phys. Review, II. Ser. 66, 340—342 (1944).

(11) **Whitrow, G. J.:** The two-body problem in Milne's theory of gravitation. Nature 156, 365—366 (1945).

(12) **Camm, G. L.:** The two-body gravitational problem in kinematical relativity. Nature 155, 754—755 (1945).

Die kinematische Relativitätstheorie: Ausgehend von dem Gedanken, daß die Nebelflucht kein Gravitationsphänomen sei und eine nicht von vorneherein auf die Gravitation ausgerichtete Theorie des Universums möglich sein müsse, hat E. A. Milne eine kinematische Theorie des Universums (s. McVittie, Cosmological Theory, London 1949), später eine spezielle und allgemeine kinematische Relativitätstheorie (dies. Zbl. 26, 282) und kinematische („rationale“) Elektrodynamik (vorstehend. Sammelreferat) geschaffen. Unter Aufgabe des allgemeinen Invarianzprinzips und Neuformulierung zeitlicher und räumlicher Messungen ausschließlich durch Zeitmessungen von Beobachtern (deren Gesamtheit ein Substrat bildet) gelingt es, die Ergebnisse der speziellen Einsteinschen Relativitätstheorie, z. B. Lorentztransformation, rein kinematisch zu gewinnen. Ausweitungen führen zu einer Theorie der Gravitation (des Substrats) und zu bestimmten Bewegungsgleichungen (vorstehend. Sammelreferat). Im Anschluß an Milne werden von verschiedenen Autoren eine Reihe von Problemen behandelt: Whitrow (1) untersucht die Invarianten der K. R. (kinematischen Relativitätstheorie), d. s. Lorentzinvariante, und zeigt, daß die Behauptung von Wilson (2), Milnes Bewegungsgleichung einer freien Partikel sei nicht Lorentz-invariant, falsch ist. Dasselbe Ergebnis wird in (3), (4) erhalten. Aus seinen Bewegungsgleichungen leitet Milne in (5) Vorintegrale (Erhaltungssätze) ab, und Wilson (6) leitet die Bewegungsgleichung eines freien Teilchens aus einer Minkowski-Metrik mit imaginärer Zeitkoordinate ab. Band (7) zeigt, daß gewisse Formeln der Milneschen Theorie nur Spezialfälle allgemeinerer auch Lorentz-invarianten Gleichungen sind. McVittie (8) leitet die wesentlichsten Ergebnisse der K. R. aus neun Axiomen ab und schränkt die Gültigkeit der K. R. etwas ein. Walker (9) baut im speziellen hyperbolischen Universum der K. R. eine theoretische Mechanik auf und bespricht die beiden Zeitskalen der K. R., nämlich  $t$ -Zeit (übliche, Newtonsche Zeit, Nebelflucht-Zeit, kosmische Zeit) und  $\tau$ -Zeit (Zeit variabler Atomfrequenzen, dynamische Zeit), wo  $\tau = t_0 + t_0 \log t t_0^{-1}$  (Zeitskalentransformation) und wo  $t_0$  das Weltalter. Dem Übergang  $t \rightarrow \tau$  entspricht der Übergang von einem expandierenden Substrat, inhomogen verteilt im „privaten“ euklidischen Raum eines Beobachters, zu einem nicht expandierenden homogenen Substrat im „öffentlichen“ hyperbolischen Raum. Die Gravitationstheorie der K. R. wird von Schild (10) kritisch betrachtet, in Tensorform gebracht und für das Zweikörperproblem adaptiert, das von Whitrow (11) und Camm (12) behandelt wird. Letzterer nimmt auch gegen die Kritik von Schild (10) Stellung.

*F. Cap.*

**McVittie, G. C.:** The regraduation of clocks in spherically symmetric space-times of general relativity. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 62, 147—155 (1945).

Verf. untersucht die Wirkung einer Änderung der Zifferblatteinteilung von Uhren (Zeitskalentransformation, clock regraduation) auf die Metrik der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins und kommt für sphärisch-symmetrische Linienelemente nach Einführung von „Lichtsignalkoordinaten“ nach Milne (vorstehend. Sammelreferat) zum Schluß, daß diese Skalenänderung wegen Existenz

der Einsteinschen Feldgleichungen nur einer Koordinatentransformation und nicht dem Übergang zu einem Linienelement mit anderen Krümmungseigenschaften entspricht.

*F. Cap.*

Walker, A. G.: A theory of regraduation in general relativity. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 62, 164—174 (1946).

In noch allgemeinerer Weise als McVittie (s. vorsteh. Ref.) beschäftigt sich Verf. mit der Änderung der Zeitskala in der allgemeinen Relativitätstheorie, wobei insbesondere die Feldgleichungen von Einstein herangezogen werden. Eine allgemeine Skalenänderung in jedem Raumpunkt ergibt zwischen den alten und den neuen Tensoren (mit Querstrich) die Beziehungen:  $\bar{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}$ ,  $\bar{T}_{ij} = e^\psi T_{ij}$ . Die quergestrichenen Größen bilden dann ein äquivalentes Weltmodell, wenn auch sie die Feldgleichungen erfüllen; Gravitationskonstante und kosmologische Konstante dürfen jedoch andere Werte annehmen. Verlangt man, daß geodätische Linien bei der Zeitskalenänderung unverändert bleiben, dann wird diese trivial und  $\psi$  und  $\sigma$  Konstante; dies schließt Verf. jedoch aus. Beachtenswert ist, daß für  $\psi = \psi(\sigma)$  ein nichtstatisches Lemaitre-Universum durch Skalenänderung statisch gemacht werden kann. Die Ergebnisse von McVittie werden als Spezialfälle klassifiziert.

*F. Cap.*

Infeld, L. and A. Schild: A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature. Phys. Review, II. Ser. 67, 121—122 (1945).

Infeld, L. and A. Schild: A new approach to kinematic cosmology. I, II. Phys. Review, II. Ser. 68, 250—272 (1945); 70, 410—425 (1946).

Ohne Bezugnahme auf die Einsteinschen Feldgleichungen werden die möglichen metrischen Formen kosmologischer Modelle untersucht (Kinematische Kosmologie). Gemäß drei Postulaten, 1. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, 2. Isotropie, 3. Homogenität des  $R_3$ , ist das Linienelement von der Form  $ds^2 = \gamma(t, r) (dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$ , geht also durch Eichtransformation mit der Eichfunktion  $\gamma$  aus der pseudoeuklidischen Form hervor. Da die Maxwell'schen Gleichungen gegenüber letzteren invariant sind, nehmen sie in jedem solchen Kosmos dieselbe Form wie im flachen  $R_4$  an. Auf Grund obiger Postulate muß  $\gamma$  von der Form

$$\gamma(t, r) = (1 - K a_1^2)^{-2} f(t(1 - K a_1^2)): \quad a = t^2 - r^2; \quad K \geq 0$$

sein, was drei verschiedene kosmologische Modelle liefert. Geodätische Linien und Koordinatentransformationen in diesen Räumen werden eingehend untersucht. In II werden die Maxwell'schen und Lorentz'schen Gleichungen sowie die Diracgleichung für die obige Metrik genauer untersucht. Erstere und letztere sind, die zweiten können leicht konform invariant gemacht werden, haben also dieselbe Form wie im flachen  $R_4$ . In geschlossenen Räumen ergibt sich jedoch für die Lösung eine neue Randbedingung.

*F. Beck.*

Milne, E. A.: On the spiral character of the external galaxies. Monthly Not. roy. astron. Soc. 106, 180—199 (1946).

Berechnung der Partikelbahnen in der Nähe eines großen Massenkernes mit Hilfe der kinematischen Theorie von Milne. Übereinstimmung zwischen der Rechnung und gewissen beobachteten galaktischen Spiralarmen.

*F. Cap.*

Thomas, L. H.: Relativistic invariance. Reviews modern Phys. 17, 182—186 (1945).

Verf. untersucht ein allgemein relativistisches Schema für dynamische Theorien im  $R_4$  und definiert Verschiebungsoperatoren, die mit den dynamischen Gesetzen eng zusammenhängen.

*F. Cap.*

Lanczos, C.: Matter waves and electricity. Phys. Review, II. Ser. 61, 713—720 (1942).

Vereinigte Feldtheorie von Gravitation und Elektromagnetismus im  $R_4$  mit neuer, auf dem Ricci-Tensor beruhender Definition des Energietensors. Der elektromagnetische Spannungstensor scheint mit dem Materietensor identisch zu sein — Unterschied zur üblichen Theorie, wo der Materietensor in den Feldstärken quadratisch ist. Die Theorie des Verf. ist anscheinend auch nicht eichinvariant.

*F. Cap.*

(1) Corben, H. C.: A classical theory of electromagnetism and gravitation. I. Special theory. Phys. Review, II. Ser. 69, 225—234 (1946).

(2) Corben, H. C.: Special relativistic field theories in five dimensions. Phys. Review, II. Ser. 70, 947—953 (1946).

(1): Versuch der Vereinigung klassischer Elektrodynamik mit Newtonscher Gravitationstheorie im flachen  $R_5$ ,  $x_5$  zeitartig. Es treten Gravitationswellen und ein von der Gravitationskonstante bestimmter Massenradius sowie eine Gravitationsselbstenergie auf. In (2) Weiterführung: 5. Koordinate raumartig, Auftauchen von Gleichungen für Teilchen mit dem Spin  $1/2$  etc. *F. Cap.*

Haskey, H. W.: The place of Dirac's equation in five-dimensional Riemannian geometry. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 7, 174—182 (1946).

Stellung der Diracgleichung in einem zylindrischen  $R_5$  mit Fernparallelismus. Basisvektor des Fernparallelismus mißt Ortswahrscheinlichkeit des Elektrons. Differenzen der 5. Raumkoordinate in Beziehung zur Ortsunsicherheit des Elektrons. *F. Cap.*

Cattermole, J.: Relativistic aspect of the stress tensor of the electromagnetic field. Philos. Mag., VII. Ser. 33, 674—678 (1942).

Riemannsche Geometrie im  $R_5$  spezieller Metrik zur Darstellung elektromagnetischer Felder im  $R_4$ . Etwas willkürliche Identifizierung gewisser Größen mit dem Energiespannungstensor des Dirac-Elektrons. *F. Cap.*

Eddington, Arthur S.: The representation of space curvature in quantum theory. Revista Ci. 45, 13—28 (1944) = Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 6, 220—235 (1943).

Verf. untersucht die Darstellung der Raumkrümmung in der Quantentheorie und geht hierzu von der Überlegung aus, daß der Ursprung eines Koordinatensystems der Unsicherheitsrelation unterliegt. Es werden Partikelschwärme eingeführt, und schließlich wird die Geometrie des sphärischen Raumes erhalten. Mit der Hypothese, daß eine raum- und zeitunabhängige Standardlänge existieren müsse, ergeben sich Beziehungen zwischen atomaren und astronomischen Konstanten, die u. a. zu einer Nebelflucht von 572 km/sec/mgparsec führen (beobachtet: 560 km/sec/mgparsec). *F. Cap.*

### Quantentheorie:

Flint, H. T.: The fundamental equation of quantum mechanics. Philos. Mag., VII. Ser. 34, 496—502 (1942).

Flint, H. T.: Quantum equations and nuclear field theories. Philos. Mag., VII. Ser. 36, 635—643 (1945).

Flint, H. T.: A study of the nature of the field theories of the electron and positron and of the meson. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 185, 14—34 (1946).

L'A. utilise la métrique à cinq dimensions proposée par Kaluza pour unifier les champs gravifiques et électromagnétiques, dans la représentation des équations d'ondes: équation de Schrödinger, équations d'ondes des différents types de mésons. *G. Petiau.*

Wang, K. C. and K. C. Cheng: A five-dimensional field theory. Phys. Review, II. Ser. 70, 516—522 (1946).

Pais, A.: Meson fields in projective space. Physica 9, 267—284 (1942).



**Belinfante, F. J.:** On the longitudinal and the transversal delta-function, with some applications. *Physica* **12**, 1—16 (1946) [mit Esperanto-Zusammenfassg.]. Applications to electrostatics, electrodynamics and mesodynamics are given.

*J. Rayski.*

**Groenewold, H. J.:** On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica* **12**, 405—460 (1946).

Réflexions épistémologiques.

*O. Costa de Beauregard.*

**Mandelstam, L. and Ig. Tamm:** The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics. *Acad. Sci. URSS. J. Phys.* **9**, 245—249 (1945).

Déduction systématique de la 4<sup>e</sup> relation d'incertitude dans le formalisme quantique non relativiste.

*O. Costa de Beauregard.*

**Powell, F. C.:** The dynamics of a simple system. I. Observables. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **41**, 57—65 (1945).

**Bass, Jean:** Quelques remarques sur la signification du théorème des probabilités composées dans le formalisme de la mécanique quantique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 1372—1374 (1946).

**Brogie, Louis de:** Sur l'application du théorème des probabilités composées en mécanique ondulatoire. *C. r. Acad. Sci., Paris* **223**, 874—877 (1946).

Interprétation d'une formule de Wigner, de Moyal et de Bass.

*O. Costa de Beauregard.*

**Sauter, E.:** Über die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten eines homogenen elektrischen Feldes in der Wellenmechanik. *Ann. der Physik.* **V. F. 43**, 404—416 (1943).

Utilisation parallèle du potentiel scalaire ou du potentiel vecteur.

*O. Costa de Beauregard.*

**Bodiou, Georges:** Démonstration du principe d'ondulisation de la mécanique quantique à partir d'un postulat statistique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **223**, 848—860 (1946).

Réciproque d'une propriété connue de la transformation de Fourier et des distributions de Gauss.

*O. Costa de Beauregard.*

**Faure, Robert:** Intégration des équations: cas de Liouville. *C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 1032—1033 (1946).

Cas classique et cas quantique.

*O. Costa de Beauregard.*

**Géhéniau, J.:** Sur la quantification des systèmes non canoniques. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **31**, 214—218 (1946).

Systèmes d'équations d'évolution non déductibles d'un principe variationnel, mais, linéaires, admettant un système adjoint tel que l'ensemble jouisse de la propriété.

*O. Costa de Beauregard.*

**Donder, Th. de et J. Géhéniau:** La mécanique ondulatoire du modèle-champ. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **31**, 196—200 (1946).

Théorie variationnelle covariante de la quantification de l'action exprimée par des intégrales multiples.

*O. Costa de Beauregard.*

**Novobátzky, K. F.:** Mehrkörperproblem in der Quantentheorie. *Mat. fiz. Lapok* **48**, 312—333 (1941) [Ungarisch mit deutscher Zusammenfassg.].

**Contrez, Raymond:** Sur le courant quantique dans la mécanique des systèmes de corpuscules. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **30**, 250—258 (1945).

Mécanique non-relativiste des systèmes.

*O. Costa de Beauregard.*

**Slansky, Serge:** Sur certaines généralisations des changements de coordonnées. *C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 857—858 (1946).

Définition de la notion appliquée à des opérateurs,  $\partial/\partial x$ , etc. . . .

*O. Costa de Beauregard.*

Slansky, Serge: La mécanique ondulatoire relativiste des systèmes et les transformations de M. Destouches. *Cahiers de Physique* Nr. 21, 1—11 (1944).

Espace de configuration temps à  $3n + 1$  dimensions. *O. Costa de Beauregard*.

Dirac, P. A. M.: On the analogy between classical and quantum mechanics. *Rev. modern Phys.* 17, 195—199 (1945).

Étude qui est l'une des sources des premiers travaux de Feynman [*Rev. modern Phys.* 20, 367 (1948)]. Définition générale d'une fonction d'opérateurs non commutables, et application au principe de Huygens de la mécanique quantique. *O. Costa de Beauregard*.

Chang, T. S.: The impulse-energy tensor of material particles. I. Mesons and electrons. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* 182, 302—318 (1944).

Rosenfeld, Léon: Sur la définition du spin d'un champ de rayonnement. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* 28, 562—568 (1942).

An ambiguity in the definition of the (classical) spin tensor is pointed out. However the two tensors yield identical results in the case of a field vanishing at infinity or periodic in time. *J. Rayski*.

Donder, Th. de: La dynamique relativiste des photons. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* 31, 81—92 (1946).

Corpuscules de masse propre nulle en géométrie riemannienne.

*O. Costa de Beauregard*.

Beck, G.: Field concepts in quantum theory. *Reviews modern Phys.* 17, 187—194 (1945).

Beck, Guido: Polarisation of the vacuum by a discontinuous potential. *Revista Un. mat. Argentina* 11, 18—29 (1945) [Spanisch mit engl. Zusammenfassg.].

The author proposes to replace Maxwell's electrodynamics by a set of 10 differential equations based on the 16 Dirac and Eddington matrices. *J. Rayski*.

Lubanski, J. K.: Sur la théorie des particules élémentaires de spin quelconque. I. II. *Physica* 9, 310—324, 325—338 (1942).

L'A. étudie le système des matrices  $F_\mu$  intervenant dans la représentation des équations d'ondes des corpuscules de spin quelconque proposée par H. A. Kramers. F. J. Belinfante, J. K. Lubanski (ce Zbl. 25, 287). Ces matrices de la

forme 
$$F^\lambda = \sum_{n=1}^N \gamma^\lambda = \sum_{n=1}^N I \times \cdots \times \gamma^\lambda \times \cdots \times I, \quad (\gamma^\lambda \text{ matrices de Dirac}),$$

forment un anneau réductible de telle sorte que l'équation d'onde  $(I^\nu \partial_\nu + N\kappa) \psi = 0$  décrit une superposition de particules de masses propres et de spins différents. En particulier l'A. discute les propriétés de l'équation d'ondes dans le cas des représentations irréductibles dans l'espace à cinq dimensions. *G. Petiau*.

(1) Bhabha, H. J.: Relativistic wave equations for the elementary particles. *Reviews modern Phys.* 17, 200—216 (1945).

(2) Bhabha, H. J.: Relativistic wave equations for the proton. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 21, 241—264 (1945).

Étude générale des équations d'ondes de la forme  $(i\Delta^k \partial/\partial x^k + \kappa) \psi = 0$  susceptibles de représenter des corpuscules de spin entier ou demi-entier sans introduction de conditions auxiliaires. Les conditions d'invariance par rapport au groupe de Lorentz conduisent en général à des représentations matricielles pour lesquelles le corpuscule possède une série d'états de spin et une série d'états de masse propre. Ces multiplicités sont caractéristiques de la théorie et ne peuvent en être éliminées. Cette étude est complétée (2) par l'introduction du formalisme lagrangien, par l'examen de la connexion possible entre spin et statistique et par l'étude de l'approximation non relativiste. L'A. propose d'utiliser sa théorie pour représenter le proton en considérant la représentation irréductible  $R_5(3/2, 1/2)$  du groupe de Lorentz à cinq dimensions qui dans le cas non relativiste se comporte comme une particule de spin 1/2. *G. Petiau*.

**Petiau, Gérard:** Sur les équations d'ondes des corpuscules de spin quelconque. I. II. J. Phys. Radium, VIII. Sér. 7, 124—128, 181—184 (1946).

Étude, discussion et généralisation des divers types d'équations d'ondes proposées pour représenter les corpuscules de spin quelconque. On montre notamment comment à partir de la théorie de L. de Broglie (Théorie générale des corpuscules à spin, Paris 1943) on peut obtenir la théorie de M. Fierz [Helvet. Phys. Acta 12, 3 (1938)]. De même la théorie générale déduite de la méthode de fusion des matrices contient comme cas particulier les théories de Fierz et de L. de Broglie. Cette théorie a été précisée et développée récemment par l'A. (ce Zbl. 51, 437). *G. Petiau.*

**Petiau, Gérard:** Sur les équations d'ondes des corpuscules à spins entiers. C. r. Acad. Sci., Paris 214, 610—612 (1942).

Mit Hilfe von Eigenschaften von Matrizen, die mit den Diracschen zusammenhängen, wird gezeigt, daß die Darstellung von Materie mit ganzzahligem Spin ( $n$ ) durch ein System von  $2n$  Differentialgleichungen vom Diracschen Typ äquivalent ist einer Darstellung durch eine tensorielle Wellenfunktion, wenn man sich auf Lösungen bestimmter Symmetrie beschränkt. *F. Hund.*

**Petiau, Gérard:** Les systèmes de matrices de la représentation des corpuscules de spin  $h/2\pi$ . Revue sci. 83, 67—74 (1945).

Étude générale de l'algèbre et de la construction des représentations irréductibles pour les systèmes de 3, 4 et 5 matrices  $I^\mu$  satisfaisant aux relations de commutation  $I^\nu I^\nu I^\mu + I^\mu I^\nu I^\nu = I^\mu \delta^{\nu\nu} + I^\nu \delta^{\nu\mu}$ , introduite par l'A. dans la représentation algébrique des corpuscules de spin 1 [Acad. roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 16 (1936)]. *G. Petiau.*

**Kwal, B.:** Sur la mécanique ondulatoire des corpuscules élémentaires. Arch. Sci. 26, 135—152 (1944); 27, 5—25, 95—121, 167—190, 211—221 (1945).

L'A. développe une théorie générale des corpuscules de spin quelconque et de masse au repos finie ou nulle caractérisée par des systèmes de matrices déduits des matrices de spin par la méthode de fusion (L. de Broglie). La complexité des systèmes d'équations possibles est réduite par une classification en système primaires, secondaires ou mixtes dont l'enchaînement est précisé. L'A. examine de nombreux cas particuliers et notamment le cas des corpuscules dont la vitesse de propagation serait celle de la lumière. *G. Petiau.*

**Bloch, Léon:** Remarques sur la nouvelle théorie de la lumière. J. Phys. Radium, VIII. Sér. 6, 196—202 (1945).

**Bloch, Léon:** Remarques sur la nouvelle théorie de la lumière. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 109—111 (1945).

**Bloch, Léon:** Sur une identité de la théorie du photon. C. r. Acad. Sci., Paris 220, 240—241 (1945).

It is shown that the two equations describing particles with spin  $1/2$  and with masses equal but of opposite sign (whose fusion is interpreted as a photon in de Broglie's „Nouvelle Théorie de la lumière“ (Paris 1940) transform into each other by a reflection of the axes  $x, y, z, t$ . *J. Rayski.*

**Rao, B. S. Madhava, V. R. Thiruvengkatachar and K. Venkatachaliengar:** Algebra related to elementary particles of spin  $3/2$ . Proc. roy. Soc. London, Ser. A 187, 385—397 (1946).

**Rao, B. S. Madhava:** Commutation rules for matrices related to particles of higher spins. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 15, 139—147 (1942).

**Rao, B. S. Madhava:** Commutation rules related to particles of spins half and one. J. Mysore Univ., Sect. B 3, 59—63 (1942).

L'A. détermine les règles de commutation de l'algèbre des matrices  $\beta_\mu$  intervenant dans une équation d'ondes de la forme  $\partial_\mu \beta_\mu \psi + \kappa \psi = 0$  décrivant un corpuscule de spin  $3/2$  ou 2. Ces calculs sont complétés et les déterminations



précisées dans des mémoires ultérieurs de l'A.: ref. précéd.; Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 26, 221 (1947).

*G. Petiau.*

Ginsburg, V.: Über die Theorie eines Teilchens mit einem Spin  $3/2$ . Žurn. eksper. teor. Fiz. 12, 425—442 (1942) [Russisch].

Ginsburg, V. L.: Relativistic wave equations for particles with variable spin. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 37, 166—171 (1942).

Ginsburg, V.: On the theory of the particle of spin  $3/2$ . Acad. Sci. URSS, J. Phys. 7, 115—128 (1943).

Ginsburg, V. L.: The relativistic theory of excited spin states of the proton and the neutron. Phys. Review, II. Ser. 63, 1—12 (1943).

L'A. développe une théorie de la particule de spin total maximum  $3/2$  analogue à la théorie proposée antérieurement par M. Fierz et W. Pauli (ce Zbl. 23, 430). Une notation mixte vecteur-spineur pour les spineurs à trois indices permet de simplifier le formalisme. L'A. discute notamment la forme du lagrangien, la représentation du tenseur énergie-impulsion, les solutions ondes planes, l'introduction d'un champ électromagnétique extérieur. L'hypothèse de W. Heitler et S. T. Ma (ce Zbl. 26, 190) sur la représentation du proton par une particule de ce type est reprise et discutée.

*G. Petiau.*

Svartholm, N.: On the algebras of relativistic quantum theories. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. 12, Nr. 9, 94—108 (1942).

Knie, Guillermo: Darstellung eines mit dem Spin 1 verknüpften Rings. Revista Un. mat. Argentina 9, 113—117 (1943) [Español].

Schrödinger, E.: Pentads, tetrads, and triads of meson-matrices. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 48, 135—146 (1943).

Schrödinger, E.: Systematics of meson-matrices. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 49, 29—42 (1943).

Étude de l'algèbre constitué par un système de cinq matrices  $\beta^\mu$ , ( $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$ ) satisfaisant aux règles de commutation  $\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu \delta^{\nu\rho} + \beta^\rho \delta^{\mu\nu}$ .

*G. Petiau.*

Harish-Chandra: The correspondence between the particle and the wave aspects of the meson and the photon. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 186, 502—525 (1946).

Étude algébrique des représentations irréductibles des matrices de la théorie du méson  $\beta^\mu$ , ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) satisfaisant aux relations  $\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu \delta^{\nu\rho} + \beta^\rho \delta^{\mu\nu}$ . L'A. donne des règles de calcul algébrique permettant le calcul de traces de produits de matrices  $\beta^\mu$ .

*G. Petiau.*

Harish-Chandra: A note on the  $\sigma$ -symbols. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 23, 152—163 (1946).

Les symboles  $\sigma_{\mu\nu}^k$  (van der Waerden, ce Zbl. 4, 89) associent les tenseurs aux spineurs pour les transformations du groupe de Lorentz restreint. L'A. rassemble les propriétés algébriques de ces symboles sans considérer leurs représentations explicites. Le formalisme spinoriel développé est appliqué à une équation proposée pour décrire le corpuscule de spin  $h/2$  utilisant un seul spineur et non deux comme dans la théorie de Dirac.

*G. Petiau.*

Shanmugadhasan, S.: On the theory of spinning particles. Proc. Cambridge philos. Soc. 43, 106—117 (1947).

L'A. établit une théorie classique du mouvement d'une particule à spin, portant une charge électrique et un moment électromagnétique dipolaire, en interaction avec un champ électromagnétique ou un champ mésique en généralisant la théorie de l'électron classique de Dirac (ce Zbl. 26, 189). La théorie est symétrique par rapport aux champs avancés et retardés, absorbés et émis. Les équations proposées sont plus simples que celles obtenues dans des problèmes analogues par Bhabha et Corben (ce Zbl. 26, 382) et par Bhabha (ce Zbl. 26, 382). La

théorie est étendue au cas de plusieurs particules, mise sous forme hamiltonienne et quantifiée. L'extension au cas du champ mésique introduit un potentiel de Wentzel généralisé. *G. Petiau.*

Heitler, W.: On the particle equation of the meson. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 49, 1—28 (1943).

Smorodinskij, J.: Die „Bremsstrahlung“ des Teilchens vom Spin Eins. Žurn. eksper. teor. Fiz. 12, 181—198 (1942) [Russisch].

Tamm, Ig.: Motion of mesons in electromagnetic fields. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 29, 551—555 (1940).

Galanin, A. D.: Die Bewegung des Mesons im homogenen magnetischen Feld. Acad. Sci. URSS, J. Phys. 6, 27—34 (1942).

Während das magnetische Moment eines Diracschen Elektrons von dessen Geschwindigkeit abhängt und bei sehr großen Geschwindigkeiten gegen Null geht, behält das magnetische Moment eines Vektormesons auf Grund der Tammschen Form der Mesongleichungen einen konstanten Wert bei allen Energien. *Th. Seel.*

Banderet, P. P.: Zur Theorie singulärer Magnetpole. Helvet. phys. Acta 19, 503—522 (1946).

The A. investigates the interaction of single magnetic poles with electrons. It is pointed out a difficulty arising in the case of an interaction with charged particles with a „Pauli term“ (i. e. with an additional magnetic moment). *J. Rayski.*

Fierz, M.: Zur Theorie magnetisch geladener Teilchen. Helvet. phys. Acta 17, 27—34 (1944).

A new proof is given of Dirac's theorem that in a quantum theory single magnetic poles may exist provided the magnetic charge (multiplied by the elementary electric charge  $e$  and divided by the light velocity  $c$ ) is an integer or half integer multiple of the Planck's quantum of action. *J. Rayski.*

Havas, P.: On the interaction of radiation and matter. Phys. Review, II. Ser. 68, 214—226 (1945).

The author presents a new derivation of Moller's formula for a retarded interaction between two charged particles. *J. Rayski.*

Pirene, J.: Le champ propre et l'interaction des particules de Dirac suivant l'électrodynamique quantique. Arch. Sci. physiques natur., V. Sér. 28, 233—272 (1946).

Gives a survey of the classical and quantum electrodynamics and examines the correspondence of the Dirac electron with a classical particle possessing electric and magnetic moments. *J. Rayski.*

Gupta, S.: On the electromagnetic field and the self-energy of meson. Proc. nat. Inst. Sci. India 9, 173—192 (1943).

Bestätigung eines früheren Resultates von Weisskopf und Richtmeyer. *Th. Seel.*

Stueckelberg, E. C. G.: Le freinage du rayonnement en théorie des quanta. Helvet. phys. Acta 16, 427—428 (1943).

Corson, E. M.: Second quantization and representation theory. Phys. Reviews, II. Ser. 70, 728—748 (1946).

Étude approfondie. Formalisme de Dirac-Jordan. *O. Costa de Beauregard.*

Ma, S. T.: On the Heisenberg picture in quantum electrodynamics. Chinese J. Phys. 6, 36—49 (1945) [mit chinesischer Zusammenfassg.].

The equivalence of the Heisenberg and Schrödinger forms (pictures) of quantum electrodynamics is demonstrated. *J. Rayski.*

Chang, T. S.: A note on the Hamilton theory of quantization. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 183, 316—328 (1945).

Chang, T. S.: Quantum electrodynamics with  $\partial A_\mu / \partial x_\mu = 0$ . Proc. roy. Soc. London, Ser. A 185, 192—206 (1946).

A general method of canonical quantization of fields with some supplementary conditions is developed. The case of electrodynamics with the auxiliary Lorentz condition  $\partial_\mu A_\mu = 0$  is discussed.

*J. Rayski.*

Dirac, P. A. M.: The physical interpretation of quantum mechanics. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **180**, 1—40 (1942).

Dirac, Paul A. M.: Quantum electrodynamics. Commun. Dublin Inst. advanced Studies, Ser. A, Nr. 1, 36 p. (1943).

Dirac, Paul A. M.: Developments in quantum electrodynamics. Commun. Dublin Inst. advanced Studies, Ser. A, Nr. 3, 33 p. (1946).

Pauli, W.: On Dirac's new method of field quantization. Reviews modern Phys. **15**, 175—207 (1943).

Pauli, W.: On applications of the  $\lambda$ -limiting process to the theory of the meson field. Phys. Review, II. Ser. **64**, 332—344 (1943).

Attempts to overcome the well known convergence difficulties inherent in the quantum electrodynamics. In order to get rid of the divergences Dirac introduces two new ideas of quite a different origin: (1) the  $\lambda$ -limiting process, and (2) subsidiary photons with negative energies. The  $\lambda$ -limiting process (due to G. Wentzel) is a classical procedure introduced chiefly to avoid an infinite Coulomb energy of a point particle by means of the introduction of a time-like fourvector  $\hat{\lambda}_\mu$  destroying any interaction between points whose distance is of the order  $\hat{\lambda}_\mu^2$ . Then  $\hat{\lambda}_\mu \rightarrow 0$ . The Coulomb self energy vanishes even in the limit  $\hat{\lambda}_\mu = 0$ . The subsidiary photons with negative energies are introduced chiefly to avoid the dynamical self energy (being a typical quantum effect). The difficulty connected with the negative energies is circumvented by introducing an indefinite metric in the Hilbert space. The negative energies appear always multiplied by negative probabilities. The existence of positive (negative) energy photons is reinterpreted as an emission (absorption) of photons. Einstein's laws of radiation do not follow from this theory but have to be postulated independently. Except for the idea of an indefinite metric (which recently was applied to the problem of an auxiliary Lorentz condition) the papers are outdistanced by later developments of the relativistically invariant quantum electrodynamics due to Tomonaga, Schwinger and others.

*J. Rayski.*

Gustafson, T.: On the elimination of divergencies in quantum field theory. Fysiograf. Sällsk. Lund Förhdl. **15**, Nr. 28, 277—288 (1945).

Gustafson, Torsten: Elimination of divergencies in quantum electrodynamics and in meson theory. Nature **157**, 734 (1946).

Gustafson, T.: On divergencies in the theory of interaction of a nucleon with a scalar meson field. Fysiograf. Sällsk. Lund Förhdl. **16**, Nr. 2, 8 S. (1946).

Gustafson, Torsten: On the elimination of certain divergencies in quantum electrodynamics. Ark. Mat. Astr. Fys. **34A**, Nr. 2, 9 S. (1946).

Fremberg, N. E.: Some applications of the Riesz potential to the theory of the electromagnetic field and the meson field. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **188**, 18—31 (1946).

A method due to M. Riesz of solving hyperbolic differential equations is applied to classical and quantum electrodynamics and mesodynamics. Dirac's equation of motion for a radiating electron is obtained. Some of the divergences encountered in the self energy problems are removed. A close similarity to the  $\lambda$ -limiting process is pointed out. In the reviewers opinion there is another striking similarity: between the results obtained by means of Riesz and Gustafson method and those obtained recently by applying the distributions of Schwarz to the divergent expressions of the quantum field theory. These interrelations have not yet been clarified.

*J. Rayski.*



Markov, M. A.: On the relativistically invariant „cutting-off factors“ in electrodynamics. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Ser. 40, 18—19 (1943).

Markov, M.: On a certain criterion of relativistic invariance. Acad. Sci. URSS, J. Phys. 10, 333—340 (1946).

Markov, M. A.: On the criterion of relativistic invariance. Žurn. eksper. teor. Fiz. 16, 790—799 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Formfactor theories proposed by several authors to avoid the well known convergence difficulties in quantum field theory are discussed from the point of view of the principle of „causal independence“ i. e. a principle that actions cannot propagate with higher velocity than that of light and any two events taking place at two world points joined by a space-like distance cannot influence each other. *J. Rayski.*

Racah, Giulio: On the selfenergy of the electron. Phys. Review, II. Ser. 70, 406—409 (1946).

The author conjectures that the electron self energies in different orders in  $e^2$  may compensate each other giving a finite result for a particular value of the elementary charge  $e$ . *J. Rayski.*

Hjalmar, S. and O. Brulin: On the effect of cutting-off in the meson pair theory. Ark. Mat. Astr. Fys. 31 B, Nr. 5, 7 p. (1944).

Berechnung von uneigentlichen Integralen, welche in speziellen Mesontheorien auftreten. *Th. Sexl.*

Klein, O.: On the meson pair theory of nuclear interaction. Ark. Mat. Astr. Fys. 30 A, Nr. 3, 13 p. (1944).

Houiet, A.: Forces nucléaires de la théorie des paires. Helvet. phys. Acta 16, 529—550 (1943).

Pauli, W. and N. Hu: On the strong coupling case for spin-dependent interactions in scalar- and vector-pair theories. Reviews modern Phys. 17, 267—286 (1945).

Jauch, J. M. and J. Leite Lopes: Scalar meson pair theory of nuclear forces. Anais Acad. Brasil. Ci. 16, 281—289 (1944).

Fierz, Markus: Über die Wechselwirkung zweier Nucleonen in der Mesontheorie. Helvet. phys. Acta 17, 181—194 (1944).

Flügge, S.: Eine Bemerkung zur Theorie des Mesonfeldes. Ann. der Physik, V. F. 43, 573—577 (1943).

Aufzeigung einiger Analogien zwischen elektromagnetischen und Mesonenfeldern allerdings nur für den Fall skalarer Mesonen. *Th. Sexl.*

Nikolsky, K.: On the theory of mesons. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 38, 173—175 (1943).

● Pauli, Wolfgang: Meson theory of nuclear forces. New York: Interscience Publishers, Inc., 1946. 69 p.; \$ 2,00.

Zweite Auflage s. dies. Zbl. 33, 95.

Pauli, W. and S. Kusak: On the theory of a mixed pseudoscalar and a vector meson field. Phys. Review, II. Ser. 63, 400—416 (1943).

Pauli, W. and S. M. Dancoff: The pseudoscalar meson field with strong coupling. Phys. Review, II. Ser. 62, 85—108 (1942).

Erster Bericht über die ursprüngliche Form der Theorie, die noch zu entgegengesetzt gleichen magnetischen Momenten für Neutron und Proton führte. *Th. Sexl.*

Serber, R. and S. M. Dancoff: Strong coupling mesotron theory of nuclear forces. Phys. Review, II. Ser. 63, 143—161 (1943).

Wentzel, Gregor: Zur Vektormesontheorie. Helvet. phys. Acta 16, 551—596 (1943).

Yamasaki, Zyunpei: On the meson theory involving a mixture of scalar and pseudoscalar field. I. II. Proc. phys. math. Soc. Japan, III. Ser. 25, 659—666 (1943); 26, 32—40 (1944).

Iwanenko, D. and A. Sokolov: Über die Dipoleigenschaft der Mesonen und die Schwierigkeiten der Procaschen Theorie. Žurnal eksper. teor. Fiz. 12, 473—478 (1942) [Russisch].

Heitler, W.: A theorem in the charge-symmetrical meson theory. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 51, 33—39 (1946).

Da die Kernpotentiale gegenüber Rotationen im „Ladungsraum“ invariant sein müssen, ergeben sich Folgerungen für die Ladungsabhängigkeit der Streuquerschnitte Nukleon-Meson aus einfachen Invarianzbetrachtungen. *Th. Sexl.*

Ma, S. T.: A relativistic formula for the scattering of mesons under the influence of radiation damping. Proc. Cambridge philos. Soc. 39, 168—172 (1943).

Es wird die Streuung von Mesonen an Protonen berechnet. Nach der Methode von Gora, Heitler und Wilson wird im relativistischen Fall die Strahlungsdämpfung mit berücksichtigt. Die Resultate sind analog wie in der unrelativistischen Rechnung. Für große Energie  $E'$  des einfallenden Mesons wird der Streuquerschnitt im Koordinatensystem, in welchem das Proton ruht, asymptotisch

$$\Phi \sim \frac{4}{3\pi} \frac{h^2 c^2}{E' M c^2} (M = \text{Protonmasse}).$$

*M. Fierz.*

Ma, S. T.: Calculations of the scattering of mesons by the matrix method. Sci. Record 1, 123—129 (1942).

Gupta, S.: On the elastic scattering of the fast mesons. Proc. nat. Inst. Sci. India 8, 369—375 (1942).

Gupta, S. and R. C. Majumdar: On the collision between meson and electron. Proc. nat. Inst. Sci. India 8, 199—216 (1942).

Weinstock, Robert: Inelastic scattering of slow neutrons. Phys. Review, II. Ser. 65, 1—20 (1944).

Harish-Chandra: On the scattering of scalar mesons. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 21, 135—146 (1945).

Wilson, A. H.: The quantum theory of radiation damping. Proc. Cambridge philos. Soc. 37, 301—316 (1941).

Grundlegende Arbeit über die seither angenommene Theorie von Heitler-Wilson. *Th. Sexl.*

Heitler, W. and H. W. Peng: On the production of mesons by proton-proton collisions. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 49, 101—133 (1943).

Heitler, W.: On the production of mesons by proton-proton collisions. II. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 50, 155—165 (1945).

Nach der Näherungsmethode von Williams und Weiszäcker wird auf Grund der Moller-Rosenfeldschen Form der Mesontheorie die Erzeugung von Mesonen bei Stoßprozessen zwischen Proton und Proton und zwischen Neutron und Proton unter Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung behandelt.

*Th. Sexl.*

Hamilton, J. and H. W. Peng: On the production of mesons by light quanta and related processes. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 49, 197—224 (1944).

Die Bedeutung dieser Arbeit liegt in den mathematischen Problemen, welche die Auflösung von simultanen nichthomogenen Fredholmschen Integralgleichungen nach der Methode der reziproken Kerne erfordern. *Th. Sexl.*

Peng, H. W.: On the divergence difficulty of quantized field theories and the rigorous treatment of radiation reaction. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 186, 119—147 (1946).

The author claims that a faulty application of the perturbation method is responsible for the well known convergence difficulties in the quantum field theory,

and shows that by taking account of degeneracy of the states the divergent self energies may be avoided. The reviewer does not agree with this conclusion and is of the opinion that the apparent convergence has been brought about by a faulty estimate of the (singular)  $\Delta$ -like functions. *J. Rayski.*

**Born, M. and H. W. Peng:** Quantum mechanics of fields. I. Pure fields. II. Statistics of pure fields. III. Electromagnetic field and electron field in interaction. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **62**, 40—57; 92—102; 127—137 (1944).

**Born, M. and H. W. Peng:** Statistical mechanics of fields and the „apeiron“. Nature **153**, 164—165 (1944).

This series of papers constitutes an attempt to construct a generalized quantum mechanics of fields in which the dependence of the field quantities on space-time variables is eliminated and replaced by the coefficients of the Fourier transforms of observable energy and momentum. The wave vectors  $k[\psi(k)$  is a Fourier transform of  $\psi(x)$ ], are considered as operators. These papers should be considered as precursors of the non-local field theory developed later by Yukawa (this Zbl. **41**, 572) and others. *J. Rayski.*

**Jauch, J. M.:** Meson theory of the magnetic moment of proton and neutron. Phys. Review, II. Ser. **63**, 334—342 (1943).

**Ma, S. T. and F. C. Yu:** Electromagnetic properties of nuclei in the meson theory. Phys. Review, II. Ser. **62**, 118—126 (1942).

Für das Deuteron ergibt sich auf Grund des Mesonaustausches zwischen Proton und Neutron kein zusätzliches nichtadditives magnetisches Moment in der vektoriellen und pseudoskalaren Form der Mesontheorie. *Th. Seel.*

**Fierz, M. und G. Wentzel:** Zum Deuteronproblem. I. II. Helvet. phys. Acta **17**, 215—232, 252—272 (1944).

**Villars, Felix:** Ein Beitrag zum Deuteronproblem. Helvet. phys. Acta **19**, 323—354 (1946).

Diskussion der Deuterongrundzustände  $^3S$  und  $^1S$  auf Grund der strong-coupling Mesontheorie; seither hat sich allerdings der Zustand  $^1S$  als virtuell herausgestellt. *Th. Seel.*

**Heitler, W. and P. Walsh:** Theory of cosmic-ray mesons. Reviews modern Phys. **17**, 252—262 (1945).

Berechnung von modifizierten Wirkungsquerschnitten durch Berücksichtigung der Störungen des stationären Nukleons. *Th. Seel.*

**Kosten, L.:** On the frequency distribution of the number of discharges counted by a Geiger-Müller counter in a constant interval. Physica **10**, 749—756 (1943).

#### Bau der Materie:

**Jaffé, George:** A statistical theory of liquids. I. II. Phys. Review, II. Ser. **62**, 463—476 (1942); **63**, 313—321 (1943).

Verf. versucht, eine statistische Theorie eines Zweiphasensystems (Flüssigkeit, Dampf) zu geben, indem er die großen mathematischen Schwierigkeiten der strengen Methode von Born-Green und Mayer zu vermeiden trachtet. Er führt eine Trennfläche zwischen die beiden Phasen ein, so daß die potentielle Energie eines Moleküls auch noch von der Entfernung zur Oberfläche abhängt. Dabei werden die Bedingungen der Existenz eines derartigen Systems bestimmt. Verf. leitet Formeln für die charakteristischen Größen des flüssigen Zustandes ab. Vergleiche mit Experimenten zeigen, daß diese vereinfachte Theorie durchaus annehmbar ist. Diese Ergebnisse verwendet er im zweiten Teil und geht genauer auf die Theorie der Oberflächenspannung und des Dampfdruckes ein.

*H. Falkenhagen — G. Kelbg.*



**Kaplan, Wilfred and M. Dresden:** The mechanics of the condensation of gases. Phys. Review, II. Ser. **66**, 16—20 (1944).

Der grundlegende Gedanke besteht darin, die Natur der Kondensation eines Gases in Beziehung zu bringen zu einer Eigenschaft der Energiehyperflächen im  $6N$ -dimensionalen Phasenraum. Verff. geben an, daß ihre Projektion auf den  $3N$ -dimensionalen Koordinatenraum beschränkt ist oder unendlich ist, je nachdem  $e < 0$  oder  $e > 0$  wird, wobei  $e$  die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist. Sie sehen den Durchgang von  $e$  durch Null als die mathematische Beschreibung dieses Prozesses an.

H. Falkenhagen — G. Kelbg.

**Niggli, P.:** Neuformulierung der Kristallographie. Experientia **2**, 336—349 (1946).

Nach G. Pölya (dies. Zbl. **17**, 232) kann man in einer Gruppe der Ordnung  $z$  jedem Element  $m$ -ten Grades das Symbol  $f_m^n$  mit  $m \cdot n = z$  zuordnen. Als „Symmetrieformel“ einer Kristallklasse ergeben sich damit Ausdrücke der Form  $\frac{1}{z} \sum c f_m^n$ , wobei geometrisch gleichartige Elemente durch Klammern zusammengefaßt werden. Beispiel: Kristallklasse  $C_{4v} = 4 m m$ , Symmetrieformel für die allgemeine Punktlage  $= 8^{-1} [f_1^8 + (2 f_4^2 + f_2^4) + 2 f_2^4 + 2 f_2^4]$  [Identität  $\rightarrow f_1^8$ , Spiegelungen  $\rightarrow f_2^4$ , Tetragyen  $\rightarrow f_4^2$ , Digyre  $\rightarrow f_2^4$ ]. Durch Einführung von Symbolen für die verschiedenen Dreh- und Drehinversionsachsen wird die Darstellung noch detaillierter gestaltet, was im Endresultat die Aufstellung einer Tabelle der Symmetrieformeln für alle 32 Kristallklassen ermöglicht. Im zweiten Teil der Arbeit wird gezeigt, wie mit diesen Formeln gerechnet werden kann (Vielseitigkeit einer oktaedrischen Struktur, Isomerenzahlen).

W. Nowacki.

**Burckhardt, Johann Jakob:** Die Bewegungsgruppen der doppelt zählenden Ebene. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, 153—159. Zürich: Füssli 1945.

Die 80 Bewegungsgruppen der doppelt zählenden Ebene werden auf zwei Weisen hergeleitet: 1) Direkte Produktbildung aus einer der 17 ebenen Gruppen  $G$  und der Gruppe, die durch  $S^0$ ,  $S^1$ ,  $S^2$  und  $S^d$  erzeugt wird, wobei  $S^0 = [x, y, z]$ ,  $[x, y, \bar{z}]$ ;  $S^1 = [x, y, z]$ ,  $[x + \frac{1}{2}, y, \bar{z}]$ ;  $S^2 = [x, y, z]$ ,  $[x, y + \frac{1}{2}, \bar{z}]$ ;  $S^d = [x, y, z]$ ,  $[x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, \bar{z}]$  bedeuten. 2) Spiegelung der Nebengruppe. Ist  $U$  eine Untergruppe vom Index zwei der Gruppe  $G$  und  $G = U + N$  ( $N$  = zugehörige Nebengruppe), so erhält man eine Gruppe der doppelt-zählenden Ebene durch  $U + [x, y, \bar{z}] N$ .

W. Nowacki.

**Herring, C.:** Character tables for two space groups. J. Franklin Inst. **233**, 525—543 (1942).

An die Theorie der irreduziblen Darstellung der Raumgruppen von F. Seitz (dies. Zbl. **13**, 201; **9**, 384; **11**, 233; **12**, 286; **14**, 151) anschließend gibt der Autor diese Darstellungen für die zwei wichtigen Raumgruppen  $D_{6h}^1$  (hexagonal-dichteste Packung) und  $O_h^1$  (Diamantgitterkomplex). Es sind dies solche, bei welchen kein Raumpunkt die volle Symmetrie der zugehörigen Punktgruppe besitzt, was die Berechnung der Charakterentabellen komplizierter gestaltet.

W. Nowacki.

**Misra, Rama Dhar:** Lattice sums of cubic crystals. Proc. nat. Acad. Sci. India, Sect. A **13**, 275—283 (1943).

Für Untersuchungen der Stabilität, Schmelzpunkte usw. kubischer Kristallgitter ist die Summe

$$S_n^{(k_1, k_2, k_3)} = \sum_l \frac{l_1^{2k_1} l_2^{2k_2} l_3^{2k_3}}{(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{\frac{1}{2}n}}$$

über alle Punkte außer den Nullpunkt erstreckt, von Bedeutung ( $l_i$  ganz und  $n$  = positiv, ganz). Es werden  $S_n^{(0)}$  und  $S_n^{(2)}$  und hierauf mittels  $3S_n^{(1)} = S_n^{(0)} + 2$  und  $3S_n^{(2)} + 6S_n^{(1,1)} = S_n^{(0)}$  die anderen Summen abgeschätzt.

W. Nowacki.

**Onsager, Lars:** Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. Phys. Review, II. Ser. 65, 117—149 (1944).

Die Verteilungsfunktion eines zweidimensionalen „Ferromagneten“ mit skalarem „Spin“ wird streng für den Fall eines verschwindenden Feldes bei einem zylindermäßig geschlossenen Kristall berechnet. Dabei wird angenommen, daß eine Wechselwirkung nur zwischen benachbarten Atomen existiert. Verf. benutzt Operatoren, welche die Spinrichtungen umkehren. Sie bilden eine einfache Quaternionenalgebra. Eigenschaften des direkten Produktes werden näher untersucht. Die Verteilungsfunktion kann durch Lösen eines Eigenwertproblems gefunden werden. Die Wahl verschiedener Wechselwirkungsenergien ( $\pm I, \pm I'$ ) in den (0, 1) und (1, 0) Richtungen kompliziert das Problem nicht. Für den Umwandlungspunkt  $T_c$  wird die Bedingung abgeleitet.  $\zeta_n(2I/kT_c) \zeta_n(2I'/kT_c) = 1$ . Die spez. Wärmen werden wie  $-\log(T - T_c)$  singulär. Es sei bemerkt, daß vorliegende Mitteilung eine erweiterte und vertiefte Behandlung der von Ising, Kramers und Wannier untersuchten Probleme ist. *H. Falkenhagen — G. Kelbg.*

**Wang, J. S.:** Note on Kirkwood's theory of superlattices. Sci. Record 1, 116—120 (1942).

Bemerkung zur Theorie der Übergitter von Kirkwood. Verf. verbessert die Theorie von Kirkwood und Bethe, indem es ihm gelingt, die Rechnung bis zu einer höheren Ordnung exakt durchzuführen. *H. Falkenhagen — G. Kelbg.*

**Laue, M. v.:** Der Wulffsche Satz für die Gleichgewichtsform von Kristallen. Z. Kristallographie, Mineralogie, Petrographie A 105, 124—133 (1943).

**Laue, M. v.:** Nachtrag zu meiner Arbeit: „Eine Ausgestaltung der Londonschen Theorie der Supraleitung“. Ann. der Physik, V. F. 43, 223—224 (1943).

## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

**Brikmanis, A. I.:** Zur Frage über die Wahl der Sterne bei Zeitbestimmungen im Meridian. Univ. Riga, wiss. Abh., Kl. math. Abt. Fak. Math. Naturw. 1, Nr. 4, 63—67 (1943).

**Fleckenstein, J. O.:** Vergleich der Hauptmethoden zur Bestimmung der Breitenvariation. Verhdl. Schweiz. naturf. Ges. 123, 91—93 (1943).

Die Horrebow-Talcott-Methode (für Beobachtungen im Meridian) und die modifizierte Struvesche Methode (für Beobachtungen im ersten Vertikel) werden daraufhin miteinander verglichen, in welcher Weise die Instrumental- bzw. Aufstellungsfehler in sie eingehen und das Resultat beeinflussen. *E. Rabe.*

**Duarte, F. J.:** Analytische Theorie der Sonnenfinsternisse und der Sternbedeckungen durch den Mond. (Erörterung der Besselschen Methode.) Estados Unidos de Venezuela, Bol. Acad. Ci. Fis. mat. nat. 8, 907—936 (1944) [Spanisch].

**Garavito Armero, Julio:** Definitive Formeln für die Berechnung der Bewegung des Mondes nach der Hill-Brown-Methode mit den Bezeichnungen, die Henri Poincaré im 3. Band seiner Himmelsmechanik benutzt hat. Revista Acad. Colombiana Ci. Exact. Fis. Nat. 6, 560—570 (1946) [Spanisch].

**Bagenov, G.:** The law of areas in the disturbed motion of an asteroid. Astron. J. Soviet Union 21, 170—175 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

**Samoilova-Yachontova, N.:** The differential correction of elliptic orbits. Bull. Inst. Astr. Acad. Sci. URSS, no. 53, 447—455 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

**Subbotin, M. F.:** Sur une méthode pour augmenter la convergence des séries trigonométriques fondamentales pour la mécanique céleste. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Ser. 40, 302—305 (1943).

Jekhowsky, Benjamin de: Sur la suppression des approximations successives dans la méthode de Lagrange-Andoyer de détermination des orbites paraboliques. C. r. Acad. Sci., Paris 219, 605—607 (1944).

Garwick, Jan V.: A new method of calculating general perturbations of asteroids and comets. Astrophys. Norvegica 3, 281—299 (1943).

Entwicklung der Störungsfunktion nach Zylinderkoordinaten mit der exzentrischen Anomalie als unabhängige Variable. *K. Stumpff.*

Hertz, Hans G.: On the theory of the Trojan asteroids. Astron. J. 50, 121—125 (1943).

Enthält praktische Überlegungen über die Anwendung der von Brown und Shook in ihrer „Planetary theory“ (Cambridge 1933) gegebenen Theorie der Trojaner. *K. Stumpff.*

Kobold, H.: Eine Bemerkung zur Störungstheorie. Astron. Nachr. 272, 212—213 (1942).

Vorschlag zur Verwendung einer neuen, durch  $dT = (1 + e \cos v')^2 dt$  definierten Variablen  $T$ , wo  $v'$  die wahre Anomalie des störenden Planeten bedeutet. *K. Stumpff.*

Brouwer, Dirk: A survey of the dynamics of close binary systems. Astron. J. 52, 57—63 (1946).

Untersuchung der Bewegung eines Doppelsternsystems, dessen Komponenten vergleichbare Massen und nicht auf der Bahnebene senkrecht stehende Achsen haben. *K. Stumpff.*

Brouwer, Dirk and G. M. Clemence: Numerical development of the disturbing function by correction of an approximate development. Astron. J. 52, 64—67 (1946).

● Kopal, Zdenek: An introduction to the study of eclipsing variables. Harvard Observatory Monograph Nr. 6. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1946. X, 220 p.; \$ 4.00.

Kopal, Zdenek: Some tables to facilitate computation of elements of eclipsing binaries. Proc. Amer. philos. Soc. 88, 145—149 (1944).

Schaub, Werner: Grundlagen und Beispiel für die Ableitung der scheinbaren Bahn eines Doppelsternes aus den relativen rechtwinkligen Koordinaten. Astron. Nachr. 272, 185—190 (1942).

Berechnung einer Doppelsternbahn für den Fall, daß die Beobachtungen sich mindestens über einen halben Umlauf erstrecken, der die Zeiten des Periastrons und des Apastrons einschließt. *K. Stumpff.*

● Vidal Abascal, Enrique: The problem of the apparent orbit for visual double stars. Thesis, Univ. of Madrid. Public. del Observatorio de Santiago, II. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto Nacional de Geofísica, Nr. 6. Santiago de Compostela, 1944. XV, 62 p. [Spanisch mit französ., engl. und deutscher Zusammenfassg.].

Gibt eine einfache Methode zur Bestimmung einer Doppelsternbahn aus kurzen Bögen und eine Anwendung auf die Bahn von ADS 6871. Im Anhang eine Zusammenstellung verschiedener Methoden der Doppelsternbahnbestimmung aus verstreuten Quellen. *K. Stumpff.*

Polak, J. F.: Diagrams for determination of the elements of an orbit in the two-body problem from the velocity at a given point. Astron. J. Soviet Union 21, 99—110 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Ist  $c$  ein vom Koordinatensystem unabhängiges Bahnelement im Zweikörperproblem und sind  $x, y$  die Geschwindigkeitskomponenten in der Bahnebene, so definiert  $f(x, y; c) = 0$  eine für jedes Element charakteristische Kurvenschar. Verf. konstruiert diese Scharen für Geschwindigkeiten zwischen 0 und 70 km/sec und für die heliozentrische Distanz  $R = 1$  Astronomische Einheit. Für Übergang auf beliebige  $R$  gibt er eine Anweisung. *K. Stumpff.*



**Polak, J. F.:** Diagrams for solution of the problem of two bodies from the velocity vector in the case of repulsion. *Astron. J. Soviet Union* 22, 283—292 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Kurvenscharen der in der vorstehenden Arbeit beschriebenen Art werden für repulsive Kräfte gezeichnet (Bewegung in Kometenschweifen). *K. Stumpff*.

**Dubiago, A. D.:** On some questions of motion, structure and disintegration of comets. I. II. *Astron. J. Soviet Union* 19, 14—46; 20, 49—62 (1942) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Kurzperiodische Kometen bieten oft Schwierigkeiten. So zeigen die Kometen Encke und Brooks eine säkulare Beschleunigung, der Komet Wolf eine Verzögerung der mittleren Bewegung. Verf. zeigt den Zusammenhang dieser Erscheinung mit dem Zerfall der Meteoritenansammlung, aus der der Komet besteht, und studiert deren Mechanik nach den gleichen Methoden, die auch bei kugelförmigen Sternhaufen angewandt werden. *K. Stumpff*.

**Ijinsky, I.:** A simple method for the determination of orbits of planets and comets. *Astron. J. Soviet Union* 23, 367—376 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Die Vereinfachung der Ausführung einer Bahnbestimmung beruht in dieser Methode auf der Einschaltung einer graphischen Konstruktion, durch die die Gleichung 8. Grades bzw. die Gaußsche Gleichung vermieden wird. Das gerechnete Beispiel (Komet 1882 II) überzeugt nicht von der Überlegenheit dieses Verfahrens über die klassischen Methoden. *K. Stumpff*.

**Fessenkoff, B. G.:** On the possibility of capture at close passages of attracting bodies. *Astron. J. Soviet Union* 23, 45—48 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

**Fessenkoff, B.:** On the motion of meteoric particles in the interplanetary space. *Astron. J. Soviet Union* 23, 353—366 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Untersucht die Bewegung kleiner Massenteilchen unter der gemeinsamen Wirkung von Gravitation und Lichtdruck. *K. Stumpff*.

**Agostinelli, Cataldo:** Sui problemi fondamentali della cosmogonia. *Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VII. Ser. 2, 166—186 (1940).

**Agostinelli, Cataldo:** Effetto del termine cosmogonico sullo spostamento del perielio di una orbita planetaria e sulla variazione del parametro e dell'eccentricità. *Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VII. Ser. 2, 592—602 (1941).

**Agostinelli, Cataldo:** Sulla variazione delle velocità angolare terrestre durante una lunazione. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.*, 77 (III. Ser. 8), 527—547 (1944).

**Agostinelli, Cataldo:** Nuovi contributi alla teoria degli anelli di Saturno. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* 79, 346—370 (1944).

**Agostinelli, Cataldo:** Sulla variazione dell'inclinazione del piano dell'orbita, del parametro e dell'eccentricità nel moto relativo di un pianeta puntiforme attratto colla legge di Armellini da un sole esteso e rotante. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* 77, 30—46 (1942).

**Heckmann, O.:** Das statistische Gleichgewicht eines freien Systems von Massenpunkten. I. *Z. Astrophys.* 23, 31—56 (1944).

Das Sternsystem wird betrachtet als System von Massenpunkten, zwischen denen beliebige Zentralkräfte wirken. Aus geometrisch-physikalischen Überlegungen wird die wahrscheinlichste Verteilungsfunktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte abgeleitet. Dabei wird von der

prinzipiell zu fordernden Konstanz von Energie und Drehimpuls Gebrauch gemacht. Wesentliche Resultate sind, daß ein solches System nicht überall wie ein starrer Körper rotieren kann und daß nicht überall eine kugelsymmetrische Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung herrschen kann. Wechselwirkungen (Zusammenstöße) der einzelnen Sterne untereinander sind nicht berücksichtigt.

*F. Schmeidler.*

Chandrasekhar, S.: On the radiative equilibrium of a stellar atmosphere. I.—III. *Astrophys. J.* 99, 180—190; 100, 76—86, 117—127 (1944).

Cesco, C. U., S. Chandrasekhar and J. Sahade: On the radiative equilibrium of a stellar atmosphere. IV. VI. *Astrophys. J.* 100, 355—359 (1944); 101, 320—327 (1945).

Chandrasekhar, S.: On the radiative equilibrium of a stellar atmosphere. V, VII—XII. *Astrophys. J.* 101, 95—107, 328—347, 348—355 (1945); 103, 165—192, 351—370; 104, 110—132; 191—202 (1946).

Zusammenfassend dargestellt in: Chandrasekhar (dies. Zbl. 37, 432).

*G. Burkhardt.*

Chandrasekhar, S.: The radiative equilibrium of an expanding planetary nebula. I. Radiation pressure in Lyman- $\alpha$ . *Astrophys. J.* 102, 402—428 (1945).

Chandrasekhar, S. and J. von Neumann: The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. II. The speed of fluctuations; dynamical friction; spatial correlations. III. The correlations in the forces acting at two points separated by a finite distance. IV. The stochastic variation of the force acting on a star. *Astrophys. J.* 97, 1—27 (1943); 99, 25—46, 47—53 (1944).

Chandrasekhar, S.: Dynamical friction. I. General considerations; the coefficient of dynamical friction. II. The rate of escape of stars from clusters and the evidence for the operation of dynamical friction. III. A more exact theory of the rate of escape of stars from clusters. *Astrophys. J.* 97, 255—262, 263—273; 98, 54—60 (1943).

Teil I von „The statistics . . .“ siehe dies. Zbl. 28, 285. Die Arbeiten behandeln das Problem der dynamischen Reibung in Sternsystemen. Sie kommt dadurch zustande, daß die einzelnen Sterne des Systems regellose Geschwindigkeiten haben. Die dadurch bedingte örtliche und zeitliche Variation des Kraftfelds der Eigengravitation wird diskutiert und ein Ausdruck für den Koeffizienten der dynamischen Reibung aufgestellt, der aus der Betrachtung der Häufigkeit naher Vorübergänge von zwei Sternen folgt. Für das große Sternsystem hat die dynamische Reibung wegen der großen Relaxationszeit keine Bedeutung, in relativ dichten Sternhaufen hat sie vor allem die Konsequenz, daß durch sie die Entweichungsmöglichkeit einzelner Sterne aus dem Haufen bedeutend herabgesetzt wird.

*F. Schmeidler.*

● Chandrasekhar, S.: Principles of stellar dynamics. Chicago, Ill.: University of Chicago Press 1942. X, 251 p. \$ 5,00.

Chandrasekhar, S. and Wasley Krogdahl: A note on the perturbation theory for distorted stellar configurations. *Astrophys. J.* 96, 151—154 (1942).

Chandrasekhar, S.: The dynamics of stellar systems. IX—XIV. *Astrophys. J.* 92, 441—642 (1940).

Teil I—XII s. dies. Zbl. 21, 381. Zusammengefaßt im oben zitierten Buch.

*G. Burkhardt.*

Chandrasekhar, S.: A statistical theory of stellar encounters. *Astrophys. J.* 94, 511—524 (1941).

Übertragung der Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Fokker-Planck-Gleichung auf Stellarstatistik.

*G. Burkhardt.*

Chandrasekhar, S.: New methods in stellar dynamics. Ann. New York Acad. Sci. 45, 133—161 (1943).

Chandrasekhar, S.: Stellar dynamics. Monthly Not. roy. astron. Soc. 105, 124—134 (1945).

Zusammenfassende Berichte mit Literaturangaben über: Sternbewegungen, Systeme mit differentiellen Bewegungen und Sternströme, Statistik des Gravitationsfeldes einer beliebigen Sternverteilung, zeitliche Auflösung von Sternhaufen und weiten Doppelsternsystemen. *G. Burkhardt.*

Garwick, Jan V.: Note on stellar systems with ellipsoidal velocity-distribution. Astrophys. Norvegica 3, 301—305 (1943).

Es wird bewiesen, daß für Sternsysteme mit ellipsoidischer Geschwindigkeitsverteilung die Verteilungsfunktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten die allgemeine Form  $\Psi(Q + \sigma(x, y, z, t))$  hat, wenn  $Q$  der Ausdruck eines Ellipsoids in den Geschwindigkeiten ist. *F. Schmeidler.*

Jehle, Herbert: Statistical hypotheses in stellar dynamics. Phys. Review, II. Ser. 70, 538—555 (1946).

Es wird eine statistische Theorie von Sternsystemen entwickelt, die annimmt, daß ähnlich wie in der Quantentheorie nicht jedes Element des Phasenraums beliebig dicht besetzt sein kann. Das bedingt einen Minimalabstand der Einzelsterne des Systems. Für die Wahrscheinlichkeit der Besetzung des Phasenraums ergibt sich ein Analogon zur Schrödingerschen Gleichung. *F. Schmeidler.*

Lindblad, Bertil: On the dynamics of stellar systems. Stockholms Observatoriums Annaler 13, Nr. 5, 32 S. (1940).

Untersuchung der Frage, ob die Grundgleichung der Stelldynamik Verteilungsfunktionen für Orte und Geschwindigkeiten der Sterne zuläßt, die mit der Poissonschen Gleichung verträglich sind, d. h. ob Systeme, die nur der eigenen Gravitation unterliegen, möglich sind. Das Problem wird für mehrere Spezialfälle, z. B. für sphärische oder rotationssymmetrische Systeme, auf gewisse Integralgleichungen zurückgeführt, denen die Potentialfunktion gehorchen muß. *F. Schmeidler.*

Lindblad, Bertil: Remarks on the dynamical theory of spiral structure. Stockholms Observatoriums Annaler 14, Nr. 1, 32 S. (1942).

Der Effekt kleiner störender Kräfte auf nahezu kreisförmige Bahnen in einem Sternsystem wird betrachtet und das Aussehen der gestörten Bahnen mit den Spiralarmen wirklicher Sternsysteme verglichen. *F. Schmeidler.*

● Banerji, A. C.: Recent advances in galactic dynamics. Lucknow University Studies, Nr. 15. Allahabad, India: Allahabad Law Journal Press 1942. IV, 113 p.

Zusammenfassende Besprechung verschiedener Theorien der Bildung von Spiralnebeln und des Sonnensystems. *F. Schmeidler.*

Gliese, W.: Abschätzungen des Kraftfeldes der galaktischen Rotation. Astron. Nachr. 272, 201—207 (1942).

Das galaktische Kraftfeld wird versuchsweise angesetzt als Summe des Feldes einer Zentralmasse und eines homogenen Rotationsellipsoids; einzelne Bahnen werden numerisch integriert. *F. Schmeidler.*

Lal, Brij Basi: On the theory of a spiral nebula. I. II. Proc. nat. Acad. Sci. India, Sect. A 12, 108—120 (1942); 13, 28—36 (1943).

Lal, Brij Basi: The arms of a spiral nebula in resisting medium. I. II. Proc. nat. Acad. Sci. India, Sect. A 13, 19—27, 165—170 (1943).

Lal, Brij Basi: Formation of the arms of a spiral nebula. Proc. nat. Acad. Sci. India, Sect. A 13, 179—183 (1943).

Diskussion der Bewegung eines Partikels nach der Ejektion aus einer rotierenden Masse sphärischer Gestalt unter dem Einfluß verschiedener Kräfte.



Betrachtet werden Gravitation, Reibungskräfte und rückerzeugende Kräfte. Es zeigt sich, daß unter verschiedenen Bedingungen Spiralen als Bahnform möglich sind.

*F. Schmeidler.*

García, Godofredo: Über das Gesetz der Dichte in Nebeln als Funktion der Entfernung. *Revista Ci.* 46, 3—11 (1944) = *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur.* Lima 7, 3—11 (1944) [Spanisch].

Genäherte Integration der Emdenschen Differentialgleichung in einem bestimmten Fall.

*F. Schmeidler.*

García, Godofredo: Allgemeine Gesetze der Variation der Dichte in Nebeln, die als zähe Flüssigkeiten, insbesondere auch als ideale Flüssigkeiten behandelt werden. *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur.* Lima 9, 221—265 (1946) [Spanisch].

García, Godofredo: Allgemeine und vollständige Kardinal- und Skalargleichungen der relativen Drehbewegung zäher kompressibler Flüssigkeiten. *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur.* Lima 9, 271—304 (1946) [Spanisch].

García, Godofredo: Die Fundamentalgleichungen der Hydrodynamik in verallgemeinerter Lagrangescher Form. *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur.* Lima 9, 304—329 (1946) [Spanisch].

Allgemeine Diskussion der hydrodynamischen Gleichungen. *F. Schmeidler.*

García, Godofredo: Bewegung eines stetigen Systems unter dem Einfluß der Schwerkraft allein. Anwendung auf Nebelflecke. *Revista Ci.* 45, 463—483 (1943) = *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur.* Lima 6, 135—155 (1943) [Spanisch].

Korrektur eines Vorzeichenfehlers in einer Arbeit von Levi-Civita (dies. Zbl. 12, 37).

*F. Schmeidler.*

Arrighi, Gino: Considerazioni sui moti lenti dei mezzi continui disgregati. *Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VII. Ser. 4, 473—476 (1943).

García, Godofredo: Die Verallgemeinerung der Gleichung von Lagrange und der Ungleichung von Sundman auf den Fall von mehr als drei Körpern. *Fac. Ing. Montevideo, Publ. Inst. Mat. Estadíst.* 1, 129—136 = *Bol. Fac. Ing. Montevideo* 3 (año 10), 177—184 (1946) [Spanisch].

Rosenblatt, A.: On the movement of a cosmic cloud. *Amer. J. Math.* 66, 268—280 (1944).

Rosenblatt, Alfred: Sur les fondements mathématiques de la méthode de résistivité dans la prospection électrique du sous-sol. *Revista Ci.* 41, 475—484 (1939) = *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur.* Lima 2, 145—154 (1939).

Nobile, V.: Sulla maniera di intendere e di trattare il problema della rotazione galattica. *Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VII. Ser. 4, 222—231 (1943).

Nobile, Vittorio: Sopra un gruppo di problemi astronomici connessi con quello della rotazione galattica. — La soluzione rigorosa in base ad un nuovo postulato. *Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VII. Ser. 4, 349—354 (1943).

Nobile, Vittorio: Il termine solare dell'aberrazione e la struttura del sistema planetario. *Atti Accad. Italia, Mem., Cl. Sci. fis. mat. natur.* 12, 25—49 (1942).

Silva, Giovanni: Il termine solare dell'aberrazione e la struttura del sistema planetario. *Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VII. Ser. 2, 967—975 (1941).

Chandrasekhar, S.: The formation of absorption lines in a moving atmosphere. *Reviews modern Phys.* 17, 138—156 (1945).

Ambarzumian, V.: On the scattering of light by the planetary atmospheres. *Astron. J. Soviet Union* 19, Nr. 5, 30—41 (1942) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Ambarzumian, V.: On the scattering and absorption in the atmospheres of planets. I. Leningradsk. gosudarst. Univ., učnye Zapiski 82 (Ser. mat. Nauk 11. Astron.) (Publ. [Trudy] Observ. Astron. Univ. Leningrad 12), 64—85 (1941) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Überholt durch spätere Arbeiten des Verf., dargestellt in: Kourganoff (dies. Zbl. 48, 201). *G. Burkhardt.*

Strömgen, B.: Tables of model stellar atmospheres (Model stellar atmospheres. I). Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 21, Nr. 3, 85 S. (1944).

Die Parameter sind: eff. Temperatur (5740—8500), eff. Schwerebeschleunigung, Häufigkeitsverhältnis Wasserstoff zu Metalle. Annahme: Kontinuierliche Absorption nur bedingt durch Wasserstoff und negatives Wasserstoffion. Tabellen für Gesamtdruck, Elektronendruck und Opazität. *G. Burkhardt.*

Milne, E. A.: The natural philosophy of stellar structure. Monthly Not. roy. astron. Soc. 105, 146—162 (1945).

Einige grundsätzliche Bemerkungen zu Eddingtons Theorie des inneren Aufbaus der Sterne. Diese beruht wesentlich auf der Annahme, daß verschiedene Größen im ganzen Stern konstant sind, vor allem  $\beta$  und  $k\eta$ . Diese Annahme führt nach Verf. unter gewissen Umständen zu Widersprüchen und ist daher nicht wörtlich aufzufassen; es wird gezeigt, daß Eddingtons Resultate richtig bleiben, wenn die genannten Größen zwar innerhalb des Sterns variabel sind, in den Formeln aber durch geeignet gewählte Zahlenkonstante ersetzt werden.

*F. Schmeidler.*

Hoyle, F.: On the integration of the equations determining the structure of a star. Monthly Not. roy. astron. Soc. 105, 23—29 (1945).

Alle bisher ausgeführten numerischen Integrationen der Gleichungen des inneren Aufbaus der Sterne begannen die Integration im Zentrum. Verf. gibt ein Verfahren, bei dem die Integration der äußeren Grenze des Sterns begonnen werden kann. Damit läßt sich die Anpassung der Lösung an die vorgegebenen Randbedingungen leichter ausführen.

*F. Schmeidler.*

Lebedinsky, A. I.: Structure of envelopes of novae. Astron. J. Soviet Union 23, 15—30 (1946) [mit russischer Zusammenfassg.].

Stationaritätsbedingung für Zahl der Atome in einem gegebenen Energiebereich eines Anregungszustandes gegebener Halbwertsbreite. Störungsrechnungsmethode für geringe Abweichung der Anregungsbedingungen vom thermodynamischen Gleichgewicht.

*G. Burkhardt.*

Jung, K.: Über das dreiaxige Erdellipsoid und seine Zufallswahrscheinlichkeit. Gerlands Beiträge Geophys. 59, 331—362 (1943).

Vening Meinesz, F. A.: Spannungen in der Erdkruste infolge von Polverschiebungen. Nederland. Akad. Wet., Verslag Afd. Natuurk. 52, 185—196 (1943) [Holländisch mit deutsch., franz. und engl. Auszug].

Verf. ermittelt die Spannungen, die infolge der Abplattung in der festen, elastisch gedachten Erdkruste von konstant angenommener Dicke entstehen, wenn die Kruste ihre Lage in bezug auf die Umdrehungsachse der Erde ändert. Es werden die Gleichgewichtsbedingungen in der als Kugelschale angenommenen Erdkruste bei Vernachlässigung der Biegungsspannung sowie die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen auf Grund des Hookeschen Gesetzes aufgestellt. Bei bekannter Abplattung der Erde sind die Gleichungen für Verschiebungen und Spannungen als Funktionen der Polabstandes angegeben, die weiter dazu benutzt werden, die Spannungen bei einer Verschiebung der Pole zu bestimmen. Mit Hilfe dieser Gleichungen werden die Verschiebungslinien in der Erdkruste angegeben, indem von den Theorien von M. T. Huber (Ann. de Physique, IV. Sér. 14, 153—163), R. v. Mises [Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1913, [582—592] und H. Hencky [Z. angew. Math. Mech. 4, 333—334 (1924)] über das



Eintreten plastischer Formänderung in elastischen Medien ausgegangen wird. — In einer Zeichnung wird das Netz dieser Verschiebungslinien bei unendlich kleiner Polverschiebung längs des Randmeridians für die Halbkugel mit dem Drehpol der Erdkruste als Mittelpunkt dargestellt und in einem weiteren Bild die ganze Erdoberfläche bei einer Drehung der Erdkruste um einen Winkel von  $70^\circ$  im Uhrzeigersinne um einen Drehpol in der Äquatorebene mit der geographischen Länge Null. Diese Abbildung zeigt eine bemerkenswerte Übereinstimmung des Netzes mit vielen großen topographischen Linien und ebenfalls mit den Schubrichtungen auf der Erdoberfläche. Wenn diese Übereinstimmung kein Zufall ist, was Verf. für kaum denkbar hält, muß angenommen werden, daß die Erdkruste zu irgendeiner Zeit eine derartige Bewegung, die sich noch allgemeiner als oben geschehen definieren läßt, ausgeführt hat, und daß sich dabei die Erdkruste in Blöcke gespalten hat. (Druckfehlerberichtigung: Das erste Glied der vorletzten Gleichung auf S. 191 soll heißen  $\sigma^2$ .)

*Gran Olsson.*

Schoenberg, E.: Zur Dynamik der Jupiteratmosphäre. *Astron. Nachr.* **273**, 113—123 (1942).

Kuznetsov, E. S.: Contribution to the problem of calculation of the field of radiation in an absorbing and scattering atmosphere for a given temperature distribution. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. **35**, 241—246 (1942).

Kuznetsov, E. S.: On approximate equations of transfer of radiation in a scattering and absorbing medium. *C. r. Acad. Sci. URSS*, n. Sér. **37**, 209—214 (1942).

Kuznecov, E. S.: Die vertikale Verteilung der Temperatur einer Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht. *Akad. Nauk SSSR., Trudy Inst. Teoret. Geofiz.* **1**, 3—94 (1946) [Russisch].

Dufour, L.: Sur les variations bariques et thermiques de l'atmosphère. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **29**, 374—380 (1943).

Der Temperatur- und Druckaufbau einer Luftsäule ist durch die statische Grundgleichung, d. h. durch die Annahme eines statischen Gleichgewichtszustandes, beschrieben. Es wird angenommen, daß unter dem Einfluß eines Advektionsvorganges in jeder Höhe Änderungen der Dichte, des Querschnittes und der vertikalen Ausdehnung der betrachteten Luftsäule eintreten, die zunächst eine Störung des Gleichgewichtes bedingen, und daß sich hieraus dann ein neuer Gleichgewichtszustand entwickelt, indem sich die Dichte den geänderten Druckverhältnissen anpaßt, aber auch wieder neue Querschnitts- und Dickenänderungen eintreten. Hierfür werden allgemeine Formeln aufgestellt. In einer späteren Untersuchung soll nachgewiesen werden, daß diese die von anderen Autoren früher gegebenen Formeln in sich schließen.

*F. Möller.*

Ertel, H.: Der Turbulenz-Wärmestrom in der Atmosphäre und das Entropieprinzip. *Meteorolog. Z.* **60**, 246 (1943).

Der Aufsatz enthält eine nähere Begründung dafür, daß bei der Widerlegung des Schmidtschen Wärmestromes mittels des Entropieprinzips [*Meteorolog. Z.* **59**, 250—253 (1942)] vom Verf. nicht eine Zunahme der Gesamtentropie des turbulenten Systems gefordert worden ist, sondern nur eine Zunahme desjenigen Anteils der Entropie des gesamten Systems, der durch den irreversiblen Turbulenzwärmestrom hervorgerufen ist. Die Entropieänderung einer Luftmasse setzt sich zusammen aus (1) den Wirkungen von Wärmequellen (z. B. Strahlung), (2) der Wärmeproduktion irreversibler Prozesse, beide im Inneren der Masse, sowie (3) der Konvergenz des Wärmestromes durch die geschlossene Oberfläche  $F$ . Dieser dritte Anteil wird in Beziehung gesetzt zur Entropieänderung in der Umgebung der betrachteten Masse, die durch den gleichen Wärmestrom hervorgerufen wird. Die Summe dieser beiden Entropieänderungen, die in und außerhalb der betrachteten Masse infolge des turbulenten Wärmestromes auftreten, muß



größer als 0 sein. Aus dieser Bedingung folgt dann, daß das skalare Produkt des Wärmestromes  $\mathfrak{B}$  und des Temperaturgradienten  $\text{grad } T$  negativ sein muß, oder daß der Wärmestrom grundsätzlich in Richtung des Temperaturgefälles geht. Er geht dann also nicht grundsätzlich in Richtung des Gefälles der potentiellen Temperatur, wie es W. Schmidts Ableitung verlangt. *F. Möller.*

Ertel, H.: Die Westwindgebiete der Troposphäre als Instabilitätszonen. *Meteorolog. Z.* 60, 397—400 (1943).

Schmitz, H. P.: Zur Abweichung vom geostrophischen Wind. *Meteorol. Z.* 61, 151—158 (1943).

● Golaz, Charles: Étude sur la variation de la vitesse du vent en fonction de l'altitude. Diss. Univ. Genf, 1940. 85 p.

Schweiz, M.: Die Bestimmung der Vertikalkomponenten der Geschwindigkeit einer sich bewegenden Luftmasse mittels der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geograf. geofiz.* 1941, 467—473 (1941) [Russisch mit deutsch. Zusammenfassg.].

Stockmann, W.: Horizontale Unruhe der Meeresströmungen, aufgefaßt als Turbulenzerscheinung großen Stils. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geograf. geofiz.* 1941, 475—486 (1941) [Russisch mit deutsch. Zusammenfassg.].

Haurwitz, B.: The applications of mathematics in meteorology. *Amer. math. Monthly* 50, 77—84 (1943).

## Autorenverzeichnis.

- Aardenne-Ehrenfest, T. van 130.  
 Abbott, J. C. 328.  
 Abe, Makoto 390.  
 Abellanas, Pedro 323, 325, 326.  
 Abramescu, N. 367, 369.  
 Acad. Sci. USSR 220th Anniversary 13.  
 Achiezer, N. I. 169, 260.  
 Ackeret, J. 11.  
 Adati, Tyuzi s. Kentaro Yano 386.  
 Agnew, Ralph Palmer 159, 160, 161, 170.  
 Agnew, R. P. and J. D. Hill 160.  
 Agostinelli, Cataldo 462.  
 Aitken, A. C. 31.  
 Alaci, V. 145, 178, 333.  
 Alaoglu, Leonidas and J. H. Giese 343.  
 Albert, A. A. 33, 40, 50.  
 Albert, G. E. 170.  
 Albert, G. E. and L. H. Miller 170.  
 Albuquerque, J. 19, 123.  
 Aleksandrov, P. S. 13.  
 Aleksandrov, P. S. und A. N. Kolmogorov 13.  
 Alenitzyn, G. 208.  
 Alexandroff, A. D. 135.  
 Alexandroff, Paul 408.  
 Alexits, Georges 170.  
 Allen, E. S. 18.  
 Allen, Edward S. and Harvey Diehl 24.  
 Allen, H. S. 155, 276.  
 Allendoerfer, Carl B. and André Weil 381.  
 Almeida Costa, A. 76, 83.  
 Akhiezer, N. 259.  
 Amaldi, U. 16.  
 Amato, V. 33.  
 Ambarzumian, B. 436.  
 Ambarzumian, G. A. 290.  
 Ambarzumian, V. 465, 466.  
 Ambrose, Warren 269.  
 Amerio, Luigi 249.  
 Amici, Andrea 30.  
 Amodeo, F. 48.  
 Ancochea, Germán 52.  
 Anderson, R. D. 318.  
 Anderson, R. L. 309.  
 Anderson, T. W. 293.  
 Anderson, T. W. s. D. S. Villars 304.  
 Andersson, Walter 253.  
 Andrade, E. N. da C. 9.  
 Andreoli, Giulio 309.  
 Andriasi, G. L. 1.  
 Anghelutza, Th. 57.  
 Aoki, Tosio 265.  
 Apéry, Roger 86.  
 Appert, Antoine 397.  
 Aravjiskaja, E. N. 245.  
 Archibald, R. C. 15.  
 Archibald, Raymond Clare 13.  
 Archibald, Ralph G. 103.  
 Arens, Richard 127, 269, 271.  
 Arens, Richard F. 397.  
 Arskin, G. 136.  
 Arf, Cahit 42.  
 Arghiriade, E. 377, 352, 368.  
 Arley, Niels 292.  
 Arley, Niels and Vibeke Borchsenius 292.  
 Armanini, A. 346.  
 Armellini, G. 8.  
 Arnold, B. H. 269, 395.  
 Aroian, Leo A. 303.  
 Aronszajn, N. and G. H. Hardy 142.  
 Arpiarian, Noubat 171.  
 Arrighi, Gilio 465.  
 Artin, Emil 448, 142, 199, 325.  
 Artin, Emil and George Whaples 76, 83.  
 Artin, Emil, Cecil J. Nesbitt and Robert M. Thrall 77.  
 Artzy, Rafael 331.  
 Atkins, H. P. 208.  
 Aubert, Karl E. 84, 152.  
 Augé, Juan 201, 278.  
 Aumann, Georg 400.  
 Austen, A. E. W. and H. Pelzer 315.  
 Baber, T. D. H. and Leonid Minsky 196.  
 Babin, José 153.  
 Bachiani, R. 332.  
 Bachmann, Friedrich 325.  
 Bachmann, W. K. 316.  
 Backer, S. M. de 416.  
 Badell, Enrique and Mario O. González 214.  
 Baer, Reinhold 71, 72, 298, 322, 323, 325.  
 Bagehi, Haridas 360.  
 Bagenov, G. 460.  
 Baidaff, B. I. 337.  
 Bailey, W. N. 18.  
 Baillie, Donald C. 319.  
 Baker, G. A. 299, 309.  
 Baker, H. F. 14, 322.  
 Balanzat, Manuel 143, 396.  
 Balanzat, Manuel s. Félix Eduardo Herrera 143.  
 Baldwin, Elizabeth M. 295.  
 Ballieu, Robert 73, 163.  
 Balseiro, José A. 245.  
 Bambah, R. P. 85, 102.  
 Bambah, R. P. and S. Chowla 34.  
 Banach, Stefan (Nachruf) 13.  
 Baneroff, T. A. 192.  
 Band, William 446.  
 Banderet, P. P. 454.  
 Banerjee, D. P. 194, 196, 308.  
 Banerjee, K. S. s. K. R. Nair 315.  
 Banerjee, Kalishankar s. S. N. Roy 301.  
 Banerji, A. C. 464.  
 Bang, Thøger 151, 260.  
 Bankier, J. D. and W. Leighton 163.  
 Banning, J. 325.  
 Bannon, J. 437.  
 Barajas, Alberto 445.  
 Barankin, E. W. 329.  
 Barakat, B. 394.  
 Barbitian, D. 59, 329.  
 Barzmann, V. s. A. Einstein 443.  
 Barker, Charles B. 87.  
 Barnard, G. A. 305.  
 Barnes, John L. s. Murray F. Gardner 248.  
 Barsotti, I. 81.  
 Bartels, R. C. F. 419.  
 Basoco, M. A. 99, 199.  
 Bass, Jean 292, 293, 450.  
 Bass, Jean, Georges Dédant et Philippe Wehrle 292.  
 Bateman, H. 1, 12, 194, 247, 248.  
 Baten, William Dowell 312.  
 Batiele, Edgar 294.  
 Batschelet, Eduard 55, 56.  
 Bayard, Marcel 183, 251, 255.  
 Beall, G. 317.  
 Beaman, Elizabeth 55.  
 Beck, Guido 451.  
 Beckenbach, E. F. 144, 149.  
 Beckenbach, E. F. and R. H. Bing 149.  
 Becker, O. 19.  
 Beeger, N. G. W. H. 84.  
 Behrend, F. A. 103, 343.  
 Belinfante, F. J. 450.  
 Bell, Eric Temple 5, 7, 9, 13, 19, 68, 94, 95, 96.  
 Bell, P. O. 365, 372.  
 Bellman, Richard 31, 147, 171, 177, 184, 257.  
 Berenda, Carlton W. 440.  
 Bergmann, P. G. 440.  
 Bergman, S. et J. Marcinkiewicz 242.  
 Bergman, Stefan 241, 242.  
 Bergman, Stefan and Menahem Schiffer 242.  
 Bergström, Harald 287.  
 Berjman, Elena 316.  
 Bermant, A. 219.  
 Bernardelli, Harro 320.  
 Bernstein, B. A. 63.  
 Bernstein, B. A. s. Alfred L. Foster 66.  
 Bernstein, S. 167, 168, 177, 354.  
 Bernstein, S. N. 14, 282.  
 Bers, Lipman 244.  
 Besicovitch, A. S. 224.  
 Beth, E. W. 19, 191.  
 Beumer, M. G. 5.  
 Bhabha, H. J. 451.  
 Bhalotra, Yashpaulraj 48.  
 Bhalotra, Y. and S. Chowla 48.  
 Bhargava, R. P. 308.  
 Bhattacharya, K. N. 313.  
 Bhattacharyya, A. 297, 313.  
 Bickley, W. G. and N. W. McLachlan 197.  
 Bieberbach, Ludwig 199.  
 Biernacki, M. 56, 207, 208.  
 Biezeno, C. B. and J. J. Koch 418.  
 Biggeri, Carlos 226.  
 Bilo, J. 336.  
 Bing, Kurt 23.  
 Bing, R. H. 144, 403, 404, 405.  
 Bing, R. H. s. E. F. Beckenbach 149.  
 Birch, R. H. 192.  
 Birkhoff, Garrett 58, 68, 79, 126, 327.  
 Birkhoff, Garrett s. George D. Birkhoff 58.  
 Birkhoff, George, D. 13, 17, 327.  
 Birkhoff, George David (Nachruf) 14.  
 Birkhoff, George D. and Garrett Birkhoff 58.  
 Birkhoff, G. D. and D. C. Lewis 416.  
 Birkhoff, George D. s. Julian L. Coolidge 17.  
 Birnbaum, Z. W. 296.  
 Bissinger, B. H. 163.  
 Bissinger, B. H. and F. Herzog 163.  
 Bissinger, B. H. s. F. Herzog 163.  
 Blackwell, D. and M. A. Girshick 290.  
 Blanc, Charles 248, 252.  
 Blanusa, Danilo 169.  
 Bliss, C. I. 297.  
 Bloch, Léon 452.  
 Blumberg, Henry 19.  
 Blumenthal, Leonard M. 33, 123, 327, 398.  
 Boaga, C. 30.  
 Boas jr., Ralph P. 147, 153, 200, 221, 222, 223.  
 Boas jr., R. P. and M. Kac 250.  
 Boas jr., R. P. and Harry Pollard 171.  
 Boas jr., R. P. and A. C. Schaeffer 222.  
 Bochner, S. 242, 243, 272, 383.  
 Bochner, S. and R. S. Phillips 272.  
 Bochar, D. A. 22.  
 Bock, H. 346.  
 Bockstein, M. 409.  
 Bodiu, Georges 450.  
 Bodlund, C. 344.  
 Bolza, Oskar (Obituary) 14.  
 Bompiani, E. 353, 388, 393.  
 Bonnier, Gert 305.  
 Borchsenius, Vibeke s. Niels Arley 292.  
 Bordini, Piero Giorgio 192.  
 Borel, Émile 132.  
 Borel, Émile et André Chéron 293.  
 Borgen, S. 256.  
 Bognis, F. 434.  
 Born, M. 18.  
 Born, M. and H. W. Peng 458.  
 Bors, C. 333.  
 Borsuk, Karol 400.  
 Bortolotti, Ettore 8.  
 Bosanquet, L. S. 136, 156, 182.  
 Bose, Chameli 299.  
 Bose, C. and A. K. Gayen 307.  
 Bose, Purnendu 298, 299, 308.  
 Bose, Purnendu and S. Raja Rao 296.  
 Bose, Purnendu s. S. N. Roy 308.  
 Bose, Raj Chandra 314.  
 Bourgin, D. G. and C. W. Mendel 171.  
 Bosworth, B. C. L. 316.  
 Botella Raduan, Francisco 200.  
 Bottama, O. 196.  
 Boulanger, J. 50.  
 Bouligand, Georges 17, 18, 20, 103, 139, 361.  
 Bourbaki, N. 68.  
 Bourgin, D. G. 39, 264.  
 Bourion, G. 152.  
 Bouvaist, Robert et Victor Thébaud 336, 338.  
 Boyer, Carl B. 2, 3, 9, 10.  
 Braconnier, Jean 261.  
 Bradshaw, J. W. 162.  
 Brandama, L. 346.  
 Brandt, H. 39.  
 Bransch, Frederike 9, 17.  
 Bråtlid, F. and P. Serrescu 25.  
 Brauer, Alfred 87, 98, 103.  
 Brauer, Alfred and Gertrude Ehrlich 47.  
 Brauer, Richard 68, 69, 78.  
 Brekhovskich, I. M. 444.  
 Brenke, W. C. 193.

- Brikmanis, A. I. 460.  
 Broderick, T. S. and E. Schrödinger 282.  
 Brodetsky, S. 9.  
 Broglie, Louis de 17, 450.  
 Bromberg, P. V. s. Ya. Z. Cypkin 57.  
 Bronkhorst, P. 88.  
 Bronowski, J. and J. Neyman 294.  
 Bronstein, Daniel J. 20.  
 Brookner, R. J. 302.  
 Brouwer, Dirk 461.  
 Brouwer, Dirk and G. M. Clemence 461.  
 Brown, Boilev and Neal H. McCoy 77.  
 Brown, B. H. 286.  
 Brown, Ferdinand L. 66.  
 Brown, L. M. 298, 345.  
 Bruck, R. H. s. T. L. Wade 43.  
 Bruck, Richard H. 43, 80.  
 Bruck, Richard H. and T. L. Wade 43.  
 Bruins, E. M. 5, 45, 331.  
 Bruijn, N. G. de 27, 56.  
 Brulin, O. s. S. Hjalmar 456.  
 Brun, Viggo 103.  
 Buch, Kai Rander 135.  
 Buchholz, Herbert 435.  
 Buchstab, A. 97.  
 Buck, R. Creighton 158, 224.  
 Buck, R. Creighton and Harry Pollard 158.  
 Buhl, A. 16, 17.  
 Bula, Clotilde A. 196.  
 Burekhardt, Johann Jakob 459.  
 Burke, John C. 66.  
 Burkill, J. C. 16, 17.  
 Burr, I. W. 296.  
 Burrau, Øyvind 316.  
 Burton, Harry Edwin 5.  
 Busemann, Herbert 139.  
 Bushkovitch, A. V. s. J. A. Shohat 147.  
 Byrne, Lee 63.  
 Byrner, Ralph 426.  
 Byuler, G. A. 197.  
 Cabannes, Henri 122, 162.  
 Cahtauri, A. I. 393.  
 Caligo, D. 199.  
 Călugăreanu, Georges 45, 213.  
 Călugăreanu, Georges et Gh. Th. Gheorghiu 366.  
 Cameron, Robert H. 255, 275.  
 Cameron, R. H. and W. T. Martin 275, 291.  
 Camm, G. L. 447.  
 Camp, Burton H. 295.  
 Cămpăn, Florica 360.  
 Campbell, Alan D. 58.  
 Campbell, Robert 198.  
 Campbell, N. R. and V. J. Francis 293.  
 Candido, Giacomo 88.  
 Candy, Albert L. 87.  
 Cansado, Enrique 146.  
 Capelli, Pedro s. B. Levi 5.  
 Caracciolo, Maria Serra 50.  
 Carathéodory, Constantin 12, 14, 15.  
 Carbon, C. B. de 431.  
 Carleman, Torsten 15, 260, 255.  
 Carlton, A. George 305.  
 Carmody, Francis J. 6.  
 Carpenter, A. F. 375.  
 Carslaw, H. S. and G. H. Hardy 18.  
 Carslaw, H. S. and J. C. Jaeger 248.  
 Cartan, Élie 16, 331.  
 Carter, G. W. 433.  
 Cartwright, M. L. 18.  
 Casaux, G. 341.  
 Castoldi, L. 385.  
 Caton, W. B. and E. Hille 253.  
 Cattaneo, Paolo 146, 293, 333.  
 Cattermole, J. 449.  
 Catunda, Omar 278.  
 Cavallaro, V. G. 333, 336.  
 Cavallaro, Vincenzo G. 332, 333, 336.  
 Cchakaja, D. G. 6.  
 Čebyšev, P. L. s. S. N. Bernstein 14.  
 Čelidze, V. G. 190.  
 Cernuschi, Felix, and Ernesto Saleme 239.  
 Cerrillo, Manuel 432.  
 Cesari, Lamberto 143, 190.  
 Cesco C. U., S. Chandrasekhar and J. Sahade 463.  
 Chabauty, Claude 120, 121.  
 Chakrabarti, Satish Chandra 26, 30.  
 Chandra Sekar, C. 312.  
 Chandra Sekar, C. and Mary G. Francis 303.  
 Chandrasekhar, S. 463, 464, 465.  
 Chandrasekhar, S. and Wasley Krogdahl 463.  
 Chandrasekhar, S. and J. von Neumann 463.  
 Chandrasekhar, S. s. C. U. Cesco 463.  
 Chandrasekharan, K. 59, 159, 190.  
 Chang, Su-Cheng 370.  
 Chang, T. S. 451, 454.  
 Chant, C. A. 8.  
 Chaplygin, S. A. (Nachruf) 14.  
 Chaplygin, S. A. (Biography) 14.  
 Chapman, S. 10.  
 Chapman, S. and E. T. Whittaker 14.  
 Chapman, S. s. D'Arcy W. Thompson 18.  
 Charadze, A. K. 7.  
 Chariar, V. R. s. S. Prasad 92.  
 Charrueau, André 355, 361, 362.  
 Chatley, Herbert 1, 3.  
 Chaundy, T. W. 111.  
 Čhelidze, V. G. 190.  
 Chen, Kien-Kwong 156.  
 Cheng, Kai-Chia 440.  
 Cheng, K. C. s. K. C. Wang 449.  
 Cheng, Tseng-Tung 34, 283, 299.  
 Chern, S. S. 381.  
 Chern, Shing-Shen 381, 382, 392, 414.  
 Cherniss, Harold 5.  
 Chéron, André s. Émile Borel 293.  
 Cherubino, Salvatore 31.  
 Chevalley, Claude 36, 69, 83.  
 Chevalley, Claude and Hsio-Fu Tuan 81.  
 Chien, W. Z. s. J. L. Synge 421.  
 Chien, Wei-Zang 420.  
 Chien, Wei-Zang s. Theodore von Kármán 424.  
 Chlodovsky, L. 150.  
 Chogoshvili, G. 408.  
 Choquet, Gustave 130, 137, 402.  
 Chow, H. C. 182.  
 Chowla, S. s. R. P. Bam-bach 34.  
 Chowla, S. s. Y. Bhalotra 48.  
 Chowla, S. 48, 313, 314.  
 Christie, D. E. 413.  
 Chu, Fu-Tsu 34.  
 Chu, Liang-Pi 182.  
 Chung, K. L. s. P. L. Hsu 293.  
 Chung, Kai-Lai 283.  
 Chung, Kai-Lai and Lietz C. Hsu 283.  
 Church, Alonzo 20.  
 Churchill, Ruel V. 248.  
 Chwalla, E. 418.  
 Chwistek, L. 124.  
 Chwistek, L. B. 124.  
 Clamberlini, Corrado 333.  
 Clamberlini, C. and A. Marengoni 335.  
 Cioranescu, Nicolas 145, 147.  
 Cisotti, Umberto 45, 233.  
 Civin Pauls. I. H. Roberts 399.  
 Civin, Paul 410.  
 Clark, C. E. 409.  
 Clausen, A. H. 333.  
 Clemence, G. M. s. Dirk Brouwer 461.  
 Climescu, Al. 394.  
 Clippinger, R. F. 33.  
 Cobb, R. H. 334.  
 Cochran, W. G. 316.  
 Coe, C. J. 144.  
 Cohen, Abraham 313.  
 Cohen, I. S. 36, 70.  
 Cohen, I. S. and Irving Kaplansky 70.  
 Cohen, I. S. and Seidenberg 70.  
 Cohen, L. W. 280.  
 Colmez, Jean 395.  
 Colombani, Antoine 433.  
 Colthurst, H. Riversdale 80.  
 Colucci, Antonio 139, 231.  
 Combes, Bernard 351.  
 Comenetz, George 352.  
 Comessatti, A. 39.  
 Comét, S. 331.  
 Comrie, L. J. and H. O. Hartley 295.  
 Comrie, L. J. s. Catherine M. Thompson 295.  
 Comrie, P. 16.  
 Conkwright, N. B. 50.  
 Consoli, T. 288.  
 Constantinescu, G. G. 342.  
 Constantinescu, I. 432.  
 Conte, Luigi 7, 54.  
 Cooley, John C. 20.  
 Coolidge, J. L. 10, 17, 321.  
 Cooper, J. L. B. 257.  
 Coppernicus, Nicolaus 8.  
 Corben, H. C. 449.  
 Cornacchia, Giuseppe 88.  
 Cornfield, Jerome 293.  
 Cornish, E. A. 313.  
 Corput, J. G. van der 46, 112.  
 Corput, J. G. van der and H. J. A. Duparc 41.  
 Correnti, Salvatore 94.  
 Corson, E. M. 454.  
 Cossar, J. 257.  
 Costa de Beauregard, Olivier 416, 432, 440, 440.  
 Costăchescu, C. V. 346.  
 Cotlar, Mischa 24, 59.  
 Cotlar, Mischa s. B. Levi 5.  
 Cotlar, M. s. J. C. Vignaux 201, 250.  
 Couffignal, Louis 57.  
 Courant, Richard and Herbert Robbins 123.  
 Court, Louis M. 301.  
 Court, N. A. 334, 337, 338, 340, 345.  
 Coutrez, Raymond 450.  
 Cowden, Dudley J. 308.  
 Cowling, V. F. 202.  
 Cowling, V. F., W. Leighton, and W. J. Thron 164.  
 Cox, Getrude M. 313.  
 Coxeter, H. S. M. 328, 342, 416, 443.  
 Craig, Allen T. 307, 308.  
 Craig, Cecil C. 295.  
 Crain, K. W. 334.  
 Cramer, H. 430.  
 Cramér, Harald 305, 320.  
 Crathorne, A. R. 17.  
 Crawford, L. 11.  
 Cromwell, Paul C. 248.  
 Crow, James F. 297.  
 Cuesta, N. 126.  
 Cuesta Dutari, Norberto 126.  
 Čufistova, A. M. 232.  
 Cupr, K. 417.  
 Curry, Haskell B. 22.  
 Curtiss, D. R. 313.  
 Curtiss, J. H. 295, 301, 312.  
 Cypkin, Ya. Z. and P. V. Bromberg 57.  
 Dalzell, D. P. 153, 170.  
 Dancoff, S. M. s. W. Pauli 456.  
 Dancoff, S. M. s. R. Serber 456.  
 Dantzig, D. van 283.  
 Damaio, Georges 284.  
 Datta Majumdar, S. 443.  
 Daum, J. A. 198.  
 Daus, P. H. 344.  
 Davenport, H. 119, 120.  
 Davenport, H. and H. Heilbronn 119.  
 Davenport, H. and K. Mahler 120.  
 Davenport, H. s. I. G. van der Corput 112.  
 Davidson, Ake 320.  
 Davis, C. S. 161.  
 Davis, Harold T. 310, 311, 321.  
 Day, Mahlon M. 58, 125, 158, 394.  
 Dean, W. R. 214.  
 Deans, J. 437.  
 De Baggis, Henry F. 328.  
 DeCicco, John 356, 358, 359, 377, 378, 379, 380.  
 DeCicco, John s. Edward Kasner 356, 357, 358, 359, 360, 379, 380.  
 Dedeant, G. et Ph. Wehrli 292.  
 Dedeant, Georgess. Jean Bass 292.  
 Dedeker, Paul 240, 410.  
 Dehn, Max 5.  
 Dehn, M. and E. D. Heilinger 9.  
 Delange, Hubert 46, 259.  
 Delange, Hubert et Christian Pauc 280.  
 Delaporte, Pierre 312.  
 Delaunay, B. 112.  
 Deifeld, Albert 84.  
 Delone, B. N. 112.  
 Delone, B. N. und D. K. Faddeev 114.  
 Demelenne, J. 298.  
 Deming, W. Edwards 315.  
 Denjoy, A. 124.



- Denjoy, Arnaud 124, 203, 234, 406.  
Dennis, Joseph J. and H. S. Wall 105.  
Depunt, J. 440.  
Derkson, J. B. D. 311.  
Despujols, Pierre 417.  
Destriau, G. 436.  
Deuker, Ernst-August 427.  
Devarāja •1.  
Dexter, Glenn Edward 20.  
Diekson, Leonard Eugene •46.  
Diehl, Harvey s. Edward S. Allen 24.  
Dienes, Z. P. 130.  
Dieudonné, Jean 72, 82, 138, 263, 269, 395.  
Dieulefait, C. 285.  
Dieulefait, C. E. 288, 289, 303.  
Dilworth, R. P. 61.  
Dilworth, R. P. s. M. Hall 61.  
Dines, Lloyd L. 41.  
Dinghas, Alexander 148.  
Dingle, Herbert 15.  
DiPaola, J. s. S. Sherman 54.  
Dirac, P. A. M. 440, 451, 455.  
Dive, P. 432.  
Divisia, F. 295.  
Dixmier, Jacques 279.  
Dixon, Wilfrid J. 310.  
Djanelidze, G. J. 419.  
Dmitriev, N. and E. Dynkin 33.  
Dobrescu, A. 332.  
Dodd, Edward L. 297.  
Dodge, H. F. 301.  
Doetsch, Gustav •247.  
Dolaptschiew, Bl. 356.  
Donder, Th. de 451.  
Donder, Th. de et J. Géhéniau 450.  
Doob, J. L. 289.  
Doorenbosch, G. 335.  
Dor, Léopold 285.  
Doss, Raouf 396, 397.  
Doss, S. H. 194.  
Dotterer, Ray H. 19.  
Doubrovsky, W. 247.  
Dougall, John 16.  
Douglas, Jesse •131, 341.  
Doyle, T. C. 45.  
Drach, Jules 99.  
Dresden, Arnold 38, 145.  
Dresden, M. s. Wilfred Kaplan 459.  
Droste, J. 383.  
Duarte, F. J. 13, 460.  
Dubiago, A. D. 462.  
Dubisch, R. 40.  
Dubnov, J. et V. Ivanov 33.  
Dubnov, Ya. 46.  
Dubreil, Paul •63, 69.  
Duchon, R. et M. Morand 432.  
Duffin, R. J. 256.  
Duffin, R. J. and Robert S. Pate 61.  
Duffing, R. J. and A. C. Schaeffer 209.  
Dufour, L. 467.  
Dufresnoy, Jacques 156, 225, 226, 231, 233.  
Dufresnoy, Jacques s. Jacqueline Ferrand 233.  
Dugas, René 9, 12 13.  
Duncan, W. J. 36, 37.  
Dunford, Nelson and M. H. Stone 65.  
Duparc, H. J. A. s. J. G. van der Corput 41.  
Durfee, William H. 41.  
Durham, R. L. 347.  
Dürr, Karl 12.  
Dvoretzky, Aryeh 208.  
Dvorkine, B. 212.  
Dwyer, Paul S. 308.  
Dyer-Bennet, John 77.  
Dyakin, E. s. N. Dmitriev 33.  
Dyson, F. J. 122, 300.  
Easterfield, Thomas E. 26.  
Eaton, J. E. 81.  
Eckmann, Beno 398.  
Eddington, Arthur S. 449.  
Efimoff, N. 361.  
Egan, M. F. 36.  
Eckermann, E. 153.  
Ehresmann, C. 414.  
Ehrlich, Gertrudes. Alfred Brauer 47.  
Eichler, Martin 39.  
Eilenberg, Samuel and Deane Montgomery 402.  
Einstein, Albert 441.  
Einstein, A. and V. Bargmann 443.  
Einstein, A. and W. Pauli 441.  
Einstein, A. and E. G. Straus 441, 443.  
Eisenhart, C. s. Frieda S. Swed 305.  
Ellis, H. W. s. R. L. Jeffery 136.  
Emch, A. 343.  
Ephraïmowitch, V. A. 409.  
Epstein, Paul S. 18.  
Erdélyi, A. 195, 197, 198, 252.  
Erdélyi, A. and I. M. H. Etherington 25.  
Erdős, P. 55, 131, 178, 203, 348.  
Erdős, Paul and Irving Kaplansky 28, 29.  
Erdős, P. and G. Szegő 55.  
Erdős, P. and A. Tarski 126.  
Erhardt, Rudolf von and Erika von Erhardt-Siebold 5.  
Erhardt, Rudolf von s. Erika von Erhardt-Siebold •7.  
Erhardt-Siebold, von and Rudolf von Erhardt •7.  
Erhardt-Siebold, Erikavon and Rudolf von Erhardt •7.  
Erhardt-Siebold, Erika von s. Rudolf von Erhardt 5.  
Erim, Kerim 146.  
Ertel, H. 467, 468.  
Escamard, V. d' 333.  
Escott, Edward Brind 87.  
Esseen, Carl-Gustav 287.  
Estermann, T. 109, 120.  
Etevan Ciriquian, J. 123.  
Etherington, I. M. H. 25, 80.  
Etherington, I. M. H. s. A. Erdélyi 25.  
Ettlinger, M. C. 403.  
Eulerus, Leonhardus •11.  
Evans, A. W. 319.  
Everett, C. J. 62, 63, 69.  
Everett jr., C. J. 76.  
Everett, C. J. and H. J. Ryser 280.  
Everett, C. J. and S. Ulam 63.  
Eves, H. 335.  
Eyraud, H. 125, 130, 285.  
Fabricius-Bjerre, Fr. 329, 345.  
Facciottl, G. 30.  
Factor Stencils s. D. N. Lehmer. •103.  
Faddeev, D. K. s. B. N. Delone 114.  
Fadle, J. 427.  
Falkovich, S. V. 420.  
Fan, Ky 248, 276, 284, 288, 396, 405.  
Fano, G. 344.  
Fantappiè, Luigi 18.  
Fantappiè, L. •278, 278.  
Faure, Robert 450.  
Fayet, J. 10.  
Federer, Herbert 140, 141.  
Federhofer, Karl 417.  
Fehr, H. 16.  
Fejes, L. 348.  
Feld, J. M. 379.  
Feldheim, E. 194.  
Feller, W. 287.  
Féraud, Lucien 153, 284, 285, 297.  
Ferguson, Allan 9.  
Fernandez Avila, Francisco Javier 353.  
Fernández Baños, O. 297.  
Fernandez Toral, M. 24.  
Ferrand, Jacqueline 233.  
Ferrand, Jacqueline et Jacques Dufresnoy 233.  
Ferrari, Esther 394.  
Ferrari, Maria Angélica 254.  
Fessenkoff, B. 462.  
Fessenkoff, B. G. 462.  
Festinger, Leon 304.  
Fettis, H. E. 332.  
Feys, R. •20.  
Fialkow, Aaron 387.  
Ficken, Frederick A. 262.  
Fierz, Markus 454, 456.  
Fierz, M. und G. Wentzel 458.  
Filonenko-Borodich, M. M. 171.  
Finan, E. J. 87.  
Fine, N. J. and Ivan Niven 294.  
Finetti, de •282.  
Finney, D. J. 28.  
Finsler, P. 286.  
Fischer, C. H. 309, 320.  
Fisher, R. A. 27, 296, 301, 307, 315.  
Fitch, Frederic B. 23.  
Fite, W. Benjamin 17.  
Fitting, F. 87.  
Fleckenstein, J. O. 12, 460.  
Flexner, William W. 411.  
Flint, H. T. 449.  
Floyd, E. E. 401.  
Flügge, S. 456.  
Fock, V. A. 444.  
Fon, Te-Chih 363.  
Föppl, Ludwig 418.  
Ford, W. B. 15.  
Forsyth, Andrew Russell (Nachruf) 15.  
Forsythe, Alexandra 77.  
Forsythe, Alexandra and Neal H. McCoy 77.  
Fort, Tomlinson 145.  
Fortet, Robert 260.  
Foster, Alfred L. 66.  
Foster, Alfred L. and B. A. Bernstein 66.  
Foster, Malcolm 360.  
Foulkes, H. O. 35.  
Fox, Ralph H. 412, 414.  
Fox, R. H. 413.  
Fraga Torrejon, E. de 309.  
Fralle, Arturo 145.  
Fralle Ovejero, A. 145.  
Frajese, Attilio 5.  
Fraenkel, Adolf •123.  
Fraenkel, Abraham Adolf 124.  
Francis, V. I. s. N. R. Campbell 293.  
Francis, Mary G. s. C. Chandra Sekar 303.  
Fraenkel, E. 317.  
Frank, Evelyn 53, 166.  
Frankl, F. 415.  
Franklin, Philip •123, 143.  
Fraser, W. C. G. 259.  
Frazier, H. 149.  
Fréchet, Maurice 283, 285, 293, 294, 297, 305, 307, 308, 396.  
Fremberg, N. E. 455.  
Frenkel, Yanny 396.  
Freudenthal, Hans 400, 407.  
Friedrichs, K. O. •424.  
Frink jr., Orrin 58.  
Frissel, H. F. s. S. Sherman 54.  
Fritz, Kurt von 15.  
Frucht, Roberto 149, 353, 387.  
Fu, Chung-Sun 24.  
Fuchs, W. H. J. 160, 221.  
Fuentes Miras, J. 21.  
Fueter, R. 86, 245.  
Fueter, Rudolf s. Leonhardus Eulerus •11.  
Fujiwara, Matsusaburō 1, 15.  
Fullerton, R. E. 279.  
Fuks, B. A. 240.  
Fukuzawa, S. 349.  
Furry, W. H. and Henry Hurwitz 295.  
Furry, W. H. s. S. A. Gondsmit 295.  
Gaba, M. G. 344.  
Gaddum, J. H. 296.  
Gaeta, Federico 83.  
Gagaëff, B. 171.  
Gagaëff, B. 143.  
Gage, Walter H. 111.  
Gage, Robert 297.  
Galatin, A. D. 454.  
Galasekharan, F. H. V. 335.  
Galerkin, B. 427.  
Galerkin, B. G. (Biography) 15, 428.  
Galini, L. A. 420.  
Gallego-Diaz, J. 9, 144.  
Gama, Lelio I. 145.  
Gambier, B. 333, 345, 360, 361.  
Ganapathy Iyer, V. 150, 221.  
Gandini, A. 341.  
Gandz, Solomon 4.  
Ganguli, Mohonlal 307.  
Gantmacher, F. R. and M. G. Krein •33.  
Garabedian, H. L. 155, 161, 258, 259.  
Garabedian, H. L. and H. S. Wall •161.  
Garavito Armero, Julio 460.  
García Frías, Roque 202.  
García, Godofredo 14, 431, 465.  
García de Zúñiga, E. 8.  
Gårding, L. 336.  
Gardner, Murray F. and John L. Barnes •248.  
Garín de Alvarez, M. 439.  
Garnea, B. G. 56.  
Garnier, René 200.  
Garnir, Henri 33.  
Garti, Y. 288.  
Garwick, Jan V. 461, 464.  
Gaspar, Fernando L. 54, 193.

- Gavriloff, L. 50.  
Gavrilow, L. 51.  
Gawrilow, L. 51.  
Gawrilow, L. und N. Tschebotarow 51.  
Gayen, A.K.s.C. Bose 307.  
Geary, R. C. 301.  
Gebelin, H. 347.  
Géheniau, I. s. Th. de Donder 450.  
Geheniau, J. 450.  
Gelfand, I. and M. Neumark 270.  
Gelfer, S. 208.  
Gennaro, Antonino 283.  
Gentile, G. 341.  
Gentry, F. C. 331.  
Geppert, Maria-Pia 303, 317.  
Germain, Paul 277, 354.  
Germansky, Baruch 23.  
Germeier, G. 137.  
Geronimus, J. 169, 171, 260.  
Gerretsen, J. C. H. 340.  
Geus, W. de 320.  
Gheorgiev, Gh. 350.  
Gheorghiev, Gh. 352.  
Gheorghin, Gh. Th. s. Georges Calugareanu 366.  
Gheorghiu, Gh. Th. 367, 373.  
Gheorghiu, S. 333, 344.  
Ghermanescu, M. 86, 88, 277.  
Ghika, A. 240.  
Ghika, A. I. 239.  
Ghika, Al. 151, 278.  
Ghizzetti, A. 298.  
Ghosh, N. N. 34, 388.  
Gião, Antônia 444.  
Gibbins, N. M. 335.  
Giese, I. H. s. Leonidas Alaoğlu 343.  
Gildemeister, M. and B. L. van der Waerden 303.  
Gillam, Basil E. 325.  
Gillespie, R. P. 131.  
Gillis, J. 98.  
Gilly, Jean 249.  
Giltay, J. 294.  
Gimenez-Cacho, L. 152.  
Ginsburg, Jekuthiel 84.  
Ginsburg, Y. 453.  
Ginsburg, V. L. 453.  
Girshick, M. A. 286.  
Girshick, M. A. s. D. Blackwell 290.  
Giuga, G. 31, 103.  
Gjunter, N. M. 17.  
Glagolev, Nil Aleksandrovič (Nachrut) 15.  
Glaisher, J. W. L. 84.  
Glaser, Walter 439.  
Glass, T. F. and W. Leighton 164.  
Gleissberg, W. 305.  
Gliese, W. 464.  
Glivenko, V. I. 317.  
Glock, Waldo S. 311.  
Gloden, A. 84, 88.  
Goddard, L. S. 155, 438, 439.  
Godeaux, Lucien 373.  
Godwin, H. J. 299.  
Goetze, A. s. O. Neugebauer 4.  
Goffman, Casper 142, 263.  
Gokieli, L. 19, 123.  
Gokieli, L. P. 19.  
Galob, St. 383.  
Golaz, Charles 468.  
Goldberg, Henry and Harriet Levine 297.  
Goldenberg, Tudor 133.  
Goldeweiser, A. L. 421, 423.  
Goldman, Oscar 76.  
Golomb, Michael 209.  
Gomes, Ruy Luis 80, 131, 133.  
Goncalves Miranda, Manuel 68.  
Gontcharoff, W. et M. Gontcharoff 212.  
Gontcharoff, W. L. 212.  
Gonzalez, M. O. 334.  
González, Mario O. s. Enrique Badell 214.  
González del Valle, A. 24.  
González Domínguez, A. 253.  
Good, I. J. 27.  
Goodman, A. W. und R. E. Goodman 349.  
Goodman, Nelson 23, 124.  
Goodman, R. E. s. A. W. Goodman 349.  
Goodstein, R. L. 23, 143.  
Goormaghtigh, M.-R. 342.  
Goormaghtigh, R. 336, 340, 342, 344, 349.  
Gorbunov, B. N. 419.  
Gorciu, V. G. 394.  
Gordize, A. Ja. and A. K. Ruchadze 429.  
Gossiaux, Anne-Marie et Georges Papy 261.  
Gotusso, Guido 294.  
Goudsmit, S. A. and W. H. Furry 295.  
Graef Fernández, C. 445.  
Gran Olsson, R. 417.  
Gravey (Graev), M. 60.  
Green, H. Gwynedd and H. J. J. Winter 11.  
Green, L. 371.  
Greenberg, H. J. and H. S. Wall 159.  
Greenwood, J. A. 309.  
Greenwood, Thomas 321, 325.  
Greville, T. N. E. 213, 319.  
Griffiths, L. W. 89, 96.  
Grioli, G. 417.  
Groenewold, H. J. 450.  
Groot, J. de 212, 399.  
Gross, Bernhard and Bepo Levi 253.  
Grossman, H. D. 334.  
Grove, V. G. 371, 372, 373.  
Grünberg, G. A. 249.  
Grundy, P. M. 68.  
Guarnieri, Angel J. 143, 146.  
Guelfer, S. 225.  
Guilford, J. P. and Thoburn C. Lyons 308.  
Guinand, A. P. 109, 153, 256, 260.  
Gulasekharan, F. H. V. 331.  
Gumbel, Émile-J. 300.  
Gupta, Hansraj 26, 102, 112.  
Gupta, S. 454, 457.  
Gupta, S. and R. C. Majumdar 457.  
Gurjar, L. V. 1.  
Gustafson, Torsten 455.  
Gustin, William 396.  
Gutiérrez Novoa, L. 331.  
Guttman, Louis 309, 312.  
Hachtroudi, M. 393.  
Hadamard, Jacques 14, 17, 347.  
Hadwiger, H. 25, 132, 201, 286, 289, 406.  
Häfel, Hans 245.  
Hager, Anton 323.  
Hagstroem, K.-G. 296.  
Hailperin, Theodore 22.  
Haimovici, Adolf 379.  
Hald, A. Hjorth 296.  
Haldane, J. B. S. 297, 315, 317.  
Hall, D. W. 405.  
Hall, Marshall 28, 322.  
Hall, M. and R. P. Dilworth 61.  
Haller, B. 284.  
Halmos, Paul R. 283.  
Hamada, Takashi 335.  
Hameed, A. 338.  
Hamilton, J. and H. W. Peng 457.  
Hancock, Harris 112.  
Hansen, Morris H. and William N. Hurwitz 301.  
Harding, J. W. and I. N. Sneddon 420.  
Hardy, G. H. 18.  
Hardy, G. H. and J. E. Littlewood 157, 217.  
Hardy, G. H. and W. W. Rogosinski 182.  
Hardy, G. H. s. N. Aronszajn 142.  
H. Hardy, G. H. s. H. S. Carslaw 18.  
Harish-Chandra 453, 457.  
Harman, H. H. s. K. J. Holzinger 312.  
Harpe, Jean de la 18.  
Harrison, Gerald 69.  
Harshbarger, Boyd 312, 313.  
Hart, B. I. 300.  
Hartley, H. O. 295, 299.  
Hartley, H. O. s. L. J. Comrie 295.  
Hartley, R. W. s. M. L. Mac Queen 334.  
Hartley, H. O. s. Catherine M. Thompson 295.  
Haruki, Hiroshi 213.  
Hasel, A. A. 307.  
Haskey, H. W. 449.  
Haurwitz, B. 468.  
Hausdorff, F. 124.  
Hauser, G. 321.  
Havas, P. 454.  
Hayes jr., Samuel P. 308.  
Heawood, P. J. 416.  
Heckmann, O. 462.  
Hedge, L. B. 191.  
Heemert, Anthonie van 399, 400.  
Heilbronn, H. s. H. Davenport 119.  
Heins, Maurice H. 217, 218, 221, 231.  
Heitler, W. 454, 457.  
Heitler, W. and P. Walsh 458.  
Hellinger, E. D. and H. S. Wall 165.  
Hellingner, E. D. s. M. Dehn 9.  
Helmer, O. 76.  
Helsel, R. G. and T. Radó 143.  
Helsel, R. G. and P. M. Young 142.  
Heitler, W. and H. W. Peng 457.  
Hély, Jean 443.  
Henningsen, Erik 146, 398.  
Hempel, Carl G. 19, 321.  
Hencky, H. und W. Moheit 418.  
Henstock, R. 137.  
Herdan, G. 312.  
Hermann, C. 316.  
Herrneg, Pierre 248.  
Herrera, Félix Eduardo and Manuel Balanzat 143.  
Herring, C. 459.  
Herriot, John G. 191.  
Hertz, Hans G. 461.  
Herzog, F. s. B. H. Bissinger 163.  
Herzog, F. and B. H. Bissinger 163.  
Hewitt, Edwin 134, 394, 395, 396.  
Higgins, T. J. 13.  
Higuti, Kaneos. Yukiyosi Kawada 324.  
Hijab, Muhammad 'Ali and Šubhi Sidrak 6.  
Hildebrandt, T. H. 155.  
Hilding, S. H. 280.  
Hill, E. L. 440.  
Hill, J. D. 160, 161.  
Hill, J. D. s. R. P. Agnew 160.  
Hille, E. 195.  
Hille, E. s. W. B. Caton 253.  
Hillman, A. P. 81.  
Hirakawa, Junkō 367.  
Hirsch, Guy 323, 410, 414.  
Hirschman jr., I. I. 254.  
Hirschman, Albert O. 300.  
Hitosi Iyōi 285.  
Hiz, Henri 21.  
Hjalmars, S. and O. Brulin 456.  
Hjelmlev, Johannes 13.  
322, 326, 327, 328, 346.  
Hodge, W. V. D. 16, 41.  
Hoel, Paul G. 300, 304, 321.  
Hofmann, Jos. E. 10.  
Hohenemser, K. 431.  
Holzinger, K. J. and H. H. Harman 312.  
Holzinger, Karl J. 312.  
Hoogland, J. J. 315.  
Hope-Jones, W. 343.  
Hopf, H. 414.  
Hopf, Heinz 400, 406.  
Hornich, Hans 194.  
Hostinský, Bohuslav 293.  
Hotelling, Harold 308.  
Houriet, A. 456.  
Houstoun, R. A. 443.  
Hoyle, F. 466.  
Hruska, V. 144.  
Hsiang, Fu Cheng 182.  
Hsio-Fu, Tuan s. Claude Chevalley 81.  
Hsu, Lietz C. s. Kai-Lai Chung 283.  
Hsiung, Chuan-Chih 368, 369, 370.  
Hsu, L. C. 298.  
Hsu, L. Ching-Siur 26.  
Hsu, P. L. 35, 312.  
Hsu, P. L. and K. L. Chung 293.  
Hsü, Chang-Pen 434.  
Hu, N. s. W. Pauli 456.  
Hu, Sze-tsen 411, 412.  
Hua, Loo-keng 35, 109, 116.  
Hua, Loo-keng and Sze-hoa Min 104, 109.  
Hughes, Howard K. s. Glen T. Miller 211.  
Hukamchand 162.  
Hukuhara, Masuo 149.  
Hukusima, Yutaka s. Kenzo Joh 208.  
Hull, Ralph 79, 112.  
Humbert, F. 319.  
Humbert, Pierre 251, 338, 339.  
Huron, Roger 234.  
Hurewicz, W. and N. E. Steenrod 414.  
Hurewicz, Witold and Henry Wallman 398.  
Hurewitz, Henry s. W. H. Furry 2.



- Hurwitz jr., Henry 436.  
Hurwitz, William N. s.  
Morris H. Hansen 301.  
Husain, Q. M. 314, 305.  
Hutter, R. G. E. 439.  
Hyers, D. H. 265.  
Hyers, D. H. and S. M.  
Ulam 264.  
Hyslop, J. M. 155.
- Ibraghimoff, I. 168, 171.  
Iglisch, Rudolf 52.  
Ijzeren, J. van 100, 347.  
Ikehara, Shikao 102.  
Iljinsky, I. 462.  
Ilyushin, A. A. 424.  
Infeld, L. and A. Schild  
448.  
Inaba, Eizi 47.  
Ingram, W. H. 247.  
Iniguez Almech, José Ma.  
277.  
Ioffe, A. F. Editor 13.  
Ionesco, D. V. 193, 338.  
Irwin, J. O. 299, 312.  
Irwin, J. O. and M. G.  
Kendall 298.  
Isaacs, Rufus Philip 130,  
245.  
Ishlinsky, A. J. 419.  
Itô, Kiyosi 289, 290, 291.  
Ivanov, V. S. I. Dubnov  
33.  
Ives, H. E. 439.  
Ivins jr., William M. 11.  
Iwamura, Tsurane 324,  
395.  
Iwanenko, D. and A. So-  
kolov 457.  
Iyengar, K. S. K. 184, 185.  
Iyengar, K. V. 149.  
Izumi, Shin-ichi 273.
- Jabotinsky, Eri 199.  
Jackson, Dunham 170,  
170.  
Jackson, F. H. 46, 198.  
Jackson, S. B. 349.  
Jacob, M. 178.  
Jacobson, Nathan 73,  
73, 74, 75.  
Jacobsthal, Ernst 84.  
Jaeger, C. G. 361.  
Jaeger, I. C. S. H. S. Cars-  
law 248.  
Jaffé, George 458.  
Jaiswal, J. P. 443.  
James, R. C. 262.  
James, R. D. 99.  
James, Robert C. s. Glenn  
James 123.  
James, Glenn and Robert  
C. James 123.  
Janardana Aiyer, S. 298.  
Jarden, Dov 85.  
Jarden (Juzuk), Dov 85.  
Jarnik, Vojtěch and Vla-  
dimir Knichal 112.  
Jarnik, Vojtěch 112, 121.  
Jaspén, Nathan 310.  
Jauch, J. M. and J. Leite  
Lopes 456.  
Jauch, J. M. 458.  
Jeans, James 9.  
Jecklin, Heinrich 319.  
Jeffery, R. L. 136.  
Jeffery, R. L. and H. W.  
Ellis 136.  
Jeffery, R. L. and D. S.  
Miller 136.  
Jehle, Herbert 464.  
Jekhowsky, Benjamin de  
461.  
Jeming, Joseph 320.  
Jenks, F. B. 328.  
Jennings, S. A. 71.  
Jensen, Henry 342.  
Jessen, Axel 26.
- Jessen, Borge 131, 321,  
343.  
Joh, Kenzo and Yutaka  
Hukusima 208.  
Johansen, N. P. 316.  
Johnson, R. E. 69.  
Jonah, Harold F. S. 94.  
Jones, Burton W. 110, 111.  
Jones, F. B. 405.  
Jordan, Charles 123.  
Jorgensen, Vilhelm 225.  
Joseph, A. W. 29.  
Josephs, H. J. 432.  
Jouquet, Marc 434.  
Juung, K. 466.
- Kac, M. s. R. P. Boas jr.  
236.  
Kac, M. 286, 291.  
Kagan, V. F. 13.  
Kaizt, Hyman B. 309.  
Kajdan, J. s. I. Weinstein  
399.  
Kakeya, Sôichi 209.  
Kakutani, Shizuo 131,  
136, 266, 274, 277.  
Kakutani, Shizuo and  
Kunihiko Kodaira 135.  
Kakutani, Shizuo and  
George W. Mackey 263.  
Kalish, Aida s. Edward  
Kasner 379.  
Kalisch, G. K. 397.  
Kamber, Franz 154.  
Kametani, Shunji and  
Tadasi Ugaheri 220.  
Kametani, Shunji 230, 231.  
Kamke, E. 282.  
Kantorovič, L. V. 131.  
Kaplan, N. 383.  
Kaplan, Wilfred and M.  
Dresden 459.  
Kaplansky, Irving 29, 74,  
87, 285, 300.  
Kaplansky, Irving and  
John Riordan 29.  
Kaplansky, Irving s. I. S.  
Cohen 70.  
Kaplansky, Irving s. Paul  
Erdős 28, 29.  
Karamatha, J. 155.  
Karanikolov, Chr. 88.  
Karl, H. 419.  
Kármán, Th. von 9.  
Kármán, Theodore von  
and Wei-Zang Chien  
424.  
Kármán, Th. von and Hsue  
Shen Tsien 424.  
Karmarkar, K. E. s. V. V.  
Narlikar 441.  
Karpinski, Louis Charles  
7, 8, 13, 13.  
Kársna, A. 296.  
Kasner, Edward 358, 359,  
379, 380.  
Kasner, Edward and John  
DeCioco 356, 357, 358,  
359, 360, 379, 380.  
Kasner, Edward and Aida  
Kalish 379.  
Katô, Heizaeon 1.  
Kawada, Yukiyo 273,  
274.  
Kawada, Yukiyo, Kaneo  
Higuti and Yatarô Ma-  
tusima, 324.  
Kawata, Tatsuo 182.  
Keldych, L. 402.  
Keldych, Ludmila 129.  
Keldych, M. 171.  
Keldys, M. V. 233.  
Kelly, Paul J. 400.  
Kemble, Edwin C. s.  
Julian L. Coolidge 17.  
Kemmer, N. 79.  
Kempthorne, O. 303.  
Kendall, D. G. 257.
- Kendall, M. G. s. J. O.  
Irwin 298.  
Kendall, M. G. 309, 311.  
Kennedy, E. C. 50.  
Kerawala, S. M. 314, 367,  
349, 28, 327.  
Kerékjártó, Béla 322.  
Kesava, M. P. 192.  
Kesava Menon, P. 24, 191,  
194, 344.  
Keyser, Cassius Jackson  
17.  
Kharadze, A. K. 148.  
Kharchiladze, Philippe  
178.  
Kharsiladze, F. I. 258.  
Khintchine (Chinčin), A.  
122.  
Kiang, Tsai-han 410, 414.  
Kibble, W. F. 196.  
Kilchevsky, N. A. 427.  
Kimball, W. S. 144.  
Kincald, W. M. 404.  
Kingston, Jorge 295.  
Kishen, K. 312.  
Kjellberg, Bo 260.  
Klein, O. 456.  
Kline, S. A. 143.  
Kloosterman, H. D. 100.  
Klug, L. 339.  
Knaster, B. 125.  
Knichal, Vladimir 136.  
Knichal, Vladimir s.  
Vojtech Jarník 112.  
Knie, Guillermo 453.  
Ko, Chao 40, 89.  
Ko, Chao and S. C. Wang  
40.  
Kober, H. 170, 256, 257.  
Kobold, H. 461.  
Kobori, Akira 208.  
Koch, J. J. s. C. B. Bie-  
zeno 418.  
Kočin, Nikolaj Evgrafovich  
(Nachruf) 15.  
Kodaira, Kunihiko s.  
Shizuo Kakutani 135.  
Koksma, J. F. 122.  
Kolehin, E. R. 81.  
Kolmogoroff, A. 305.  
Kolmogorov, A. N. s. P. S.  
Aleksandrov 13.  
Kolmogorov, A. 15.  
Komatu, Yusaku 234, 235,  
236, 237.  
Komatu, Atuo 411.  
Komsichke, A. 48.  
Kondô, Motokiti 129, 270,  
398.  
König, H. 433.  
Konnulli, A. O. 341.  
Koopman, Bernard Os-  
good 17.  
Koopmans, T. 310.  
Kopal, Zdeněk 146, 461,  
461.  
Korevaar, J. 176, 251.  
Korous, Jofef 183.  
Korovkin, P. P. 169.  
Kosambi, D. D. 14, 152,  
171, 305.  
Koseki, K. 404.  
Kössler, M. 104.  
Kostandi, G. 86, 103.  
Kosten, L. 458.  
Kotzig, Anton 116.  
Koulik, S. 193.  
Krakeur, Lester Gilbert  
and Raymond Leslie  
Krueger 11.  
Krall, H. L. 192.  
Krasner, Marc 246, 247.  
Kravtchenko, Julien 258.  
Krein, M. 351.  
Krein, Mark et Selim  
Krein 267.  
Krein, M. G. s. F. R.  
Gantmacher 33.
- Krein, Selms. Mark Krein  
267.  
Kreiss, H. 148, 284, 298.  
Kreweras, Germain 130.  
Krishnan, V. S. 58.  
Krishnaswami Ayyangar,  
A. A. 1, 162, 313, 336.  
Krogdahl, Wasley s. S.  
Chandrasekhar 463.  
Krones, F. 431.  
Kronsbein, John 330.  
Krueger, Raymond Leslie  
s. Lester Gilbert Kra-  
keur.  
Kryloff, Nicolas 103.  
Krylov, V. V. 429.  
Kuik, Jan van 213.  
Kulakoff, A. A. 84.  
Kunugui, Kinjiro 132, 129,  
228, 229, 230.  
Kuratoski, Casimir 415.  
Kurepa, Georges 126, 396.  
Kuroda, Sigeakatu 89.  
Kurosh, A. 78.  
Kusaka, S. s. W. Pauli  
456.  
Kuttner, B. 183.  
Kuzmin, R. O. 14, 419.  
Kuznecov (Kuznetsov),  
E. S. 467.  
Kwal, B. 452.  
Ky, Fan 283.
- Laasonen, Pentti 232.  
Laboureur, Jacques 414.  
Labra, Manuelli, 337, 341.  
Labra y Fernández, M.  
334.  
Ladue, Mary Elizabeth  
378.  
Lage Sundet, K. s. Sundet,  
K. Lage 333.  
Lagerstrom, Paco 35.  
Laguardia, Rafael 147.  
Lahiri, D. B. 102.  
Lakshmanamurti, M. 309.  
Lal, Brij Basi 464.  
Lalan, V. 331, 355.  
Lambert, Johann Heinrich  
12.  
Lanczos, C. 448.  
Landin, Joseph 330.  
Lane, Ralph E. 163.  
Lang, Kermit 319.  
Langer, R. E. 5, 14.  
Laplume, Jacques s. Ro-  
bert Potier 248.  
Laptev, G. 392.  
Larguer, Everett H. 19.  
La Salle, J. P. 261.  
Lasley jr., J. W. 368.  
Laue, M. v. 460.  
Laufer, R. 331, 332, 334,  
336.  
Lauverier, H. A. 333.  
Lavrentiv, M. 240.  
Lawley, D. N. 311.  
Lebedinsky, A. I. 466.  
Lebeugue, H. 335, 343.  
Le Gros Clark, W. E. s.  
Alfred J. Lotka 317.  
Lee, H. C. 43, 80, 278,  
383, 387.  
Lee, H. C. and S. L. Liang  
34.  
Lefort, Guy 17.  
Legre, B. und K. Mahler  
349.  
Lehmann Erich 301.  
Lehmer, D. H. 101, 104.  
Lehmer, D. N. 103.  
Lehner, Joseph 100, 101.  
Leighton, W. and W. J.  
Thron 164.  
Leighton, W. s. I. D.  
Bankler 163.  
Leighton, W. s. V. F.  
Cowling 164.



- Leighton, W. s. T. F. Glass 164.  
 Leite Lopes, I. s. I. M. Jauch 456.  
 Lelong, Pierre 241.  
 Leonhard, A. 57.  
 Lepage, Th.-H. 42.  
 Lepecki, Zbigniew 191.  
 Leray, Jean 407, 408.  
 Lerel, Z. (Leray, J.) and Yu Sander (Schauder, J.) 277.  
 Lesieur, L. 72.  
 Leslie, P. H. 318.  
 Levi, B., Pedro Capelli und Mischa Cottlar 5.  
 Levi, Beppo 5, 14, 16, 18, 19, 83, 146, 352.  
 Levi, Beppo s. Bernhard Gross 253.  
 Levi, F. W. 26, ●63, 68, 123, 154, ●323.  
 Levi, Howard 68.  
 Levi-Civita, Tullio 16.  
 Lévine, B. and M. Lifschetz 151.  
 Levine, Harriet s. Henry Goldberg 297.  
 Levinson, Norman 224.  
 Levit, Robert J. 82.  
 Levitzki, Jacob 74, 75.  
 Lévy, Paul 171, 247, 276.  
 Levy, Samuel 417.  
 Lewis, D. C. s. G. D. Birkhoff 416.  
 Liang, S. L. 34.  
 Liang, S. L. s. H. C. Lee 34.  
 Liapunov, A. A. 128.  
 Liehnerowicz, A. et A. G. Walker 385.  
 Liehnerowicz, André 331, 335, 441, 444.  
 Liebowitz, Benjamin 432.  
 Liénard, A. 432.  
 Lifschetz, M. s. B. Lévine 151.  
 Lifshitz, Jaime 405.  
 Lifshitz, E. 445.  
 Lindblad, Bertil 464.  
 Lindblad, Sven G. 296.  
 Lindemann, Hans A. 9.  
 Linder, Arthur 301.  
 Lindley, D. V. 313.  
 Lindman, C. F. ●123.  
 Lindner, A. ●295.  
 Ling, Donald P. 355.  
 Lintès, I. 86, 103.  
 Lipka, Stephan 52.  
 Littlewood, D. E. 41, 44.  
 Littlewood, J. E. ●199.  
 Littlewood, J. E. and A. C. Offord 219.  
 Littlewood, J. E. s. G. H. Hardy 157, 217.  
 Livingood, John 101.  
 Ljunggren, Wilhelm 85, 87, 91.  
 Ljusternik, L. A. 15.  
 Ljusternik, L. 15.  
 Lob, H. 334.  
 Lobačevskij, N. I. ●13.  
 Löbell, Frank 347, 353.  
 Locher, L. ●322.  
 Løve, M. 283.  
 Loomis, Lynn H. 36, 134, 220.  
 Loong, Chi-Ho 331.  
 Loonstra, F. 82.  
 Lorch, Edgar R. 263, 272.  
 Lorch, Lee 182.  
 Lord, Frederic M. 308.  
 Lorenzen, Paul 59.  
 Loria, Gino ●1, 8, 11, 58, 100, 335.  
 Losada y Puga, Christóbal de 8, 9.  
 Losinsky, S. M. 182.  
 Lotka, Alfred J. ●317.  
 Lovera, G. 308.  
 Lozinski, S. 183.  
 Lozinski, S. M. 257.  
 Lu, Chin-Shi 335.  
 Lubański, J. K. 451.  
 Łudski, H. 2.  
 Ludendorff, H. 2.  
 Lukacs, E. 285.  
 Lundmark, Knut 8.  
 Lurf, S. Ja. ●5.  
 Lusternik, L. 406.  
 Lyons, Thoburn C. s. J. P. Guilford 308.  
 Ma, S. T. 451, 457.  
 Ma, S. T. and F. C. Yu 453.  
 MacAdam, L. David 438.  
 MacColl, L. A. 380.  
 MacDuffee, Cyrus Colton 12, ●33, 40, 78.  
 MacLane, Gerald s. S. Mandisbrojt 221.  
 MacLane, S. 61, 68.  
 MacLane, S. and O. F. G. Schilling 79.  
 MacNish, H. F. 323.  
 MacQueen, M. L. 371, 372.  
 MacQueen, M. L. and R. W. Hartley 334.  
 Machado, Bernardino 15.  
 Michler, W. 345.  
 MacIntyre, A. J. and W. W. Kozłowski 217.  
 MacIntyre, A. J. and R. Wilson 203, 218.  
 Mackey, George W. 134, 233.  
 Madow, William G. 310.  
 Maeda, Jusaku 368.  
 Mahajan, G. S. 145.  
 Mahalanobis, P. C. 295.  
 Mahdavi Ardebili, Mohammad Hassan ●146.  
 Mahler, K. 117, 118, 119.  
 Mahler, K. s. H. Davenport 120.  
 Mahler, K. s. B. Segre 349.  
 Mahler, K. s. B. Segre 117.  
 Maitland, B. J. 224.  
 Majumdar, R. C. s. S. Gupta 457.  
 Makai, E. 348.  
 Makar, R. H. s. M. Mursi 194.  
 Makemson, Maud Worcester 2, ●2.  
 Malcev, A. 78, 80.  
 Malengreau, Julien ●84, ●321, ●326.  
 Malisoff, William Marias 20.  
 Müllemann, R. de et F. Schar 437.  
 Malmquist, K. G. 316.  
 Mambrian, A. 139.  
 Mandun, Ram 333, 347.  
 Mandisbrojt, S. 17, 151, 201, 210, 221.  
 Mandisbrojt, S. et Gerald MacLane 221.  
 Mandisbrojt, S. and F. E. Ulrich 151.  
 Mandisbarm, L. and Ig. Tamm 450.  
 Manzeron, Dumitru Ion 9, 16.  
 Manley, R. G. 37.  
 Mann, Henry B. 27, 41, 307, 317, 323.  
 Manning, Rhoda 209, 401.  
 Mannos, Murray 66.  
 Marar, K. Mukunda and C. T. Rajagopal 1.  
 Marcinkiewicz, I. s. S. Bergman 242.  
 Marcolongo, R. 8.  
 Marconchewitch, A. 415.  
 Marden, Morris 51.  
 Marengoni, A. s. C. Ciambertini 335.  
 Marié, Pierre 433.  
 Marinescu, Gh. 65.  
 Markouchevitch, A. 171, 176.  
 Markov, M. 456.  
 Markov, M. A. 456.  
 Marković, Z. 19.  
 Markow, M. 445.  
 Markušević, A. I. ●199.  
 Martchenko, V. A. 183.  
 Martchenko, V. 276.  
 Marth, Ella 211.  
 Martin, D. 444.  
 Martin, R. M. 21.  
 Martin, W. T. 241.  
 Martin, W. T. s. R. H. Cameron 275, 291.  
 Martin, Yves 201.  
 Martinelli, Enzo 244, 245.  
 Marušvili, T. I. 33.  
 Masini Venturelli, Lucia 333.  
 Masotti, Arnaldo 11.  
 Massé, Pierre ●321.  
 Masuyama, Motosaburo 284.  
 Mathen, K. K. 303.  
 Mathisen, Harold C. 304.  
 Maties, I. V. 145.  
 Matsumoto, T. 407.  
 Matsushima, Yozō s. Tadashi Nakayama 79.  
 Matsuyama, Noboru 270.  
 Matusima Yatarō s. Yukioji Kawada 324.  
 Matusita, Kameo 68.  
 Mautner, F. I. 20.  
 Mautner, F. and E. Schrödinger 443.  
 Maxia, A. 349, 393.  
 Maximoff, I. 50.  
 Mayot, Marcel 316.  
 Mazurkiewicz, S. 400.  
 M'Bride, J. A. 333.  
 McBrien, V. O. 340.  
 McColley, Grant 8.  
 McConnell, A. J. 13.  
 McConnell, J. and E. Schrödinger 443.  
 McCoy, Neal H. 59, 77.  
 McCoy, Neal H. s. Bolley Brown 77.  
 McCoy, Neal H. s. A. Forsythe 77.  
 McKinsey, J. C. C. and Alfred Tarski 62.  
 McLachlan, N. W. 197, 251.  
 McLachlan, N. W. s. W. G. Bickley 197.  
 McMillan, Audrey Wisard 221.  
 McShane, Edward James ●130, 136.  
 McVittie, G. C. 447.  
 Mebius, C. A. 91.  
 Medawar, P. B. s. Alfred J. Lotka 317.  
 Meeroov, M. V. 58.  
 Megyesi, István 24.  
 Meier, J. 320.  
 Meijer, C. S. 199.  
 Menchoff, D. 185.  
 Mendel, C. W. s. D. G. Bourgin 171.  
 Mendelsohn, N. S. 30.  
 Mendonça Albuquerque, L. 124.  
 Menger, K. 328.  
 Menger, Karl 66, ●66, 153, 328, 394, 398.  
 Menon, P. Kesava 84.  
 Merrington, M. 295.  
 Merz, K. 343.  
 Meyerdinger, A. P. ●27.  
 Mibu, Yoshimichi 134.  
 Mibu, Yoshimichi 396.  
 Michal, Aristotle D. 272.  
 Michalup, E. 300.  
 Miegheem, Jacques van 443.  
 Mihăilescu, Tiberiu 375.  
 Mihoc, G. 289.  
 Mihoc, G. s. O. Onicescu 300.  
 Mikami, Yoshio 16.  
 Mikusiński, Jean G. 148, 332.  
 Milgram, Arthur N. s. Emil Artin ●48.  
 Milgram, Arthur N. 398.  
 Miller, A. R. 24.  
 Miller, D. S. s. R. L. Jeffery 136.  
 Miller, Edwin W. 127.  
 Miller, G. A. 1.  
 Miller, Glen T. and Howard K. Hughes 211.  
 Miller, L. H. s. G. E. Albert 170.  
 Milloux, H. 226.  
 Millsaps, Knox 276, 282.  
 Milne, E. A. 15, 16, 445, 446, 448, 466.  
 Milne-Thomson, L. M. 30.  
 Min, Sze-hoa s. Loo-keng Hua 104, 109.  
 Minakshisundaram, S. 159, 185, 190.  
 Minakshisundaram, S. and C. T. Rajagopal 159.  
 Minami, Unai 200.  
 Mindlin, J. A. 431.  
 Mineo, M. 350.  
 Minoda, Takashi 1.  
 Mira Fernandes, Aureliano de 13, 80, 406.  
 Mirsky, Leonid s. T. D. H. Baber 196.  
 Mises, R. v. 283.  
 Mishra, Ratan Shanker 365.  
 Misra, M. L. 182.  
 Misra, Rama Dhar 459.  
 Mital, P. C. 260.  
 Mitchell, Josephine 190.  
 Mitra, A. 342.  
 Mohet, W. s. H. Hencky 418.  
 Mohr, Ernst 84.  
 Molenaar, P. G. 45.  
 Molina, E. C. ●295.  
 Moller, C. 440.  
 Monna, A. F. 121, 134.  
 Monteiro, António 394.  
 Montel, Paul 52, 200, 225.  
 Montgomery, Deane s. Samuel Eilenberg 402.  
 Montgomery, Deane and Hans Samelson 415.  
 Montgomery, John C. 56.  
 Mood, Alexander M. 301.  
 Mooney, Robert L. 437.  
 Moore, Charles N. 15.  
 Moore, E. H. 154.  
 Moore, R. L. 403.  
 Morand, M. s. R. Duchon 432.  
 Mordell, L. J. 92, 93, 118, 119, 120.  
 Morita, Kiiti 38, 246.  
 Morkovin, Vladimir 424.  
 Morrell, A. V. H. 297.  
 Morse, A. P. and John F. Randolph 140.  
 Morse, Marston 14, 123.  
 Mostowski, A. 127.  
 Motzkien, Théodore 58, 341.  
 Mourier, Edith 303.  
 Moursund, A. F. 185.  
 Moustary, C. M. 428.  
 Moyal, J. E. 285.  
 Muñjälä 2.

- Murnaghan, F. D. 429.  
Murray, F. J. 280.  
Murray, F. J. and J. von Neumann 269.  
Mursi, M. and R. H. Markar 194.  
Mursi, M. s. J. M. Whit-takar 193.  
Musselman, J. R. 333.  
Mutō, Yōsio s. Kentaro Yano 338, 389.  
Myller, A. 352.  
Myrberg, P. J. 216.  
Myshkis (Myškis), A. 138.
- Nachbin, Leopoldo 178, 224.  
Nagell, Trygve 84.  
Nair, K. R. 312, 314, 317.  
Nair, K. E. and K. S. Banerjee 315.  
Nair, K. Raghavan and C. Radhakrishna Rao 313, 314.  
Nakamura, Masahiro 273.  
Nakano, Hidegorō 265, 266, 290.  
Nakayama, Tadasī 73.  
Nakayama, Tadasī und Yōzō Matsushima 79.  
Nakayama, Tadasī s. Kō-saku Yosida 267.  
Nallino, Carlo Alfonso ● 6.  
Nanli, Hari Kinkar 304, 313, 314.  
Narasimha Murti, V. 26.  
Narayan, Lakshmi 17.  
Narayanamurthy, T. 336.  
Narlikar, V. V. and K. R. Karmarkar 441.  
Narlikar, V. V., G. K. Patwardhan and P. C. Vaidya 441.  
Narlikar, V. V. 443.  
Nassif, M. 194.  
Natanson, I. P. 259.  
Natanson, I. 259.  
Neder, Ludwig 156.  
Nef, Walter 245.  
Nehari, Zeev 217.  
Nehring, O. 335.  
Neményi, P. and C. Truesdell 425.  
Nesbitt, C. J. and R. M. Thrall 76.  
Nesbitt, C. and W. M. Scott 82.  
Nesbitt, Cecil J. s. Emil Artin 77.  
Nestorowitch, N. M. 329.  
Neubauer, F. J. 7.  
Neugebauer, O. 3, 5.  
Neugebauer, O. and A. J. Sachs ● 4.  
Neumann B. H. 343.  
Neumann, J. von s. S. Chanrasekhar 463.  
Neumann, J. von s. F. J. Murray 269.  
Neumann, John von 269, 299.  
Neumark, M. s. I. Gelfand 270.  
Neville, E. H. 15, 200, 214, 354.  
Newing, R. A. 446.  
Newman, M. H. A. 21, 63, 125.  
Neyman, J. s. J. Bro-nowski 294.  
Neyman, Jerzy 284.  
Nicolai, E. L. 12, 16.  
Nicolesco, Miron 145.  
Nicolini, Tito 294.  
Nicolescu, Alex 367.  
Niedermeyer, Franz 94.  
Niessen, A. M. 311.  
Nigam, Tapeshwari Pra-sad 155.
- Niggli, P. 459.  
Nikolsky, K. 456.  
Nikolsky, S. ● 163, 168.  
Nilssen, Billi 294.  
Niven, Ivan 35, 80, 89, 97, 98, 123.  
Niven, Ivan s. N. J. Fine 294.  
Nobile, Vittorio 465.  
Noquera, Rodrigo 97.  
Nolli, P. 317, 318.  
Norden, A. 387, 392, 393.  
Norden, Jean 385.  
Novák, J. 317.  
Novikoff, P. S. 21.  
Novobátzky, K. F. 450.  
Novojilov, V. V. 421.  
Novozhilov, V. V. 423.  
Novozhilov, V. V. 421.  
Novozhilov, V. 427.  
Nowoschilow, W. W. 421.  
Núñez Bazalar, Tomás 286.
- Oberg, Edwin N. 170.  
Obnorskij, S. P. 16.  
Ochrenkoff, Nikola 147.  
O'Connor, R. E. and G. Pall 111.  
Odhoff, W. 296.  
Offord, A. C. 284.  
Offord, A. C. s. J. E. Litt-lewood 219.  
Oka, Kiyosi 240.  
Oka, Syōten and Akiya Ōkawa 429.  
Ōkawa, Yoshimoto 212.  
Ōkawa, Akiya s. Syōten Oka 429.  
Oldenburger, Rufus 40.  
Olds, C. D. 118.  
Oliveira Castro, F. M. de 249.  
Ollershaw, Kathleen 117.  
Olmsted, John M. H. 127.  
Olver, F. W. J. 247.  
O'Neill, Anne F. 136.  
Onicescu, O. 17, 46, 300.  
Onicescu, O. et G. Mihoc 309.  
Onicescu, Octave et Ge-orges Vranceanu 18.  
Onsager, Lars 460.  
Ore, Aadne 30.  
Ore, Oystein ● 1, 61, 62.  
Orihara, Masae 270.  
Orts, J. M. 283.  
Orts, J. Ma. 286.  
Orts, J. Ma. 289.  
Ostrowski, Alexandre 51, 245, 406.  
Othman, G. 123.  
Ottestad, Per 296.  
Overholtzer Gordon 86.
- Pa, Chen-Kuo 370.  
Page, Leigh 433.  
Pailoux, H. 316.  
Paintandre, Roger 395.  
Pais, A. 449.  
Pajares Diaz, E. 84.  
Palermo, F. 34.  
Pall, G. s. R. E. O'Connor 111.  
Pall, Gordon 41, 110, 112, 119.  
Pall, Gordon s. Arnold E. Ross 110.  
Pankajam, S. 58.  
Pantazi, Al. 375.  
Papy, Georges 42.  
Papy, Georges s. Anne-Marie Gossiaux 261.  
Parker, W. V. 36.
- Parodi, Maurice 30, 192, ● 193, 247, 248, 250, 252.  
Pascall, Justo 368.  
Pastori, Maria 431.  
Pitau, K. 303.  
Pato, Robert S. s. R. J. Duffia 61.  
Patterson, B. C. 331, 334.  
Patterson, J. O. 93.  
Patwardhan, G. K. and P. C. Vaidya 441.  
Patwardhan, G. K. s. V. V. Narlikar 441.  
Pauli, W. 455, ● 456.  
Pauli, W. s. A. Einstein 441.  
Paue, Christian 281.  
Paue, Christian s. Hubert Delange 289.  
Pauli, W. and S. M. Dan-coff 456.  
Pauli, W. and N. Hu 456.  
Pauli, W. and S. Kusaka 456.  
Paulson, Edward 306, 307, 312.  
Pearson, E. S. s. Catherine M. Thompson 295.  
Pearson, E. S. 299.  
Pedersen, Peder 161.  
Pedoe, D. 347.  
Peebles, G. H. 170.  
Peiser, Alfred M. 57, 297, 337, 410.  
Peng, H. W. 457.  
Peng, H. W. s. M. Born 458.  
Peng, H. W. s. J. Hamit-ton 457.  
Peng, H. W. s. W. Heitler 457.  
Peng, H. Y. 104.  
Pelzer, H. s. A. E. W. Austen 315.  
Pepper, Paul M. 397.  
Pérard, Albert 18.  
Pereira Gomes, A. 133, 395.  
Perelmann, M. 53, 150.  
Pérès, Joseph 249.  
Périn, Irwin E. 54.  
Pernet, Roger 360.  
Perron, Oskar 330.  
Persico, E. 8.  
Peters, Charles C. 309.  
Peters, J. W. 334.  
Petiau, Gérard 452.  
Pétrasco, Julien 82, 395.  
Petrescu, St. 39.  
Petro, K. 342.  
Pettineo, B. 154.  
Pfister, W. 436.  
Pflüger, A. 428, 431.  
Phillips, H. B. 16.  
Phillips, R. S. s. S. Bochner 272.  
Piaggio H. T. B. 12.  
Picard, Émile 18.  
Picard, E. 319.  
Picasso, Ettore 393.  
Piccard, Sophie 129.  
Picht, Johannes 438.  
Pickett, Gerald 418, 430.  
Picone, Mauro 131, 146, 156.  
Pierce, Joseph A. 311.  
Pierre, Charles 94.  
Pinney, Edmund 196.  
Pinsker, A. 279.  
Pipping, Nils 84, 116.  
Piranian, George 204, 210.  
Pirenne, J. 454.  
Pisot, Charles 215.  
Pitcher, E. and M. F. Smiley 64.  
Pizá, Pedro A. ● 87, 87.  
Plackett, R. L. 313.  
Planck, Max 9.
- Platt, John R. 308.  
Pocklington, H. C. 85.  
Podaypanlin, V. 93.  
Poivert, Jules 48.  
Polak, J. F. 461, 462.  
Poll Louis 192, 251.  
Poll, Louis s. Pierre Hum-bert 251.  
Pollard, Harry 158, 160, 170, 250, 254, 258.  
Pollard, Harry s. R. P. Boas jr. 171.  
Pollard, Harry s. R. Creighton Buck 158.  
Pollard, W. G. 146.  
Pólya, G. 203, 347.  
Pólya, G. und G. Szegő ● 123.  
Pólya, G. and N. Wiener 195.  
Pólya, George 195, 291.  
Pompeli, D. 146, 340.  
Pondiczery, E. S. 396.  
Pontirajin, L. 414.  
Poor, Vincent C. 138.  
Papa, Ilie 352.  
Popoff, Kyrie 144.  
Popoviciu, Tiberiu 86, 149, 153, 342.  
Porges, Arthur 86.  
Posniak, E. 351.  
Pospišil, Bedřich 65, 143.  
Possel, René de 396.  
Possenti, Renzo 253.  
Poti, S. Janardhan s. C. Radhakrishna Rao 302.  
Potier, Robert et Jacques Laplume ● 248.  
Potoček, J. 293.  
Potron 23.  
Poulet, P. 87.  
Powell, F. C. 450.  
Prasad, S. and V. R. Chariar 92.  
Prenowitz, Walter 324.  
Procissi, A. 7.  
Prokofiev, V. 393.  
Pu, Pao-Ming 226.  
Puig Adam, P. 406.  
Purcell, Edwin J. 375.  
Puri, Amrit Sagar 153.
- Quaternion centenary celebration 12.  
Queiroz, Augusto und Jayme Rios de Souza 344.  
Quensel, Carl-Erik 296.  
Quine, W. V. 22, 124.  
Quine, Willard Van Or-man ● 20.
- Rabotnov, J. N. 421, 423, 424.  
Racah, Giulio 456.  
Rachevsky, P. 277.  
Racine, C. 445.  
Racis, N. 94.  
Rademacher, Hans 100.  
Rado, R. 46, 115.  
Radó, T. 140.  
Radó, T. s. R. G. Helsel 143.  
Ralford, T. E. 300.  
Raikov, D. A. 271.  
Raimondi, Elba R. 294.  
Rajagopal, C. T. s. K. Mukunda Marar 1.  
Rajagopal, C. T. 158.  
Rajagopal, C. T. s. S. Minakshisundaram 159.  
Rajalakshman, D. V. 300, 301.  
Ramachandran, G. N. 437.  
Ramamurti, B. and B. Sitaraman 314.  
Ramawami, V. and K. Sambasiva Rao 104.



- Ramesam, V. 336.  
 Randolph, John F. s. A. P. Morse 140.  
 Ranga, Charian V. 84.  
 Rangachariar, V. 375.  
 Rankin, R. A. 161.  
 Rao, A. Narasinga 341.  
 Rao, A. Narasinga and M. Venkataraman 345.  
 Rao, B. S. Madhava 452.  
 Rao, C. V. H. 335.  
 Rao, D. V. B. 258.  
 Rao, C. Radhakrishna 297, 305, 308, 313, 314, 315.  
 Rao, C. Radhakrishna s. K. Raghavan Nair 313, 314.  
 Rao, C. Radhakrishna and S. Janardhan Poti 302.  
 Rao, K. Sambasiva s. V. Ramaswami 104.  
 Rao, S. Raja s. Purnendu Bose 296.  
 Ratib, I. 416.  
 Rauter, H. 348.  
 Raymond, François 32, 432.  
 Rédel, L. 86.  
 Rees, D. 27.  
 Rees, C. J. 193.  
 Reeve, William David 17.  
 Reichenbächer, E. 441.  
 Reiersöl, Olav 296.  
 Reiner, Irving 112.  
 Reissner, E. 424.  
 Reitan, L. 91.  
 Rényi, Alfred 157.  
 Repetto, Celina 254.  
 Reutter, F. 419.  
 Reves, George E. and Otto Szász 191.  
 Rey, Abel 5.  
 Rey Pastor, J. 14, 250, 406.  
 Rey Pastor 17.  
 R. Heath, V. 87.  
 Rhodes, E. C. 318.  
 Riabouchinsky, Dimitri 200.  
 Ribeiro, Hugo 59.  
 Riblet, Henry J. 81.  
 Richards, John F. C. 5.  
 Richardson, A. R. 40.  
 Richardson, M. 65.  
 Richardson, R. G. D. 18.  
 Richeson, A. W. 12.  
 Richmond, D. E. 251.  
 Richmond, Herbert W. 93, 97, 359.  
 Rickart, C. E. 271, 281, 323.  
 Ridder, J. 394.  
 Riordan, John 28, 29.  
 Riordan, John s. Irving Kaplansky 199.  
 Ríos, Sixto, 199, 202 225, 254, 278, 282.  
 Rios de Souza, Jayme s. Augusto Queiroz 344.  
 Ritt, J. F. 143.  
 Ritter, W. 434.  
 Robbins, Herbert 306.  
 Robbins, Herbert s. Richard Courant 123.  
 Robbins, Herbert E. 191, 294, 298.  
 Robert, P. 360.  
 Roberts, J. H. and Paul Civin 399.  
 Robertson, M. S. 207, 209.  
 Robinson, Abraham 83.  
 Robinson, Charles V. 352.  
 Robinson, G. de B. 43, 322.  
 Robinson, H. A. 25.  
 Robinson, Raphael M. 85 218.  
 Roborogh, L. J. 341.  
 Rock, Donald Hill 429.  
 Rodov, A. 144.  
 Rodrigues, Milton da Silva 298.  
 Roger, Frédéric 137.  
 Rogers, C. A. 117, 154.  
 Rogosinski, W. W. s. G. H. Hardy 182.  
 Rogosinski, W. W. s. A. I. Macintyre 217.  
 Románá, Antonio 8.  
 Rome, A. 3.  
 Romanov, N. P. 171, 280.  
 Rosenblatt, Alfred 8, 16, 17, 18, 156, 202, 286, 347, 465.  
 Rosenbloom, Paul C. 47, 67.  
 Rosenfeld, B. A. 330.  
 Rosenfeld, Léon 451.  
 Rosenson, N. 383.  
 Rosenthal, Arthur 137.  
 Rosenthal, Artur 321.  
 Rosenthal, E. 93.  
 Ross, Arnold E. 110.  
 Ross, Arnold E. and Gordon Pall 110.  
 Rossier, P. 328, 345, 346.  
 Roth, L. 16.  
 Rothe, E. H. 282.  
 Rothe, Erich 277.  
 Rott, N. 286.  
 Roure, Henri 244.  
 Roussel, A. 103.  
 Roy, S. N. 146.  
 Roy, S. N. and Kalishankar Banerjee 301.  
 Roy, S. N. and Purnendu Bose 308.  
 Royall jr., N. N. 250.  
 Rozet, O. 353, 373, 374.  
 Rubin, Herman 310.  
 Ruchadze, A. K. s. A. Ja. Gorgidze 429.  
 Rufus, W. Carl 5, 9.  
 Ruist, Erik 316.  
 Ruse, H. S. 16, 384.  
 Rutgers, J. G. 192.  
 Rutherford, D. E. 79.  
 Rutishauser, H. 349.  
 Rutt, N. E. 394.  
 Ryde, Folke 162.  
 Ryser, H. J. s. C. J. Everett I. 280.  
 Ružik, M. 123.  
 Saarnio, Uno 126.  
 Sachs, A. 4.  
 Sachs, A. J. 4.  
 Sachs, A. J. s. O. Neugebauer 4.  
 Sagastume Berra, Alberto E. 18, 68, 80, 82, 85.  
 Sah, A. Pen-Tung 48.  
 Sahade, J. s. C. U. Cesco 463.  
 Sahai, Basdeo 182.  
 Salem, R. 137, 186, 188, 216.  
 Salem, R. and D. C. Spencer 103.  
 Salemi, R. and A. Zygmund 185, 204.  
 Sales, Francisco 124.  
 Salinas, B. R. 152.  
 Salzer, Herbert E. 97.  
 Samelson, Hans 413.  
 Samelson, Hans s. Deane Montgomery 415.  
 Samoilova-Yachontova, N. 460.  
 Sanchez Perez, Jose Augusto 3, 5.  
 Sancho de San Roman, J. 124.  
 San Juan, R. 150, 161.  
 Sanguinetti, Jerónimo 343.  
 Sansone, G. 177.  
 Santaló, L. A. 9, 347, 352, 355, 366.  
 Sarton, G. 3, 13.  
 Sarymsakov, T. A. 33.  
 Sasaki, Shigeo 389.  
 Sasaki, Shigeo s. Kentaro Yano 389.  
 Sastry, B. S. 146.  
 Sastry, H. Sreenivasa 194.  
 Sathe, L. G. 104.  
 Satterthwaite, Franklin E. 303, 311.  
 Šauder, Yu (Schauder, J.) s. Ž. Lerèl (J. Leray) 277.  
 Sauter, F. 450.  
 Sawkins, D. T. 308.  
 Saxer, Walter 248.  
 Schaafsma, M. 347.  
 Schaeffer, A. C. and D. C. Spencer 204.  
 Schaeffer, A. C. s. R. P. Boas jr. 222.  
 Schaeffer, A. C. s. R. I. Duffin 209.  
 Schafer, R. D. 80.  
 Schärf, Henryk 318.  
 Schaub, Werner 461.  
 Scheffé, Henry 295, 302, 304, 307.  
 Scheffé, H. and J. W. Tukey 305, 306.  
 Schelkunoff, S. A. 255.  
 Schelling, H. von 317.  
 Scherk, Peter 349.  
 Scherrer, W. 351.  
 Schieldrop, Edgar B. 154.  
 Schiffer, Menahem 237.  
 Schiffer, Menahem s. Stefan Bergman 242.  
 Schild, A. 447.  
 Schild, A. s. L. Infeld 448.  
 Schilling, Friedrich 331.  
 Schilling, O. F. G. s. S. MacLane 79.  
 Schmid, F. 92.  
 Schmidt, Erhard 14.  
 Schmidt, Karl 58.  
 Schmidt, Olaf H. 2.  
 Schmitz, H. P. 468.  
 Schneider, Otto 298.  
 Schoenberg, E. 467.  
 Schoenberg, I. J. 263.  
 Schoenfeld, Lowell 101.  
 Scholz, Heinrich 9.  
 Schröbler, Ingeborg 7.  
 Schrödinger, E. 442, 453.  
 Schrödinger, E. s. T. S. Broderick 282.  
 Schrödinger, E. s. J. Mc Connell 443.  
 Schrödinger, E. s. F. Mautner 443.  
 Schubert, G. 419.  
 Schubert, H. 214.  
 Schuh, Fred 84, 152, 153, 334.  
 Schulz, H. 438.  
 Schur, Issai 204, 280.  
 Schützenberger, Maurice-Paul 60.  
 Schwartz, Laurent 170, 275.  
 Schwarz, Stefan 48.  
 Schwerdtfeger, H. 38, 162.  
 Schwez, M. 468.  
 Scorza-Fragoni, Giuseppe 47, 139, 277, 406.  
 Scott, D. B. 409.  
 Scott, Winston M. 79, 82, 349.  
 Scott, W. M. s. C. Nesbitt 82.  
 Seal, H. L. 318.  
 Seares, Frederick H. 311.  
 Sebastião e Silva, José 278.  
 Segre, B. 92, 93, 118.  
 Segre, B. and K. Mahler 117.  
 Seidel, W. and J. L. Walsh 220.  
 Seidenberg, A. 71.  
 Seidenberg, A. s. I. S. Cohen 70.  
 Selberg, H. L. 226.  
 Selberg, Henrik L. 219 226.  
 Selberg, Sigmund 99.  
 Selecta 14.  
 Sélivanoff, N. A. 137.  
 Selmer, Ernst S. 153.  
 Semple, J. K. 17.  
 Sen, D. K. 344.  
 Sen, R. N. 391.  
 Sen Gupta, B. K. 367.  
 Sen Gupta, J. M. 298.  
 Sen Gupta, Prabodh Chandra 2.  
 Serber, R. and S. M. Dancoff 456.  
 Sergescu, Petre 11, 11, 16.  
 Sergescu, P. s. F. Brătîlă 25.  
 Seth, B. R. 429, 431.  
 Shafai, A. M. N. 298.  
 Shanin, N. 396.  
 Shanker, Hari 256.  
 Shanks, M. E. 402.  
 Shanmugadhasan, S. 440, 453.  
 Shannon, S. 315, 321.  
 Shapiro, G. S. 424.  
 Shapiro, J. 384.  
 Shapiro, J. L. 384.  
 Sharma, J. L. 198.  
 Shastri, N. A. 197, 251, 252.  
 Sheffer, I. M. 154, 192, 280.  
 Shen, Yu-Cheng 212.  
 Sherman, S. 54.  
 Sherman, S., J. DiPaola and H. F. Frissel 54.  
 Shestakov, V. 21.  
 Shih, Hsiang-Lin 413.  
 Shimizu, Tatsujiro 200, 225.  
 Shkliarsky, D. 406.  
 Shohat, J. 170.  
 Shohat, J. A. and A. V. Bushkovitch 147.  
 Shrivastava, M. P. 298, 308.  
 Shyū, Kintzyur 26.  
 Siddiqi, Raziuddin 261.  
 Sidon, S. 170.  
 Sidrak, Subhi s. Muhammad 'Ali Hijab 6.  
 Sierpiński, Wacław 30, 125, 126, 127, 130, 131, 132.  
 Sigalov, A. G. 282.  
 Silberstein, Ludwik 124, 288, 290, 316, 361, 438.  
 Silva, Giovanni 350, 465.  
 Silva Dias, C. L. da 278.  
 Silverman, L. L. and O. Szász 156.  
 Simaika, J. B. 308.  
 Simon, Herbert A. 304.  
 Simonart, Fernand 365.  
 Simoni, François de 434.  
 Simons, Lao Geneva 17.  
 Simons, William H. 102.  
 Simonsen, W. 320.  
 Simpson, Harold 303.  
 Singh, A. N. 185.  
 Sinha, H. 321.  
 Sinvhal, S. D. 185.  
 Sircar, H. 148.  
 Sispánov, Sergio 48, 92, 94, 352.  
 Sitaraman, B. s. B. Ramamurti 314.



- Sivukhin, D. V. 437.  
Skolem, Th. 89, 90, 122.  
Slansky, Serge 450, 451.  
Sleight, E. R. 7.  
Slobodetzky, L. N. 212.  
Slooten, Jacob van 432.  
Smiley, M. F. 35, 64, 134, 267.  
Smiley, M. F. and W. R. Transue 64.  
Smiley, M. F. s. E. Pitcher 64.  
Smiley, M. F. s. L. R. Wilcox 64.  
Smirnov, V. I. 15, 17.  
Smirnov, V. I. und S. L. Sobolev 15.  
Smith, B. Babington 309.  
Smith, C. A. B. 214.  
Smith, C. D. 17.  
Smith, David Eugene 7.  
Smorodinskij, J. 454.  
Smolian, V. 276.  
Smoly, J. G. 5.  
Sneddon, I. N. 420.  
Sneddon, I. N. s. J. W. Harding 420.  
Snirel'man, L. G. 351.  
Sobolev, S. L. s. V. I. Smirnov 15.  
Soddy, F. 153.  
Sokolov, A. s. D. Iwanenko 457.  
Sokolovsky, W. W. 421, 430.  
Smoigliana, Carlo 18.  
Sommerfeld, A. 15.  
Sorgenfrey, R. H. 402, 403.  
Soudan, Robert 41.  
Soula, J. 56, 151.  
Southwell, R. V. 418.  
Sparre Andersen, Erik 135.  
Spelser, Andreas s. Johann Heinrich Lambert 12.  
Spence, R. D. s. C. P. Wells 197.  
Spence, R. D. and C. P. Wells 435.  
Spencer, D. C. s. R. Salem 103.  
Spencer, D. C. 115, 206, 219.  
Spencer, D. C. s. A. C. Schaeffer 204.  
Sperling, M. 78.  
Spiess, Otto 12.  
Springer, C. E. 355, 365.  
Stabler, E. R. 65.  
Steck, Max 323.  
Steenrod, N. E. 414.  
Steenrod, N. E. s. W. Hurewicz 414.  
Steffensen, J. F. 192.  
Stein, Charles 304.  
Steklov, V. A. 14.  
Stepanoff, V. 171.  
Stepanoff, W. 17.  
Stephan, F. F. 315.  
Sternberg, E. 429.  
Stevens, W. L. 297, 312, 317.  
Stewart, B. M. 341.  
Stihl, E. E. 316.  
Stockmann, W. 468.  
Stollow, S. 232.  
Stone, M. H. s. Nelson Dunford 65.  
Stoner, Paul Matthew 316.  
Stormer, Carl 94.  
Strachey, C. and P. J. Wallis 194.  
Stratton, A. W. 185.  
Straus, E. G. s. A. Einstein 441, 443.  
Strömberg, B. 466.  
Strubecker, Karl 377.  
Stubban, John Olav 148.  
Stueckelberg, E. C. G. 454.  
Sturm, Roland G. 418.  
Su, Buchin 360, 368, 370, 371, 376, 377.  
Subbotin, M. F. 460.  
Sudan, Gabriel 125.  
Sugawara, Masao 246.  
Sugiura, Yoshikatsu and Shigeo Suzuki 439.  
Suguri, T. 383.  
Suhner, F. s. R. de Malle-mann 437.  
Sundet, K. Lage 333.  
Sunouchi, Gen-ichirō 182.  
Suseela, M. 322.  
Suzuki, Shigeo s. Yoshikatsu Sugiura 439.  
Svartholm, N. 453.  
Swed, Frieda S. and C. Eisenhart 305.  
Sydler, J.-P. 343.  
Synge, J. L. 418, 439.  
Synge, J. L. and W. Z. Chien 421.  
Szász, Otto 53, 156, 157, 161, 178, 179, 180, 181.  
Szász, Otto s. George E. Raves 191.  
Szász, O. s. L. L. Silverman 156.  
Szatrowski, Zenon 298.  
Szegő, G. 195, 207.  
Szegő, G. s. P. Erdős 55.  
Szegő, G. s. G. Pólya 123.  
Székelyfalvi Nagy, Gyula 346.  
Szpilrajn-Marzewski, Edward 125.  
Szumbarski, M. 400.  
Szymański, Piotr 130, 133.  
Tables of the probability integral of the mean deviation in normal samples 299.  
Täcklind, Sven 86.  
Tagamitzki, Yaroslav 153.  
Takano, Kazuo s. Kentaro Yano 391.  
Tamarin, J. D. and Al. Zygmund 241.  
Tams Lyche, R. 85.  
Tamm, Ig. 454.  
Tamm, Ig. s. L. Mandelstam 450.  
Tannery, Paul et H. G. Zeuthen 5.  
Tarski, Alfred 62, 133.  
Tarski, A. s. P. Erdős 126.  
Tarski, Alfred s. I. C. C. McKinsey 62.  
Tautz, G. 136.  
Taylor, Erwin K. s. Robert J. Wherry 309.  
Tchélidzé (Čelidze), V. 156.  
Tchétveroukhine, N. 343.  
Teghem, Jean 155.  
Teichmüller, Oswald 226, 232, 233, 234.  
Teissier du Cros, F. 214.  
Tenea, Luigi 31.  
Terracini, Alejandro 15, 58, 321, 347, 380.  
Tewari, N. D. 251, 255.  
Thébault, V. 84, 103, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 344.  
Thébault, V. s. R. Bouvaist 336, 338.  
Thijssen, W. P. 194.  
Thiruvengkatachar, V. R. s. B. S. Madhava Rao 452.  
Thomas, Joseph Miller 46.  
Thomas, L. H. 448.  
Thomas, T. Y. 353, 361.  
Thompson, Catherine M. 295.  
Thompson, D'Arcy W. and S. Chapman 18.  
Thompson, D'Arcy Wentworth s. Alfred J. Lotka 317.  
Thompson, J. Eric S. 2.  
Thompson, Samuel M. 19.  
Thorne, C. J. 192.  
Thrall, R. M. s. C. I. Nesbitt 76.  
Thrall, Robert M. s. Emil Artin 77.  
Thron, W. J. 164.  
Thron, W. J. s. V. F. Cowling 164.  
Thron, W. J. s. W. Leighton 164.  
Thullen, Peter 241.  
Thurston, H. S. 82.  
Thurstone, L. L. 312.  
Tibaldo, Lina 138.  
Tibiletti, C. 6.  
Tietze, Heinrich 24, 103, 350, 415.  
Tigānoiu, A. I. 152.  
Tihomirov (Tichomirov), A. 78.  
Tikhotzky, C. 366.  
Tintner, G. 311.  
Titchmarsh, E. C. 105.  
Todd, J. A. 43, 47, 50, 100.  
Tod-Tausky, Olga 37.  
Tóki, Yukinari 226.  
Tola, José P. 395.  
Tola Pasquel, José 145.  
Toledo Piza, Alfonso P. de 298.  
Toledo Toledo, Raimundo 20.  
Tolotti, Carlo 430.  
Tomber, Marvin L. 330.  
Tonnelat, Marie-Antoinette 444.  
Tonolo, A. 388, 429.  
Topel, B. J. 330.  
Toranzo, Fausto I. 276.  
Tornehave, Hans 244.  
Törnqvist, Leo 287.  
Torre, K. 428.  
Transue, W. R. 64.  
Transue, W. R. s. M. F. Smiley 64.  
Trejo, César A. 258.  
Treloar, Alan E. 295, 307.  
Tricomi, Francesco 199.  
Trost, Ernst 192.  
Truesdell, C. 426.  
Truesdell, C. s. P. Nemenyi 425.  
Tsao, Fei 311, 312.  
Tschebotarōw, N. 50, 51, 80, 177, 214.  
Tschebotarōw, N. s. L. Gawrilow 51.  
Tschebotarōw, N. G. 49, 50.  
Tschen, Y. Why 326.  
Tscherkassoff, A. 170.  
Tschlek, Hosé 346.  
Tsien, H. S. 428.  
Tsien, Hsue-Shen s. Th. von Kármán 424.  
Tsujii, Masatsugu 53, 132, 138, 220, 227, 228, 231, 237, 273, 274, 359.  
Tsvetkoff, G. E. 197.  
Tuan, Hsio-Fu 36.  
Tuchman, Z. 337.  
Tucker, Ledyard R. 309.  
Tukey, J. W. s. H. Scheffé 305, 306.  
Tumura, Yoshiro 229, 230.  
Turán, P. 54.  
Turetzky, A. 169.  
Turing, A. M. 20.  
Turnbull, H. W. 8, 9, 18, 39, 85.  
Turowicz, A. 32.  
Ugaheri, Tadasis, Shunji Kametani 220.  
Uhler, Horace S. 87.  
Ulam, S. s. C. J. Everett 63.  
Ulam, S. M. 131.  
Ulam, S. M. s. D. H. Hyers 264.  
Ulrich, F. E. s. S. Mandelbrojt 151.  
Unger, Georg 334.  
Urisman, S. 354.  
Usai, Giuseppe 24.  
Uspensky, J. V. 86, 293.  
Vagner, V. 361.  
Vaidya, P. C. 441.  
Vaidya, P. C. s. V. V. Narlikar 441.  
Vaidya, P. C. s. G. K. Patwardhan 441.  
Vaidyanathaswamy, R. 58.  
Vajda, S. 315.  
Valeiras, A. 245, 329.  
Valiron, Georges 214.  
Vallarta, Manuel Sandoval 196.  
Varetti, Carlo Vittorio S. Varma, R. S. 197.  
Vasileios, Filon 48.  
Vaulot, A.-E. 30.  
Vázquez García, Roberto and Francisco Zubieta Russi 127.  
Vázquez García, Roberto s. Francisco Zubieta Russi 127.  
Veen, van 15.  
Veen, S. C. van 146, 192, 346.  
Vegas Perez, Angel 285.  
Vening Meinesz, F. A. 466.  
Venkatachallengar, K. 34.  
Venkatachallengar, K. s. B. S. Madhava Rao 452.  
Venkataraman, C. S. 104.  
Venkataraman, M. 345.  
Venkataraman, A. M. s. Narasinga Rao 345.  
Venkataraman, M. and P. Kesava Menon 345.  
Venkatarayudu, T. 24.  
Verblunsky, S. 55.  
Verkaart, H. G. A. 345.  
Vermes, P. 155.  
Vicente Gonçalves, J. 16, 150.  
Vidal, E. 139, 351, 355.  
Vidal Abascal, Enrique 461.  
Victoria, L. 191.  
Vigier, Jean-Pierre 277.  
Vigil, Luis 50, 202.  
Vignaux, J. C. 250, 251.  
Vignaux, J. C. and Mischa Cotlar 201, 250.  
Vigroner, Léopold 416.  
Vijayaraghavan, T. 51, 122, 210.  
Villars, D. S. and T. W. Anderson 304.  
Villars, Felix 458.  
Ville, J. 290, 306.

Vincensini, Paul 362, 363, 364.  
 Vinograd, Bernard 69.  
 Vinogradoff, I. M. 109.  
 Vinogradov, I. M. ●83.  
 Vinogradow, I. 104, 109.  
 Vinogradow, I. M. 109.  
 Viola, T. 8, 11, 139.  
 Visa, E. 152, 322.  
 Visser, C. 148.  
 Vlasov, V. Z. 421, 424.  
 Vogel, Alfred 38.  
 Volkoviski, L. I. 232.  
 Volpato, M. 406.  
 Vonwiller, O. U. 8.  
 Votaw jr., David F. 294.  
 Vranceanu, Georges s. Octave Onicescu 18.  
 Vredenduin, P. G. J. 20.  
 Vreeken, W. 344.  
 Vries, J. F. de 340.  
 Vries, H. de 10.  
 Vulich, B. 279.  
 Vygodskij, M. 3, 351.

Wachs, Sylvain 88.  
 Wada, Yoshio 120.  
 Wade, L. I. 59.  
 Wade, T. L. 44.  
 Wade, T. L. and R. H. Bruck 43.  
 Wade, T. L. s. Richard H. Bruck 43.  
 Waerden, B. L. van der 3, 5.  
 Waerden, B. L. van der s. M. Gildemeister 303.  
 Wagner, E. 37.  
 Wagner, R. W. 79.  
 Wagner, V. 354, 391.  
 Wald, A. and J. Wolfowitz 301, 302.  
 Wald, Abraham 301, 302, 305, 306.  
 Waldapfel, L. 25.  
 Walfsz, Arnold, 68, 112, 114.  
 Walker, A. G. 126, 385, 447, 448.  
 Walker, A. G. s. A. Lichnerowicz 385.  
 Walker, Richard 325.  
 Wall, H. S. 55, 100, 165, 166.  
 Wall, H. S. and Marion Wetzel 165.  
 Wall, H. S. s. Joseph J. Dennis 165.  
 Wall, H. S. s. E. D. Hellinger 165.  
 Wall, H. S. s. H. J. Greenberg 159.  
 Wall, H. S. s. H. L. Garabedian ●161.  
 Wallace, A. D. 398, 401.

Wallauscheck, Richard 439.  
 Wallis, P. J. s. C. Strachey 194.  
 Wallman, Henry s. Witold Hurewicz 398.  
 Walls, Nancy 335.  
 Walsh, C. E. 148.  
 Walsh, John E. 300, 305.  
 Walsh, J. L. s. W. Seidel 220.  
 Walsh, P. s. W. Heitler 458.  
 Walther, A. 30.  
 Wang, Hsien-Chung 376, 377.  
 Wang, J. S. 460.  
 Wang, K. C. and K. C. Cheng 449.  
 Wang, S. C. s. Chao Ko 40.  
 Wansleben, F. 424.  
 Ward, Morgan 93.  
 Warrain, F. ●8.  
 Wassilkoff, D. 261.  
 Watson, G. N. 123.  
 Waugh, Frederick V. 308.  
 Wavre, Rolin 5, 18, 197.  
 Wayne, A. 347.  
 Weatherburn, C. E. ●295.  
 Wedderburn, J. H. M. 322.  
 Wehausen, J. V. 397.  
 Wehrli, Philippe s. Jean Bass 292.  
 Wehrli, Ph. s. G. Dedebant 292.  
 Wei, Dzong-shu 311.  
 Weichelt, John A. 308.  
 Weil, André s. Carl B. Allendoerfer 381.  
 Weinstein, I. and J. Kadan 399.  
 Weinstock, Robert 457.  
 Weisner, Louis 52, 53.  
 Wells, C. P. and R. D. Spence 197.  
 Wells, C. P. s. R. D. Spence 435.  
 Wentzel, Gregor 456.  
 Wentzel, G. s. M. Fierz 458.  
 Westberg, R. 141.  
 Wetzel, Marion s. H. S. Wall 165.  
 Weyl, Hermann 15, 16, 443.  
 Whaples, G. s. E. Artin 76, 83.  
 Wherry, Robert J. and Erwin K. Taylor 309.  
 White, H. S. 342.  
 Whitehead, George W. 411, 414.  
 Whitehead, J. H. C. 411, 414.  
 Whitehead, R. F. 93.

Whiteman, Albert Leon 109.  
 Whitlock jr., W. P. 88.  
 Whitman, E. A. 10.  
 Whitman, Philip M. 65.  
 Whitmore, Charles E. 16.  
 Whittaker, E. T. 12, 13, 14, 15, 18.  
 Whittaker, E. T. s. S. Chapman 14.  
 Whittaker, J. M. ●193.  
 Whitrow, G. J. 446, 447.  
 Whyburn, G. T. 404.  
 Widder, D. V. 248, 251.  
 Wiener, Norbert 292.  
 Wiener, N. s. G. Pólya 195.  
 Wijk, U. H. van 344.  
 Wilcox, L. R. 64.  
 Wilcox, L. R. and M. F. Smiley 64.  
 Wilkins jr., J. Ernest 369, 372.  
 Wilks, S. S. ●295, 306.  
 Williams, Donald 282.  
 Williams, G. T. 84.  
 Williamson, John 32, 35.  
 Wilson, A. H. 457.  
 Wilson, Edwin B. 14, 297, 305.  
 Wilson, Edwin B. s. Jane Worcester 295.  
 Wilson, G. H. A. 18.  
 Wilson, R. 146.  
 Wilson, R. s. A. J. Macintyre 203, 218.  
 Wilson, W. 446.  
 Winants, Marcel 353.  
 Winter, H. J. J. s. H. Gwynedd Green 11.  
 Wintner, Aurel ●105, 105, ●106, 106, 280.  
 Wiseman, Robert T. 319.  
 Wishard, A. 220.  
 Wold, Herman 311.  
 Wolfenden, Hugh H. 295, 320.  
 Wolfowitz, J. 302.  
 Wolfowitz, J. s. A. Wald 301, 302.  
 Wolkowitsch, D. 416.  
 Wong, Yung-Chow 333, 357, 386, 387.  
 Wood, P. W. 332.  
 Woodger, J. H. ●19.  
 Woods, Cecil L. 149.  
 Worcester, Jane and Edwin B. Wilson 295.  
 Woude, W. van der 31.  
 Wu, George 371.  
 Wu, Ta-Jen 329.  
 Wunderlich, Walter 329, 366.  
 Wuytack, F. 246.  
 Wylie jr., C. R. 325.  
 Wyman, Max 441.  
 Wyss, H. 319.

Yaglom, A. M. s. I. M. Yaglom 330.  
 Yaglom, I. M. 330.  
 Yaglom, I. M. and A. M. Yaglom 320.  
 Yamasaki, Zyunei 457.  
 Yang, Cheng-Ning 137.  
 Yang, T. 231.  
 Yano, Kentaro 389, 390.  
 Yano, Kentaro and Tyuzi Adati 386.  
 Yano, Kentaro and Yosio Mutô 388, 389.  
 Yano, Kentaro et Kazuo, Takano 391.  
 Yarden, Dov. 85, 337.  
 Yen, Chih-ta 34.  
 Yoshizawa, Hira-aki 273.  
 Yosida, Kôzaku 256, 268.  
 Yosida, Kôzaku and Tadasi Nakayama 267.  
 Yosida, Tokunosuke 208.  
 Young, A. W. 15.  
 Young jr., Gail S. 402, 405.  
 Young, L. C. 139, 146.  
 Young, P. M. s. R. G. Heisel 142.  
 Youngs, J. W. T. 396.  
 Yu, F. C. s. S. T. Ma 458.  
 Yuan, Shao Wen 427.

Zaanen, A. C. 275.  
 Zahlen, Jean Pierre 84. †  
 Zahorski, Zygmunt 137, 178, 258.  
 Zchakaja, D. 11.  
 Zeller, M. C. ●7.  
 Zeuthen, H. G. s. Paul Tannery 5.  
 Ziaud Din, M. 101.  
 Zin, Giovanni 34.  
 Zirwes, Albert. 343.  
 Zogin, I. I. 122.  
 Zorn, M. 127.  
 Zubieta Russi, Francisco and Roberto Vázquez García 127.  
 Zubieta Russi, Francisco s. Roberto Vázquez García 127.  
 Zuckerman, H. S. 214.  
 Zwinggi, Ernst 318, 319.  
 Zwirner, G. 139.  
 Zworykin, V. K., G. A. Morton, E. G. Ramberg, J. Hillier and A. W. Vance ●438.  
 Zygmund, A. 138, 147, 148, 188, 189, 202.  
 Zygmund, A. s. R. Salem 185, 204.  
 Zygmund, A. s. J. D. Tamarkin 241.







Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Forschungsinstitut für Mathematik.  
Herausgeber: E. Pannwitz, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg. — Printed in Germany.  
Satz und Druck: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III 18/203).